تصحیح ساختار فوق ریز اتم هیدروژن

از مرتبه α^4

به روش میدان مؤثرNRQED

سید محمد زبرجد، محسن بیگدلی

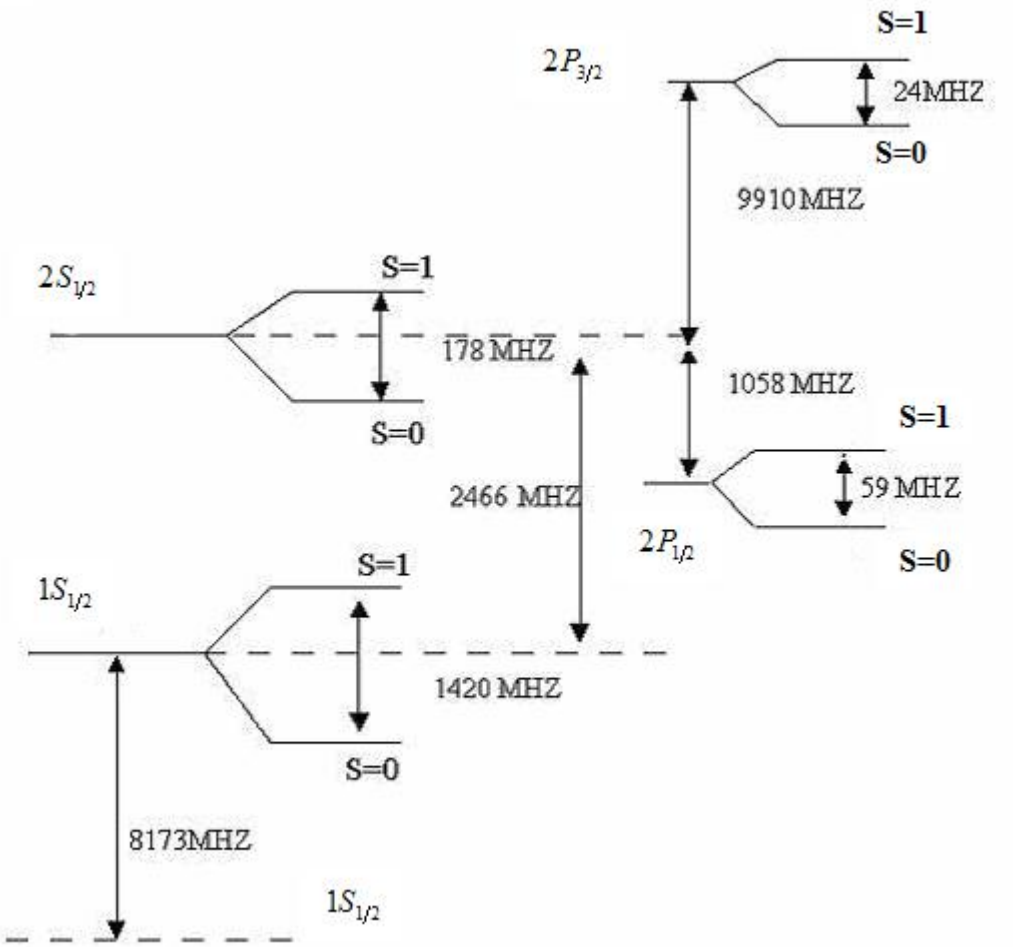
فهرست

۱-مقدمه

۲- الکترودینامیک کوانتومی غیر نسبیتی NRQED

۳- تصحیح انرژی حالات مقید از مرتبه α^4

طیف اتم تک الکترونی یکی از موضوعات متداول مورد بحث فیزیک کوانتومی است که به طور اساسی بیشتر پیشرفتهای اخیر مکانیک کوانتومی مربوط به بیان شکل اصلی سطوح انرژی اتم هیدروژن می شود. هر مرحله از پیشرفت مکانیک کوانتومی منجر به درک بهتر فیزیک حالت مقید می شود.



تکنیکهای متفاوتی برای بدست آوردن انرژی حالات مقید وجود داردکه عبارتنداز:

۱- معادله بتا-سالپیتر که در سال ۱۹۵۱ توسط بت و سالپیتر ارائه شد.

۲- روش بت که بت برای بدست آوردن جابجایی لمب اتم هیدروژن ارائه کرد.

۳- روش الکترودینامیک غیرنسبیتی (NRQED) که برای اولین بار توسط لاپاژ و کژول (Lepage & Caswell) در سال (۱۹۸۶) ابداع شد .

الف)لاگرانژی NRQED

باتوجه به اینکه الکترون وپروتون دراتم هیدروژن غیرنسبیتی می باشند کارخود را با نوشتن لاگرانژی غیر نسبیتی شروع می کنیم. میدانهایی که نشان دهنده درجات آزادی با انرژی کم می باشند عبارتنداز، ψو χ که به ترتیب نشان دهنده میدان الکترون وپروتون غیرنسبیتی و A_μ نشان دهنده فوتون باانرژی کمتراز جرم الکترون m می باشد .
لاگرانژی NRQEDبه صورت زیر می باشد:

$$\mathcal{L}_{Two_Fermion} = \psi^+[iD_t + \frac{\mathbf{D}^2}{2m} + \frac{\mathbf{D}^4}{8m^3} + (c_1)_e\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{B} + (c_2)_e(\mathbf{D}.\mathbf{E} - \mathbf{E}.\mathbf{D}) + (c_3)_e\boldsymbol{\sigma}.(\mathbf{D}\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\times\mathbf{D}) + \ldots]\psi$$

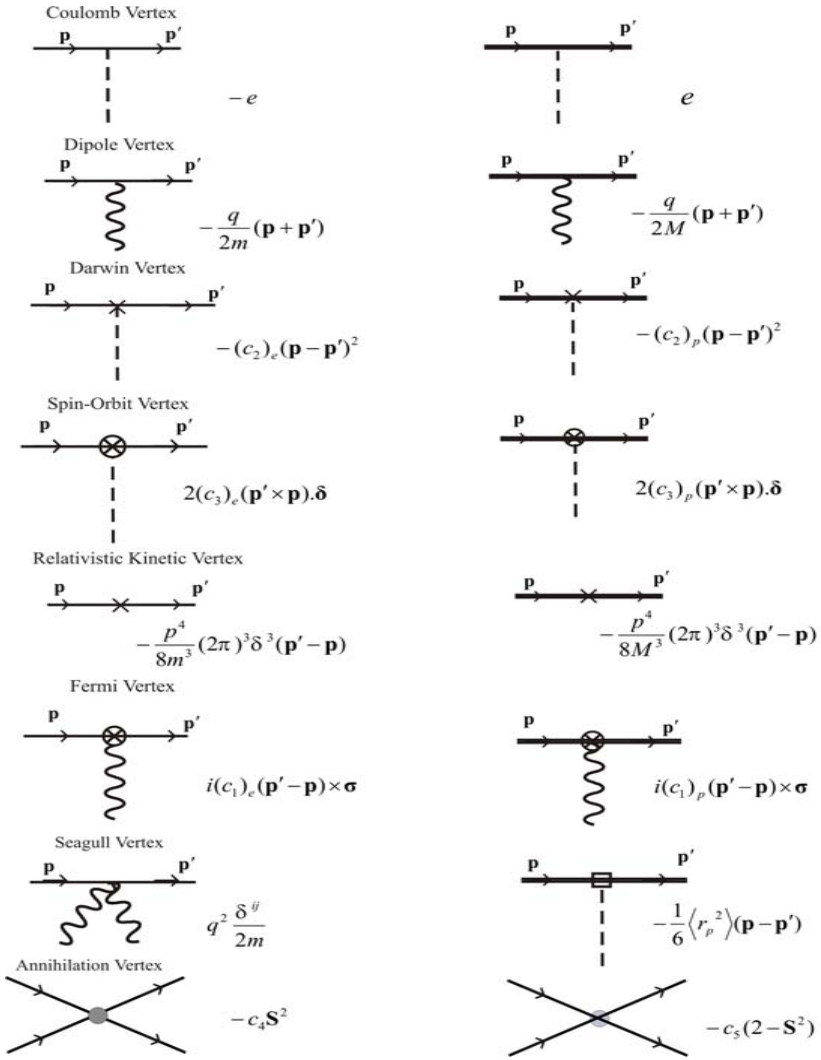
$$+ \chi^+[iD_t + \frac{\mathbf{D}^2}{2M} + \frac{\mathbf{D}^4}{8M^3} + (c_1)_p\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{B} + (c_2)_p(\mathbf{D}.\mathbf{E} - \mathbf{E}.\mathbf{D}) + (c_3)_p\boldsymbol{\sigma}.(\mathbf{D}\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\times\mathbf{D}) + \ldots]\chi$$

$$\mathcal{L}_{Four_Fermion} = c_4\psi^+(\boldsymbol{\sigma}\sigma_2)\chi^*.\chi^T(\sigma_2\boldsymbol{\sigma})\psi + c_5\psi^+(\sigma_2)\chi^*.\chi^T(\sigma_2)\psi$$

$$+ c_6[\psi^+(\sigma_2\boldsymbol{\sigma})\mathbf{D}^2\chi^*.\chi^+(\sigma_2\boldsymbol{\sigma})\psi] + \ldots$$

$$\mathcal{L}_{Photon} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + c_9A^0(\mathbf{k})\frac{\mathbf{k}^4}{m^2}A^0(\mathbf{k}) - c_{10}A^i(k)\frac{\mathbf{k}^4}{m^2}A^j(k)\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2}\right) + \ldots.$$

که در آن $D_t = \partial_t + iqA_0$ و $\mathbf{D} = i(\mathbf{p} - q\mathbf{A})$ و $e = 4\pi\alpha$ (Natural Units) ، مؤلفه های بردار $\boldsymbol{\sigma}$ نمایانگر ماتریسهای اسپین پائولی می باشد .


Coulomb Vertex
p
p′
$-e$
e
Dipole Vertex
$-\frac{q}{2m}(\mathbf{p}+\mathbf{p}')$
$-\frac{q}{2M}(\mathbf{p}+\mathbf{p}')$
Darwin Vertex
$-(c_2)_e(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2$
$-(c_2)_p(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2$
Spin-Orbit Vertex
$2(c_3)_e(\mathbf{p}'\times\mathbf{p}).\boldsymbol{\delta}$
$2(c_3)_p(\mathbf{p}'\times\mathbf{p}).\boldsymbol{\delta}$
Relativistic Kinetic Vertex
$-\frac{p^4}{8m^3}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$
$-\frac{p^4}{8M^3}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$
Fermi Vertex
$i(c_1)_e(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\times\boldsymbol{\sigma}$
$i(c_1)_p(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\times\boldsymbol{\sigma}$
Seagull Vertex
$q^2\frac{\delta^{ij}}{2m}$
$-\frac{1}{6}\langle r_p^2\rangle(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$
Annihilation Vertex
$-c_4\mathbf{S}^2$
$-c_5(2-\mathbf{S}^2)$

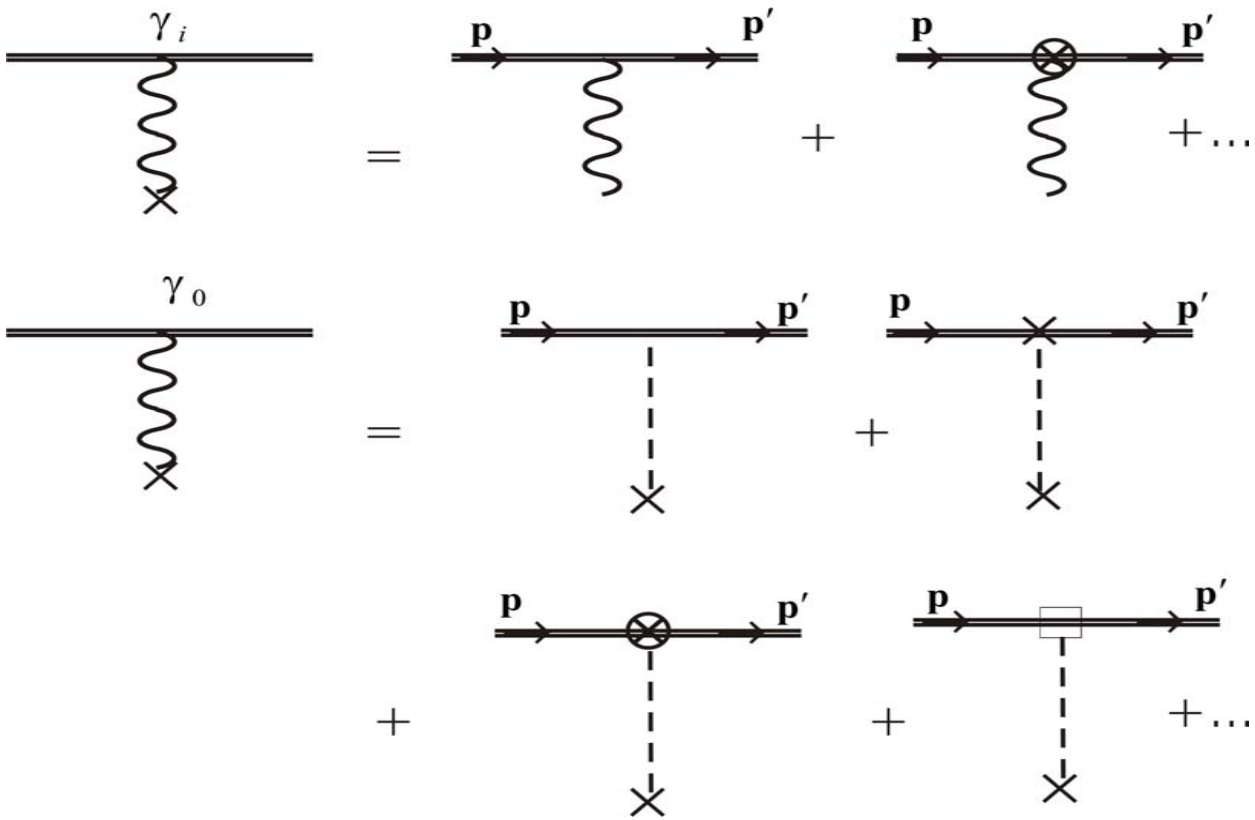
NRQED رئوس

ب) روش مقایسه(Matching)

ضرایب مجهول لاگرانژی قابل محاسبه بصورت تابعی از α و جرم می باشند و آنها را می توان به طور مناسب با محاسبه پراکندگی الکترون و پروتون آزاد در QED و درNRQED تعیین نمود.
ضرایب موجود در لاگرانژی یعنی c_i ها بصورت زیرنوشته می شوند:

$$c_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} + c_i^{(2)} + \dots$$

که درآن $c_i^{(0)}$ ناشی ازمقایسه پراکندگی نمودارهای درختیQEDو نمودارهای درختی NRQED می باشند.

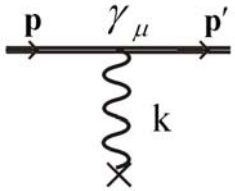


روش مقایسه شامل حالتهای مقید نمی شود بلکه فقط از پراکندگی الکترون و پروتون آزاد استفاده می شود. مقایسه تنها مرحله ای از محاسبات می باشد که نمودارهای QED را شامل می شود.

ضرایب عملگرهای دوفرمیونی، c_1 ، c_2 و c_3 موجود در معادله لاگرانژی با بررسی پراکندگی الکترون و پروتون در حضور میدان خارجی A_μ تعیین می شوند. این مقادیر برای الکترون بصورت زیر می باشند :

$$(c_1^{(0)})_e = \frac{-e}{2m} \qquad (c_2^{(0)})_e = \frac{-e}{8m^2} \qquad (c_3^{(0)})_e = \frac{-ie}{8m^2}$$

در اینجا مقادیر $(c_i)_p$ را برای پروتون محاسبه می کنیم. راس QED برای پروتون بصورت زیراست:



$$\bar{u}(\mathbf{p}')[F_1(k^2)\gamma_\mu + \frac{\kappa}{2M}F_2(k^2)i\sigma_{\mu\nu}k^\nu]u(\mathbf{p})$$

که در آن اسپینور دیراک برابراست با:

$$u(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+M}{2E}}\begin{pmatrix} \xi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p}}{E+M}\xi \end{pmatrix}$$

$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، F_1 و F_2 توابع ساختار مستقل از هم، κ ممان مغناطیسی غیرعادی پروتون و

$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

و

$k = p' - p$ $(k^2 = k_0^{\,2} - \mathbf{k}^2)$ می باشند.

با انجام کمی محاسبات مقادیر $(c_i)_p$ اینچنین بدست می آیند :

$$(c_1^{(0)})_p = \frac{e}{2M}(\frac{g}{2}) \qquad (c_2^{(0)})_p = \frac{e}{8M^2}(g-1) \qquad (c_3^{(0)})_p = \frac{ie}{8M^2}(g-1)$$

با توجه به اینکه $c_4^{(0)}, c_5^{(0)}$ و $c_6^{(0)}$ ناشی از نمودارهای نابودی (Annihilation Vertex) می باشند در مورد زوج الکترون و پروتون این مقادیر صفر هستند:.

$$c_6^{(0)} = c_5^{(0)} = c_4^{(0)} = 0$$

د)قانون شمارش (Power - counting)

اساس هر تئوری میدان مؤثر در قانون شمارش قرار دارد. قانون شمارش امکان این را به ما می دهد که قبل ازمحاسبه مشاهده پذیرها به مرتبه آنهاتا نسبت کوچکی از مقیاس مورد نظر پی ببریم .

سهم هر نمودار را درجابجایی سطوح انرژی حالت مقید از مرتبه

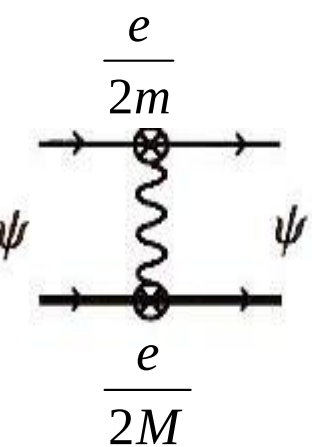
$$O(\alpha) = \frac{\mu^{\varepsilon+\rho+1}}{m_1{}^{\varepsilon} m_2{}^{\rho}} Z^{\eta} \alpha^{\zeta}$$

می باشد. که در آن $\zeta = 1+\varepsilon+\rho-N+\sum_i n_i$ و $\eta = 1+\varepsilon+\rho-N+\sum_i a_i$ می باشند.

N ، تعداد انتشارگرهای فرمیونی الکترون ــ پروتون یا الکترون ــ پوزیترون که اندرکنشهای همزمان را جدا می کنند.

ε و ρ به ترتیب جمع توانهای $(\frac{1}{m_1})$ و $(\frac{1}{m_2})$ که این دو در رئوس ظاهر می شوند.

توانهای α ظاهر شده در رأس؛ اُم را با n_i و توانهای Z را با a_i نمایش می دهیم.



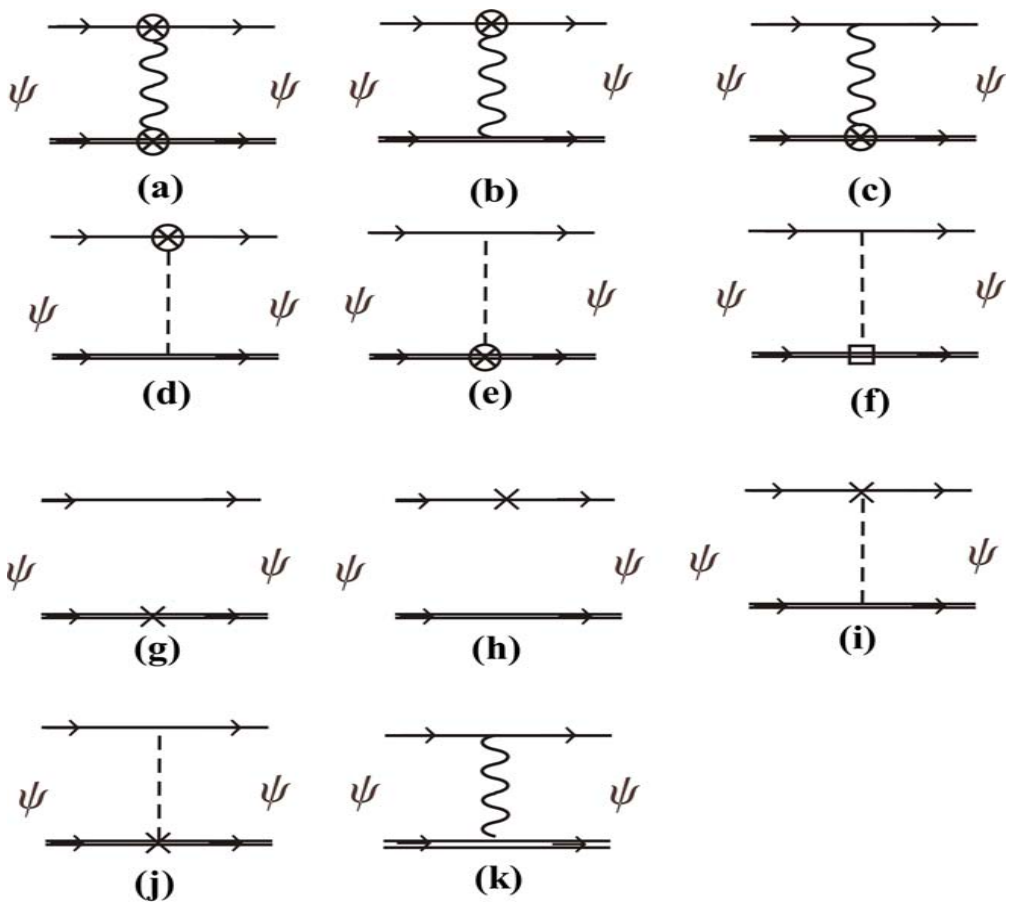
تصحیح اتم هیدروژن از مرتبه α^4

نمودارهای مربوط به تصحیح اتم هیدروژن از مرتبه α^4 را می توان با توجه به قانون شمارش (Power Counting) به صورت زیر تعیین نمود .

$$\zeta = 1 + \varepsilon + \rho - N + \sum_i n_i = 4$$

ابتدا حالتی را بررسی می کنیم که $N = 0$ باشد.

نمودارهای ممکن زیر را برای این شرط داریم :



برای حالتی که $N \geq 1$ باشد
نمودارها از مرتبه α^6 می شوند .

نمودار (f) که مربوط به تصحیح ناشی از شعاع پروتون می باشد منجربه نتیجه زیر می شود :

$$(\Delta E)_f = \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^6}\psi^*(\mathbf{p}')[(-e)\frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}\frac{-e}{6}\langle r_p{}^2\rangle(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2]\psi(\mathbf{p}) = \frac{e^2}{6}\langle r_p{}^2\rangle|\psi(0)|^2 = \frac{2}{3}\frac{\alpha^4}{n^3}\mu^3\langle r_p{}^2\rangle\delta_{l,0}$$

به خاطر جفت شدگی اسپین هسته ($\mathbf{s}_p$) با اسپین الکترن ($\mathbf{s}_e$) وجفت شدگی اسپین الکترون با تکانه زاویه الکترون **(L)** تصحیحاتی بر اتم هیدروژن وارد می شود که در نمودارهای(a-e) نشان داده شده است. حال به بررسی تک تک این نمودارها می پردازیم:

$$(\Delta E_n)_a = \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^6}\psi^*(p')[(\mathbf{-p}'+\mathbf{p})\times\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{e}]_\mathrm{i}[(-\mathbf{p}'+\mathbf{p})\times\boldsymbol{\sigma}_p]_j\frac{-1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}$$

$$[\delta_{ij} - \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p})_\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')_\mathrm{j}}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}]\psi(\mathbf{p})$$

$$(\Delta E_n)_a = \frac{4}{3}g\frac{\alpha^4}{n^3 mM}\left(\frac{Mm}{m+M}\right)^3\langle\mathbf{s}_e.\mathbf{s}_\mathrm{p}\rangle\delta_{l,0} + \frac{g}{2}\frac{\mu^3\alpha^4(1-\delta_{l,0})\langle\mathbf{Y}\rangle}{Mmn^3 l(l+1)(l+\frac{1}{2})(2l+3)(2l-1)}$$

در اینجا $\mathbf{Y} = 2(\mathbf{s}_\mathrm{e}.\mathbf{s}_\mathrm{p}) + \frac{1}{2}\mathbf{L}^2 - \frac{3}{2}(\mathbf{S}.\mathbf{L}) - 3(\mathbf{S}.\mathbf{L})^2$ به فرم و $\mathbf{S} = \mathbf{s}_\mathrm{e} + \mathbf{s}_\mathrm{p}$ می باشد.

سایر نمودارهای دارای اسپین به نتایج زیر منجر می شوند :

$$(\Delta E_n)_b = \frac{\alpha}{Mm}\left\langle \frac{\mathbf{s}_e.\mathbf{L}}{r^3}\right\rangle (1-\delta_{l,0})$$

$$(\Delta E_n)_c = \frac{\alpha g}{2Mm}\left\langle \frac{\mathbf{s}_p.\mathbf{L}}{r^3}\right\rangle (1-\delta_{l,0})$$

$$(\Delta E_n)_d = \frac{\alpha}{2m^2}\left\langle \frac{\mathbf{s}_e.\mathbf{L}}{r^3}\right\rangle (1-\delta_{l,0})$$

$$(\Delta E_n)_e = \frac{\alpha(g-1)}{2M^2}\left\langle \frac{\mathbf{s}_p.\mathbf{L}}{r^3}\right\rangle (1-\delta_{l,0})$$

مقادیر چشمداشتی با استفاده نماد 6j ویگنر این چنین بدست می آیند :

$$\langle \mathbf{Y}\rangle = \frac{-\delta_{S,1}}{2}\begin{cases} l(2l-1) & J=l+1 \\ -(2l+3)(2l-1) & J=l \\ (2l+3)(l+1) & J=l-1 \end{cases}$$

$$\langle \mathbf{s}_e.\mathbf{L}\rangle = \langle \mathbf{s}_p.\mathbf{L}\rangle = \delta_{S,1}\begin{cases} l/2 & J=l+1 \\ -1/2 & J=l \\ -(l+1)/2 & J=l-1 \end{cases}$$

با جمع کلیه نمودارهای شکل(۳) داریم:

$$(\Delta E)_{total} = \frac{2}{3} g \frac{\alpha^4}{n^3 mM}\left(\frac{Mm}{m+M}\right)^3 \delta_{l,0}\left(\frac{1}{2}\delta_{S,1} - \frac{3}{2}\delta_{S,0}\right)$$

$$+\frac{2}{3}\frac{\alpha^4}{n^3}\mu^3\langle {r_p}^2\rangle\delta_{l,0} - \frac{g}{2}\frac{\mu^3\alpha^4(1-\delta_{l,0})\delta_{S,1}}{Mmn^3(2l+1)}\begin{cases}\dfrac{1}{(2l+3)(l+1)} & J=l+1\\ \dfrac{-1}{l(l+1)} & J=l\\ \dfrac{1}{l(2l-1)} & J=l-1\end{cases}$$

$$+\frac{\alpha^4\mu^3}{2n^3(2l+1)}\left(\frac{g+2}{Mm}+\left(\frac{1}{m^2}+\frac{g-1}{M^2}\right)\right)(1-\delta_{l,0})\delta_{S,1}\begin{cases}\dfrac{1}{(l+1)} & J=l+1\\ \dfrac{-1}{l(l+1)} & J=l\\ \dfrac{-1}{l} & J=l-1\end{cases}$$

$$+\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{M^3}\right)\left(\frac{-\mu^4\alpha^4}{2n^3(l+\frac{1}{2})}+\frac{3\mu^4\alpha^4}{8n^4}\right)+\frac{\mu^3(g-1)\alpha^4}{2M^2n^3}\delta_{l,0}+\frac{\mu^3\alpha^4}{2m^2n^3}\delta_{l,0}$$

$$+\frac{\mu^3\alpha^4}{Mmn^3}\delta_{l,0}+\frac{\mu^3\alpha^4}{Mmn^4}-\frac{3\mu^3\alpha^4}{2Mmn^3(l+\frac{1}{2})}$$

اکنون در موقعیتی هستیم که می توانیم ساختارفوق ریز اتم هیدروژن را برای حالت پایه $l=0$ و حالت برانگیخته $l\neq 0$ با اعدادکوانتومی n و l اختیاری بدست بیاوریم. نمودارهایی که مستقل از اسپین هستند در محاسبه ساختار ریز هیچ سهمی ندارد. درحالت پایه فقط نمودار(a)دارای سهم می باشد.

$$\Delta E_{hfs} = \Delta E_n(S=1) - \Delta E_n(S=0)$$

$$\Delta E_{hfs}(n,\alpha^4) = \frac{4}{3} g\alpha^4 \frac{m^2}{M}\left(\frac{M}{M+m}\right)^3 \delta_{l0}$$

برای حالت برانگیخته داریم :

$$\Delta E_{hfs}(n,l,\alpha^4) = \frac{g}{2}\frac{\mu^3\alpha^4}{Mmn^3(2l+1)}\begin{cases}\dfrac{1}{(2l+3)(l+1)} & J=l+1\\ \dfrac{-1}{l(l+1)} & J=l\\ \dfrac{1}{l(2l-1)} & J=l-1\end{cases}$$

$$+\frac{\alpha^4\mu^3}{2n^3(2l+1)}\left(\frac{g+2}{Mm}+\left(\frac{1}{m^2}+\frac{g-1}{M^2}\right)\right)\delta_{S,1}\begin{cases}\dfrac{1}{(l+1)} & J=l+1\\ \dfrac{-1}{l(l+1)} & J=l\\ \dfrac{-1}{l} & J=l-1\end{cases}$$