Degree of Entanglement for Qubit-Qutrit Systems in a Pure State

Safa Jami, Mohsen Sarbishei

Ferdowsi University of Mashhad

Introduction

یکی از مهمترین اهداف تئوری اطلاعات کوانتومی ، که در سالهای اخیر گسترش زیادی داشته است، استفاده از درهم تنیدگی در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی مانند teleportation, quantum dense coding, cryptography, quantum computation, ... می باشد. از آنجا که درهم تنیدگی بعنوان یک source (مانند انرژی) در این فرآیندها به کار می رود، زوجهای درهم تنیده با درجه درهم تنیدگی بالاتر برای استفاده مناسب ترند. به همین دلیل ضروری به نظر می رسد که آنرا به تعداد راههای ممکن کمی کنیم.

Entanglemnt of Formation for two Qubits

یکی از مهمترین مقیاسهایی که برای تعیین درجه درهم تنیدگی وجود دارد entanglement of formation می باشد.

$$|\psi\rangle_{2\times 2} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} |i\rangle | j\rangle$$

$$E\left(|\psi\rangle_{2\times 2}\right) = h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}\right)$$

$$h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$$

$$C\left(|\psi\rangle_{2\times 2}\right) = 2\left|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right|$$

Concurrence in terms of Schmidt coefficients

همچنین با استفاده از تجزیه اشمیت حالت دو کیوبیتی

$$|\psi\rangle_{2\times 2} = k_1 |x_1, y_1\rangle + k_2 |x_2, y_2\rangle$$

Concurrence را به صورت زیر نیز می توان بیان کرد.

$$C\left(|\psi\rangle_{2\times 2}\right) = 2\, k_1\, k_2$$

Qubit-Qutrit system

ماتریس چگالی هر سیستم کیوبیت-کیوتریت:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{6}\left(I \otimes I + \vec{\sigma}^{A}.\vec{u} \otimes I + \sqrt{3}\, I \otimes \vec{\lambda}^{B}.\vec{v} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{8} \beta_{ij}\sigma_i^{A} \otimes \lambda_j^{B} \right)$$

ماتریسهای چگالی زیرسیستمهای کیوبیت و کیوتریت:

$$\rho_A = tr_B(\rho_{AB}) = \frac{1}{2}\left(1 + \vec{\sigma}^{A}.\vec{u}\right)$$

$$\rho_B = tr_A(\rho_{AB}) = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{3}\,\vec{\lambda}^{B}.\vec{v}\right)$$

که در آن σ_i ها ماتریس های پائولی و λ_j ها ماتریسهای گلمان و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بردارهایی درفضای سه و هشت بعدی و I ماتریس همانی در فضای 2 و 3 بعدی می باشند.

ضرایب بسط ماتریس چگالی از روابط زیر بدست می آیند

$$u_i = tr\left(\rho_{AB}\ \sigma_i \otimes I\right)$$

$$v_j = \frac{\sqrt{3}}{2} tr\left(\rho_{AB}\ I \otimes \lambda_j\right)$$

$$\beta_{ij} = \frac{3}{2} tr\left(\rho_{AB}\ \sigma_i \otimes \lambda_j\right)$$

A entanglement measure

می توان نشان داد که برای یک حالت خالص $\left|\vec{u}\right| = \left|\vec{v}\right|$ می باشد. حالتهای زیر را در نظر می گیریم:

- Product state: $\left|\vec{u}\right| = \left|\vec{v}\right| = 1$
- Maximally entangled state: $\left|\vec{u}\right| = \left|\vec{v}\right| = 0$

کمیت $C = \sqrt{1 - \left|\vec{u}\right|^2}$ نامزد خوبی برای تعیین میزان

درهم تنیدگی است.

Concurrence for Qubit-Qutrit

تابع حالت یک سیستم کیوبیت-کیوتریت :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}|i\rangle|j\rangle$$

برای این تابع حالت، ماتریس چگالی و با استفاده از روابط ذکر شده در قبل ضرایب بسط ماتریس چگالی و بردار $\vec{u}$ را بدست می آوریم و با استفاده از آن رابطه زیر برای C سیستم 2×3 بدست می آید:

$$C(|\psi\rangle) = 2\left[(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})^2 + (a_{12}a_{22} - a_{13}a_{22})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Concurrence in terms of Schmidt coefficients

یک حالت 2×3 را با استفاده ازقضیه اشمیت به صورت زیر می توان نوشت:

$$|\psi\rangle_{2\times3} = k_1|x_1, y_1\rangle + k_2|x_2, y_2\rangle$$

مجذورضرایب اشمیت، ویژه مقادیر ماتریسهای چگالی تقلیل یافته $\rho_A = AA^\dagger$ یا $\rho_B = A^\dagger A$ می باشند. ازمعادله ویژه مقداری ماتریسهای فوق دو نتیجه زیر رابدست می آوریم.

$$k_1^2 + k_2^2 = 1$$

$$k_1^2 k_2^2 = \frac{1}{4} C^2\left(|\psi\rangle_{2\times3}\right)$$

و یا

$$C\left(\left|\psi\right\rangle_{2\times3}\right)=2k_1k_2$$

رابطه فوق دقیقا شکل رابطه مربوط به دو کیوبیت را دارد. این حقیقت از آنجا ناشی می شود که برای کیوبیت-کیوتریت نیز تجزیه اشمیت مربوطه تنها دو جمله دارد. بنابراین می توان نشان داد که EOF برای سیستم کیوبیت-کیوتریت دقیقا همان شکل سیستم دو کیوبیت را دارد.

با تشکر!