گسترش فضای فاز و تقارن پیمانه ای در مدل چرن-سیمونز غیرآبلی ابرمتقارن

بهلکه غراوی، خدیجه؛ منعم زاده، مجید

دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده

در این مقاله ساختار قیدی مدل ابرمتقارن چرن- سیمونز غیرآبلی سیمونزغیرآبلی گروه SU(2)، در ۱+۲ بعد مطالعه شده است. در بررسی مدل مورد نظر تعدادی قیود نوع دوم بدست می‌آید که با توجه به فرض دیراک این مدل غیرپیمانه‌ای است. سپس با استفاده از رهیافت BFT مرتبه محدود و معرفی میدان های کمکی قیود نوع دوم به قیود نوع اول تبدیل می‌شود. تا در نهایت مدلی با تقارن پیمانه‌ای بدست آید.

مقدمه

برای رسیدن به یک وحدت بزرگ راه‌های مختلفی وجود دارد، که یکی از آن‌ها مسئله تقارن است[۱]. در فیزیک سیستم های دارای تقارن هستند که تحت یک تبدیل ناوردا باشند. نظریه های فیزیکی که تقارن هایی از این قبیل دارند را نظریه پیمانه‌ای می‌گویند سیستم پیمانه ای یک سیستم مقید است که مربوط به دسته ای ازنظریه ها به نام نظریه های لاگرانژی تکین هستند[۱]. دیراک اولین کسی بود که بررسی کلاسیکی سیستم های مقید و لاگرانژی های تکین را مورد توجه قرار داد [۲،۳]. بنا به فرض دیراک، کلیه قیود نوع اول اعم از اولیه و ثانویه مولدهای تبدیل پیمانه‌ای هستند، در مقابل ظاهر شدن قیود نوع دوم در یک نظریه نشان دهنده‌ی فقدان تقارن پیمانه‌ای است[٤] وبرای کوانتش کانونیک این سیستم‌ها با مشکلاتی روبرو می‌شویم، یکی از راه‌های رفع این مشکلات تبدیل مدل غیرپیمانه‌ای به پیمانه‌ای است. در این تحقیق از رهیافت BFT برای این منظوراستفاده می‌شود.

ساختار قیدی مدل چرن- سیمونز غیرآبلی ابرمتقارن

مدل چرن- سیمونز یکی از مدل‌های است که در فیزیک نظری مورد توجه می‌باشد[٥،٦]. کنش مدل ابرمتقارن چرن- سیمونز غیرآبلی در ۱+۲ بعد با استفاده از میدان وس-زومینو برحسب میدان‌های مؤلفه‌ای، به صورت رابطه‌ی زیر معرفی می‌شود [۷]

$$S=\int d^3x[-\frac{1}{4}G^{ab,r}G^r_{ab}+\frac{1}{2}k\varepsilon^{abc}(A^r_a\partial_b A^r_c+\frac{1}{3}f^{rsu}A^r_aA^s_bA^u_c)+i\psi^{\dagger\alpha}(\gamma^a)^\rho_\alpha D_a\psi_\rho+(D^a\varphi)^\dagger D_a\varphi+\frac{1}{2}i\lambda^\alpha(\gamma^a)^\rho_\alpha D_a\lambda_\rho$$
$$+\frac{1}{2}i\chi^\alpha(\gamma^a)^\rho_\alpha D_a\chi_\rho+\frac{k}{2}\lambda^{\alpha,r}\lambda^r_\alpha+\frac{k}{2}\chi^{\alpha,r}\chi^r_\alpha+\frac{1}{2}(D^aN^r)D_aN_r-U(\varphi,\varphi^\dagger,\psi,\psi^\dagger,\lambda,\chi,N)], \tag{۱}$$

عبارت پتانسیل در رابطه‌ی فوق برابر است با

$$U(\varphi,\varphi^\dagger,\psi,\psi^\dagger,\lambda,\chi,N)=f^{rsu}\chi^{\alpha,r}\lambda^s_\alpha N^u-i(\psi^{\dagger\alpha}\lambda^r_\alpha T^r\varphi-\varphi^\dagger T^r\lambda^{\alpha,r}\psi_\alpha)-\psi^{\dagger\alpha}\chi^r_\alpha T^r\varphi-\varphi^\dagger T^r\chi^{\alpha,r}\psi_\alpha$$
$$-\frac{n-1}{2kn}\nu^2\psi^{\dagger\alpha}\psi_\alpha-\psi^{\dagger\alpha}N^rT^r\psi_\alpha+\varphi^\dagger(N^rT^r+\frac{n-1}{2kn}\nu^2)(N^sT^s+\frac{n-1}{2kn}\nu^2)\varphi+\frac{1}{2}(\varphi^\dagger T^r\varphi+kN^r)(\varphi^\dagger T^r\varphi+kN^r) \tag{۲}$$

و $D=\partial-iA_a^rT^r\,(a=1,2,3), G_{ab}^r=\partial_aA_b^r-\partial_bA_a^r+f^{rsu}A_a^sA_b^u$ و T^rها مولدهای $SU(n)$، که در روابط $\left[T^r,T^r\right]=if^{rsu}T^u$ و $tr\left(T^aT^b\right)=\delta^{ab}/2$ صدق می‌کنند، ماتریس‌های γ، $\gamma^0=i\sigma^1$ ، $\gamma^1=\sigma^2$ ، $\gamma^2=i\sigma^3$ و $\gamma^a\gamma^b=g^{ab}+i\varepsilon^{abc}\gamma_c$ است.

حال به طور صریح می‌توانیم ببینیم با توجه به روش دیراک برگمن و تعریف تکانه‌ی کانونیک نسبت به میدان‌های $A^r{}_a$, ψ_ρ , $\psi^{\dagger\alpha}$, φ , $\varphi^\dagger$, λ_ρ , χ_ρ , N^r قیود اولیه دستگاه برابر است با

$$\begin{aligned}&\Gamma_1^r=\pi^{\alpha,r}\approx 0, \qquad \Gamma_2^\rho=\pi_{\psi_\rho}-i\psi^{\dagger\alpha}(\gamma^0)_\alpha^\rho\approx 0, \qquad \Gamma_3^\alpha=\pi_{\psi^{\dagger\alpha}}\approx 0,\\ &\Gamma_4^\rho=\pi_{\lambda_\rho}-\frac{1}{2}i\lambda^\alpha(\gamma^0)_\alpha^\rho\approx 0, \qquad \Gamma_5^\rho=\pi_{\chi_\rho}-\frac{1}{2}i\chi^\alpha(\gamma^0)_\alpha^\rho\approx 0,\end{aligned} \tag{۳}$$

در نتیجه چگالی هامیلتونی کانونیک با استفاده از تبدیل لژاندر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c&=\pi_\varphi\dot{\varphi}+\pi_{\varphi^\dagger}\dot{\varphi}^\dagger+\pi^{a,r}\dot{A}_a^r+\pi_{\psi_\rho}\dot{\psi}_\rho+\pi_{\psi^{\dagger\alpha}}\dot{\psi}_{\psi^{\dagger\alpha}}+\pi_{\chi_\rho}\dot{\chi}_\rho+\pi_{\lambda_\alpha}\dot{\lambda}_\alpha+\pi_{N^r}\dot{N}^r-\mathcal{L}\\ &=\frac{1}{4}G^{ij,r}G_{ij}^r-\frac{1}{2}k\varepsilon^{oij}A_0^r\partial_iA_j^r-\frac{1}{2}k\varepsilon^{0ij}A_i^r\pi_j^r-A_0^r\partial_i\pi^{i,r}-\frac{1}{2}\pi^{i,r}\pi_i^r-f^{rsu}\pi^{i,r}A_0^sA_i^u-\frac{1}{8}k^2A_i^uA^{i,u}+iA_0^r\pi_{\psi_\rho}T^r\psi_\rho\\ &+\pi_{\varphi^\dagger}\pi_\varphi+iA_0^r(\pi_\varphi T^r\varphi-\pi_{\varphi^\dagger}T^r\varphi^\dagger)+iA_0^r\pi_{\lambda_\rho}T^r\lambda_\rho+iA_0^r\pi_{\chi_\rho}T^r\chi_\rho+\frac{1}{2}\pi_{N^r}\pi_{N^r}+iA_0^r\pi_{N^s}T^rN^s-i\psi^{\dagger\alpha}(\gamma^j)_\alpha^\rho D_j\psi_\rho-(D^j\varphi)^\dagger D_j\varphi\\ &-\frac{1}{2}i\lambda^\alpha(\gamma^j)_\alpha^\rho D_j\lambda_\rho-\frac{1}{2}i\chi^\alpha(\gamma^j)_\alpha^\rho D_j\chi_\rho-\frac{k}{2}\lambda^{\alpha,r}\lambda_{\alpha,r}-\frac{k}{2}\chi^{\alpha,r}\chi_{\alpha,r}-\frac{1}{2}(D^jN^r)D_jN^r+U(\varphi,\varphi^\dagger,\psi,\psi^\dagger,\lambda,\chi,N)\end{aligned} \tag{۴}$$

هامیلتونی کل با افزودن قیود اولیه به همراه ضرایب نامعین لاگرانژی به هامیلتونی کانونیک بدست می‌آید:

$$H_T=\int_V dx\,(\mathcal{H}_c+\eta_1^r\Gamma_1^r+\eta_2^\rho\Gamma_2^\rho+\eta_3^\alpha\Gamma_3^\alpha+\eta_4^\alpha\Gamma_4^\alpha+\eta_5^\rho\Gamma_5^\rho), \tag{۵}$$

ηها ضرایب نامعین لاگرانژ هستند. در نهایت با باز تعریف قیودبه چهار قید نوع دوم زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned}&\Theta_1^\rho=\pi_{\psi_\rho}-i\psi^{\dagger\alpha}(\gamma^0)_\alpha^\rho\approx 0, \qquad \Theta_2^\alpha=\pi_{\psi^{\dagger\alpha}}\approx 0,\\ &\Theta_3^\rho=\pi_{\lambda_\rho}-\frac{1}{2}i\lambda^\alpha(\gamma^0)_\alpha^\rho\approx 0, \qquad \Theta_4^\rho=\pi_{\chi_\rho}-\frac{1}{2}i\chi^\alpha(\gamma^0)_\alpha^\rho\approx 0,\end{aligned} \tag{۶}$$

ماتریس جبر قیود نوع دوم یک ماتریس ٤*٤ به صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta=\begin{bmatrix}0 & i\left(\gamma^0\right)_\alpha^\rho & 0 & 0\\ -i\left(\gamma^0\right)_\alpha^\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\left(\gamma^0\right)_\alpha^\rho & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i\left(\gamma^0\right)_\alpha^\rho\end{bmatrix} \tag{۷}$$

اعمال رهیافت BFT

با تعریف چهار میدان کمکی ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , ξ_4، در معادله‌ی اساسی BFT و انتخاب ماتریس‌های ω و χ به صورت زیر

$$\Delta_{\alpha\beta}+\chi_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma\lambda}\chi_{\beta\lambda}=0 \quad ; \quad \omega=-\Delta \quad ; \quad \chi=I \tag{۸}$$

با توجه به شرط مرزی قیود نوع اول در فضای فاز تعمیم یافته به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\tau_1=\pi_{\psi_\rho}-i\psi^{\dagger\alpha}(\gamma^0)^\rho_\alpha+\xi_1,\qquad \tau_2=\pi_{\psi^{\dagger\alpha}}+\xi_2,$$
$$\tau_3=\pi_{\lambda_\rho}-\frac{1}{2}i\lambda^\alpha(\gamma^0)^\rho_\alpha+\xi_3,\qquad \tau_4=\pi_{\chi_\rho}-\frac{1}{2}i\chi^\alpha(\gamma^0)^\rho_\alpha+\xi_4, \tag{۹}$$

هامیلتونی نیز در این فضای فاز تعمیم یافته برابراست با:

$$\tilde{H}=H^0+\tilde{H}^{(1)}+\tilde{H}^{(2)}. \tag{۱۰}$$

$$\tilde{H}^{(1)}=i(\gamma^0)^\rho_\alpha\left(\xi_1G_2^{(0)}-\xi_2G_1^{(0)}-\xi_3G_3^{(0)}-\xi_4G_4^{(0)}\right),\qquad \tilde{H}^{(2)}=i(\gamma^0)^\rho_\alpha\left(\xi_1G_2^{(1)}-\xi_2G_1^{(1)}-\xi_3G_3^{(1)}-\xi_4G_4^{(1)}\right), \tag{۱۱}$$

که توابع $G_\alpha^{(n)}$ به صورت زیر می‌باشند:

$$G_1^{(0)}=(iA_0^r\pi_{\psi_\rho}T^r+i\varphi^\dagger T^r\lambda^{\alpha,r}-\varphi^\dagger T^r\chi^{\alpha,r}-\frac{n-1}{2kn}v^2\psi^{\dagger\alpha}-\psi^{\dagger\alpha}N^rT^r)\delta(x-y),$$
$$G_2^{(0)}=(-i\left(\gamma^j\right)^\rho_\alpha D_j\psi_\rho-i\lambda^r_\alpha T^r\varphi-\chi^r_\alpha T^r\varphi-\frac{n-1}{2kn}v^2\psi_\alpha-N^rT^r\psi_\alpha)\delta(x-y),$$
$$G_3^{(0)}=(iA_0^r\pi_{\lambda_\rho}T^r-\frac{1}{2}i\lambda^\alpha\left(\gamma^j\right)^\rho_\alpha D_j-\frac{k}{2}(\lambda^{\alpha,r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\lambda_{\alpha,r})+f^{rsu}\chi^{\alpha,r}N^u-i(\psi^{\dagger\alpha}T^r\varphi-\varphi^\dagger T^r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_\alpha)+\frac{1}{2}\left(\gamma^j\right)^\rho_\alpha A_0^rT^r\lambda_\rho)\delta(x-y),$$
$$G_4^{(0)}=(iA_0^r\pi_{\lambda_\rho}T^r-\frac{1}{2}\left(\gamma^j\right)^\rho_\alpha(D_j\chi_\rho+\chi^\alpha D_j)-\frac{k}{2}(\chi^{\alpha,r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\chi_{\alpha,r})+f^{rsu}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\lambda^s_\alpha N^u-\psi^{\dagger\alpha}T^r\varphi-\varphi^\dagger T^r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_\alpha+\frac{1}{2}\left(\gamma^j\right)^\rho_\alpha A_0^rT^r\chi_\rho)\delta(x-y), \tag{۱۲}$$

$$G_1^{(1)}=(-i\xi_1(\gamma^0)^\rho_\alpha(i(\gamma^j)^\rho_\alpha D_j+\frac{n-1}{2kn}v^2+N^rT^r)-i\xi_3(\gamma^0)^\rho_\alpha\varphi^\dagger T^r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+i\xi_4(\gamma^0)^\rho_\alpha\varphi^\dagger T^r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right))\delta(x-y),$$
$$G_2^{(1)}=(-i\xi_2(\gamma^0)^\rho_\alpha(\frac{n-1}{2kn}v^2-N^rT^r)-\xi_3(\gamma^0)^\rho_\alpha T^r\varphi+i\xi_4(\gamma^0)^\rho_\alpha T^r\varphi)\delta(x-y),$$
$$G_3^{(1)}=(\xi_2(\gamma^0)^\rho_\alpha\varphi^\dagger T^r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+\xi_1(\gamma^0)^\rho_\alpha T^r\varphi+i\xi_3(\gamma^0)^\rho_\alpha(\frac{1}{2}i(\gamma^0)^\rho_\alpha D_j+k\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+(\gamma^0)^\rho_\alpha A_0^rT^r-i\xi_4(\gamma^0)^\rho_\alpha f^{rsu}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)N^u)\delta(x-y),$$
$$G_4^{(1)}=-i\xi_1(\gamma^0)^\rho_\alpha T^r\varphi-i\xi_3(\gamma^0)^\rho_\alpha f^{rsu}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)N^u-i\xi_4(\gamma^0)^\rho_\alpha(-i(\gamma^0)^\rho_\alpha D_j-k\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+(\gamma^0)^\rho_\alpha A_0^rT^r)\delta(x-y), \tag{۱۳}$$

در این مرحله یک تئوری کاملاً پیمانه‌ای داریم که قیود و هامیلتونی با انتخاب پارامترهای مناسب برای معادله‌ی اساسی BFT بدست آمده است.

نتیجه گیری

در این مقاله ساختار قیدی مدل چرن- سیمونز غیرآبلی ابرمتقارن مطالعه شده است. در بررسی مدل مورد نظر تعدادی قیود نوع دوم بدست می آید که با توجه به فرض دیراک این مدل غیرپیمانه ای است. سپس با استفاده از رهیافت BFT قیود نوع دوم به قیود نوع اول تبدیل می شود تا در نهایت مدلی با تقارن پیمانه ای بدست آید.

مراجع

[1] Heinz J Rothe, Kluas D Roth, "Classical and Quantum Dynamics of Hamiltonian Constraint Systems", Word scientific, (2010).
[2] P.A.M.Dirac: "*Lectures on Quantum Mechanics*", Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1964).
[3] Anderes. J. L; Bergman, P. G. Phys, Rev 83,10118(1951).
[4] M. Monemzadeh and A. Shirzad. Int. J. Mod . Phys. A, 18,5613-5625 (2003)
[5] S. J. Gates and H. Nishino, Phys. Leet. B 281, 72 (1992).
[6] Z. Hlousek and D. Spector, Nucl. Phys. B344, 763 (1990).
[7] Ch. Lee, K, Lee, and H. Min, Phys.Lett. B 252, 79 (1990).