ستاره‌های نوترونی چرخان

سعید دودانگه [1]، حمیدرضا مشفق [2]

[1] دانشگاه تهران

[2] دانشگاه تهران

چکیده

ستاره‌های نوترونی در کهکشانها در حال چرخش به دور خود هستند. هدف این مقاله این است که تأثیر چرخش برجرم را مورد بررسی قرار دهد. این بررسی با استفاده از نسبیت عام و خواص مربوط به متریک به صورت اختلالی در سرعتهای غیر نسبیتی انجام می‌شود. بعد از بدست آوردن معادلات مربوط به جرم ستاره چرخشی، با استفاده از معادله حالت‌های مختلف،جرم محاسبه و سپس جوابهای معادله حالتها مختلف مقایسه می‌شوند.

وقتی که ستاره متلاشی می شود طبق اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای $(L = I\omega)$ سرعت زاویه‌ای ستاره‌ی نوترونی که از متلاشی شدن آن ستاره درست شده است افزایش می یابد. چرخش نیازمند شکستن تقارن کروی است، به همین دلیل معادلات متریک که برای ستاره‌های غیرچرخشی نوشته شده است در اینجا کاربرد ندارد؛ و باید معادلات متریک جدیدی نوشته شوند. فرضیاتی که برای این بررسی لازمند:۱–چرخش آرام: سرعت زاویه‌ای ستاره‌ی نوترونی (Ω) غیرنسبیتی است و به عنوان یک اختلال کوچک در نظر گرفته می شود. توجه کنید که درهمه‌ی روابط $C = G = 1$ است(سرعت نور و ثابت جهانی گرانش)[1],[2].۲–معادله حالت تک پارامتری است(p فشار و ϵ چگالی انرژی است).۳–تقارن محوری وانعکاسی: تقارن فقط محدود به شکل ستاره‌ی نوترونی است. ٤–چرخش یکنواخت: در اینجا چرخش فقط یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. اگرشعاع چرخشی ستاره(r)بر حسب شعاع غیرچرخشی(R)و توانهای Ω بسط داده شود:

$$r = R + \varepsilon(r,\theta) + O(\Omega^4) \qquad (1)$$

$\varepsilon(r,\theta)$: اختلاف شعاع ستاره‌ی چرخشی با ستاره‌ی غیر چرخشی. برای چرخشهای آهسته $\frac{\varepsilon(r,\theta)}{R} \ll 1$ است. اگر $\varepsilon(r,\theta)$ بر حسب چندجمله‌ایهای لژاندر دو جمله بسط داده می‌شود.

$$\varepsilon(r,\theta) = \varepsilon_0(r) + \varepsilon_2(r)P_2(\theta) \qquad (2)$$

اگر $\omega(r)$ سرعت زاویه‌ای دستگاه لخت موضعی باشد نیروی مرکزی که بر عناصر شاری روی ستاره عمل می‌کند باید از Ω مستقل باشد، بلکه به جای آن به اختلاف Ω و ω بستگی داشته باشد. کمیت $\bar{\omega}_{(r)}$ به صورت اختلاف این دو بیان می‌شود[3].

$$\bar{\omega}_{(r)} = \Omega - \omega \qquad (3)$$

معادله مربوط به $\bar{\omega}$ به صورت روبرو است([1],[3]):

$$\frac{1}{r^4}\frac{d}{dr}\left(r^4 j\frac{d\bar{\omega}}{dr}\right) + \frac{4}{r}\frac{dj}{dr}\bar{\omega} = 0 \qquad (4)$$

$$j(r) = \begin{cases} j(r) = e^{-(\lambda+\nu)/2} = e^{-\nu/2}\sqrt{1-\frac{2M}{r}}, & r < R \\ j(r) = 1 & , r \geq R \end{cases} \qquad \frac{d\nu}{dr} = \frac{M+4\pi r^3 p}{r^2\left[1-\frac{2M}{r}\right]} \qquad (5)$$

اگر معادله بالا برای داخل و خارج ستاره با دو شرط مرزی زیر حل شود تکانه‌زاویه‌ای (J) محاسبه می‌شود[4].

$$\left.\frac{d\varpi}{dr}\right|_{\substack{r=R\\ \text{داخل ستاره}}}=\left.\frac{d\varpi}{dr}\right|_{\substack{r=R\\ \text{خارج ستاره}}} \quad \text{و} \quad \varpi_{r\to\infty}=\Omega=0+B \implies J=\frac{8\pi}{3}\int_0^R r^4\frac{E+P}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}[\Omega-\omega]e^{-\frac{\nu}{2}}dr \quad (6)$$

جملات متریک به صورت روبرو نوشته می‌شود[1]:

$$ds^2=-e^{\nu(r,\theta)}dt^2+e^{\lambda(r,\theta)}dr^2+e^{\mu(r,\theta)}[r^2d\theta^2+r^2sin^2\theta(d\varphi-\omega dt)^2] \quad (7)$$

که جملات آن به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$e^{\lambda(r,\theta)}=e^{\lambda}\left[1+2\frac{m}{r-2M}\right]=e^{\lambda}\left[1+\frac{m_0(r)+m_2(r)P_2(\theta)}{r-2M}\right] \quad (8)$$

$$e^{\nu(r,\theta)}=e^{\nu}[1+2h]=e^{\nu}[1+2\big(h_0(r)+h_2(r)P_2(\theta)\big)] \quad (9)$$

$$e^{\mu(r,\theta)}=1+2k=1+2(\nu_2-h_2)P_2(\theta) \quad (10)$$

درعبارتهای بالا m، h و k بر حسب توابع هماهنگ کروی بسط داده شده‌اند. ازسایرجملات آنها صرف نظرشده است. توابع m_0، m_2، h_0، h_2 ، k_0 و k_2 توابع مجهولی هستند که باید پیدا شوند.$\nu(r,\theta)$ و $\lambda(r,\theta)$ توابعی برحسب پارامترهای r وθ هستند. ν و λ: توابعی هستند که معادلات آنها در ستاره‌های غیرچرخشی بدست‌آورده شده است. برای پیدا کردن توابع مجهول بالا باید به روشهای زیر عمل شود؛ پتانسیل شیمیایی برای یک ستاره‌ی نوترونی چرخان به صورت زیر نوشته می‌شود[5],[6],[7]؛ $\mu_c=\frac{E+p}{u^t}exp\left(-\int\frac{dE}{E+p}\right)=$ثابت (11)

در حالت تعادل این کمیت یک مقدار ثابتی است. μ_c را برحسب توانهای Ω بسط داده و درطرف دوم $u^t=-\frac{dt}{ds}$ نیز بسط داده می شود.

$$\mu_c=\mu\big(1+\gamma+O(\Omega^4)\big) \quad (12)$$

μ : مربوط به پتانسیل شیمیایی غیرچرخشی و γ ثابتی برحسب Ω^2 است. با بسط u^t و جایگذاری آن در 11 و با استفاده از رابطه 12 (l مرتبه توابع لژاندر است)[1]:

$$u^{t^{-1}}=e^{\frac{\nu}{2}}\left[1-\frac{1}{2}R^2\sin^2\theta(\Omega-\omega)^2e^{-\nu}+h_0+h_2P_2(\theta)-R\varepsilon\sin^2\theta(\Omega-\omega)^2e^{-\nu}\right] \quad (13)$$

$$l=0 \quad : \quad \gamma=p_0^*(r)+h_0(r)-\frac{1}{3}e^{-\nu(r)}r^2\varpi^2(r) \quad (14)$$

$$l=2 \quad : \quad 0=p_2^*(r)+h_2(r)+\frac{1}{3}e^{-\nu(r)}r^2\varpi^2(r) \quad (15)$$

$$p_0^*(r)=-\varepsilon_0(r)\frac{1}{E+p}\frac{dp}{dr} \qquad p_2^*(r)=-\varepsilon_2(r)\frac{1}{E+p}\frac{dp}{dr} \qquad p_{(r,\theta)}^*=-\varepsilon\left(\frac{1}{E+p}\frac{dp}{dr}\right) \quad (16)$$

p^* را عامل اختلالی فشار نامگذاری کرده‌اند. یکی ازمعادلات میدان درمعادلات نسبیت عام به صورت زیرنوشته می‌شود، G_t^{ϕ} برحسب Ω بسط داده می‌شود. در روابط زیر T_t^{ϕ} تانسور تکانه–انرژی است.

$$G_r^r=8\pi T_r^r \qquad G_t^t=8\pi T_t^t \qquad \Delta G_t^t=\delta G_t^t-8\pi\varepsilon\frac{dE}{dr} \quad (17)$$

با استفاده از بسط پتانسیل شیمیایی و بسط معادلات میدان بر حسب Ω [1]:

$$\frac{dm_0}{dr}=4\pi r^2\frac{dE}{dP}p_0^*(r)(E+p)+\frac{1}{12}j^2r^4\left(\frac{d\varpi}{dr}\right)^2-\frac{1}{3}r^3\left(2j\frac{dj}{dr}\right)\varpi^2 \quad (18)$$

$$-\frac{dp_0^*}{dr}+\frac{1}{12}\frac{r^4}{(r-2M)}j^2(\bar{\omega}_r)^2+\frac{1}{3}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^3j^2\bar{\omega}^2}{r-2M}\right)=4\pi\frac{(\epsilon+p)}{(r-2M)}r^2p_0^*+\frac{m_0r^2}{(r-2M)^2}\left(8\pi p+\frac{1}{r^2}\right) \quad (19)$$

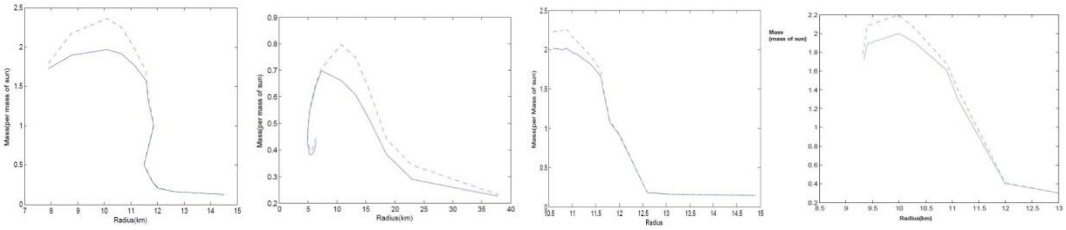
برای پیداکردن رابطه‌ی جرم وچگالی مرکزی مراحل زیر انجام می‌شود:۱- مقدارچگالی مرکزی انتخاب می‌شود.۲- $e^{\nu(r)}$ برای ستاره‌ی غیرچرخشی محاسبه می‌شود.۳- ازرابطه(4)، $\bar{\omega}$ پیدا می‌شود و سپس ازرابطه(6)، J محاسبه می‌شود.٤- سپس از روابط(18) و (19) با شرایط مرزی زیرمقدار m_0 و p_0^* حساب می‌شود[1].

$$r\longrightarrow 0 \qquad p_0^*(r)\longrightarrow\frac{1}{3}(j_c\bar{\omega}_c)^2r^2 \quad \text{و} \quad m_0(r)\longrightarrow\frac{4\pi}{15}(E_c+p_c)\left[\left(\frac{dE}{dP}\right)_c+2\right](j_c\bar{\omega}_c)^2r^4 \quad (20)$$

اندیس c نشان دهنده‌ی مرکز ستاره است. ٥-مقداراختلاف جرم یک ستاره‌ی چرخشی و غیرچرخشی از رابطه‌ی روبرو مشخص می‌شود.

$$m_0(r=R)=\delta M-\frac{J^2}{R^3} \quad \Longrightarrow \delta M=m_0(r=R)+\frac{J^2}{R^3} \qquad (21)$$

در شکل زیر نمودار جرم (برحسب جرم خورشید) و شعاع برحسب کیلومتر به ترتیب از راست به چپ برای ستاره غیرچرخشی (خطوط پیوسته) و ستاره‌ی چرخشی (خطوط متقاطع) برای معادله حالت AV18[9]،معادله حالت توماس-فرمی[10]، معادله حالت هریسون-ولر[1] و معادله حالت $\boldsymbol{V_\gamma}$ [8] نشان داده شده است.



نتیجه گیری

اگر به نمودار مربوط به جرم چرخشی و غیرچرخشی معادله حالتهای مختلف نگاه شود می‌توان فهمید که در أثر چرخش جرم ستاره چرخشی در مقایسه با ستاره‌ی غیرچرخشی در یک چگالی مرکزی یکسان، حدود ۱۰٪-۲۰٪ بیشتر است. در أثر چرخش، شعاع ستاره نیز افزایش می‌یابد، به عبارت دیگر حجم ستاره افزایش پیدا کرده است. افزایش جرم با افزایش حجم رابطه‌ی مستقیم دارد. در أثر افزایش حجم معادله حالت ماده‌ی مورد نظر تغییر می‌کند. این افزایش حجم باعث کاهش فشار شده واین کاهش فشار باعث کم شدن انرژی موجود در ماده می‌شود و این انرژی طبق روابط جرم-انرژی اینیشتین به جرم تبدیل می‌شود.

مرجع‌ها

1-J.B.Hratle, *Astrophysics*. **J.150** (1967) 1005.
2-Hartle, J., and Sharp, D. 1967, *Ap*.J., **147, 317**.
3-N.K.Glendenning and F.weber, *Phys.Rev*. Rev. **D50** (1994) 3836.
4-N. K. Glendenning, *Compact stars: nuclear physics, particle physics, and general relativity*, 2nd ed. New York: Springer, 2000.
5-J.B.Hartle and K.S.Thorne, *Astrophys*. **J.153** (1968) 807.
6-Tabuar, G., and Weinberg, **J.1961**, *Phys. Rev*., 122, 1342.
7-Boyer, R. 1965, Proc. *Cambridge Phil Soc*., **61,527**.
8-Brill, D., and Cohen, **J.1966**, *Phys. Rev*.,143,527.
9-M. Modarres , T. Pourmirjafari, H.R. Moshfegh. *Nuclear Physics A* **819** (2009) 27–45
10-H. R. Moshfegh ,M Ghazanfari Mojarrad(thermal properties of baryonic matter). *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **38 085102**(2011).