

محاسبه آنتروپی سیاهچاله‌ی پنج بعدی در نظریه ریسمان

قادر نجار باشی، سیده الهه حسن پور

دانشگاه محقق اردبیلی

چکیده

سیاهچاله ناحیه‌ای از فضا-زمان است که جرم در آن فشرده شده است. وجود سیاهچاله‌ها در نظریه نسبیت عام آلبرت اینشتین پیش بینی شده است. نظریه نسبیت عام پیش بینی می‌کند که یک جرم به اندازه کافی فشرده می‌تواند سبب تغییر شکل و خمیدگی فضا-زمان و تشکیل سیاهچاله شود. آنتروپی سیاهچاله مقدار آنتروپی است که بایستی برای یک سیاهچاله در نظر گرفت تا از دیدگاه ناظر خارجی، این سیستم از قوانین ترمودینامیک تبعیت کند. هاوکینگ نشان داد که در شرایط عمومی مساحت کل افق‌های رویداد هر مجموعه‌ای از سیاهچاله‌ها هرگز نمی‌تواند کاهش یابد حتی اگر با یکدیگر برخورد و در هم ادغام شوند. این نتیجه که امروزه به عنوان قانون دوم ترمودینامیک سیاهچاله‌ها شناخته می‌شود شباهت قابل توجهی با قانون دوم ترمودینامیک دارد که بیان می‌کند که آنتروپی کل سیستم هرگز کاهش نمی‌یابد. تصور می‌شد که سیاهچاله‌ها هم همچون اجسام کلاسیکی که در دمای صفر مطلق هستند، آنتروپی صفر دارند. پذیرش این تصور سبب نقض قانون دوم ترمودینامیک می‌شود زیرا با ورود ماده دارای آنتروپی به سیاهچاله بدون آنتروپی، آنتروپی کل در جهان به اندازه آنتروپی ماده‌ای که جذب سیاهچاله شده کاهش می‌یابد. از این رو بکنشتاین پیشنهاد کرد که یک سیاهچاله باید آنتروپی داشته باشد و آنتروپی آن با مساحت افق رویدادش متناسب باشد.

سیاهچاله می‌تواند حالت نهایی ستاره‌ی پرجرمی باشد که سوخت هسته‌ای آن که معمولاً فشار گرمایی و تابشی لازم برای حفظ تعادل در برابر خودگرانی را تأمین می‌کند تمام شده باشد، در این حالت ستاره انقباض می‌یابد تا شعاع آن به مقدار بحرانی $R \leq \frac{2GM}{C^2} \equiv R_S$ برسد. R_S را شعاع شوارتزشیلد می‌گویند. در این صورت مساحت سطح سیاهچاله کلاسیک با رابطه $A = 4\pi R_S^2$ بیان می‌شود. سازوکاری که هاوکینگ و بکنشتاین برای بدست آوردن آنتروپی سیاهچاله کلاسیک در نظر گرفتند این بود که سیاهچاله مثل کاواک است که دارای تابش گرمایی می‌باشد و دمای سیاهچاله با رابطه $T = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{4MG} = \frac{1}{8\pi MG}$ قابل اندازه گیری است. طبق قانون اول ترمودینامیک $dE = TdS$ است و از طرفی $E = MC^2$ رابطه جرم - انرژی اینشتین است. از این روابط می‌توان نتیجه گرفت که $dM = TdS$ است که با قرار دادن رابطه دما در $dM = \frac{1}{8\pi MG} dS$ بدست می‌آید و پس از انتگرال گیری رابطه آنتروپی برای سیاهچاله ایستا بدون بار کلاسیک $S = 4\pi M^2 G$ بدست می‌آید. از طرفی می‌دانیم که شعاع سیاهچاله شوارتزشیلد (کلاسیک ایستا) $r_S = 2MG$ است و مساحت افق رویداد $A = 4\pi(2MG)^2$ می‌باشد.

جای گذاری و محاسبات بسیار ساده رابطه آنتروپی بکنشتاین و هاوکینگ را می‌دهد که آنتروپی را برای سیاهچاله‌های کلاسیک چهار بعدی قابل محاسبه می‌کند.

$$S_{BH} = \frac{A}{4G} \quad (1)$$

آنتروپی بکنشتاین و هاوکینگ برای سیاهچاله‌هایی با بعد بالاتر توجیه کننده نیست. برای محاسبه آنتروپی سیاهچاله در پنج بعد احتیاج به معرفی نظریه جدیدی به نام نظریه ریسمان‌ها داریم. بر اساس نظریه ریسمان‌ها،

اگر یک ابر میکروسکوپ داشته باشیم و بتوانیم به دقت به قلب یک الکترون بنگریم، نه یک ذره نقطه‌ای، بلکه ریسمانی مرتعش را مشاهده خواهیم کرد که این ریسمان بسیار کوچک است، به اندازه طول پلانک برابر با 10^{-33} سانتی‌متر، میلیاردها میلیارد بار کوچک تر از یک پروتون است، بنابراین تمام ذرات زیراتمی به صورت نقطه‌ای دیده می‌شوند. در حقیقت اگر ریسمان را با شدت‌های مختلف به لرزه درآوریم، می‌توانیم آن‌را به هر کدام از ذرات زیراتمی شناخته شده تبدیل کنیم. به این ترتیب نظریه ریسمان‌ها می‌تواند به راحتی این موضوع را توضیح دهد که چرا تعداد ذرات اتمی تا به این حد زیاد است. بر طبق نظریه ریسمان‌ها، جهان دراصل دارای ده بعد بوده و تمام نیروها در آن از طریق ریسمان با یکدیگر یکپارچه شده اند. اما فرا فضای ده بعدی ناپایدار بود و شش تا از این ده بعد فشرده سازی شده اند و سرانجام چهار بعد باقی‌مانده در انفجار بزرگ انبساط یافتند. دلیل این که ما نمی‌توانیم ابعاد دیگر را بینیم این است که ابعاد آن‌ها بسیار کوچکتر از یک اتم است و بنابراین هیچ چیز نمی‌تواند به درون آن‌ها وارد شود. در نظریه ریسمان به راحتی می‌توان آنتروپی یک سیاهچاله را در پنج بعد حساب کرد. ما معمولاً در $D=10$ یعنی فضا - زمان ۱۰ بعدی کار می‌کنیم. اما به فشرده کردن بعضی بعدهای اضافی نیاز داریم که یک فضا- زمان پنج بعدی موثر بدست آید. هرگاه شعاع افق رویداد با طول ریسمان بنیادی یکسان شود آنگاه سیاهچاله به یک ریسمان تبدیل شده است. آنتروپی یک ریسمان تحریک شده با جرم و طول آن متناسب است. پس می‌توان آنتروپی را بر حسب جملات جرمی و ثابت گرانشی به صورت زیر نوشت:

$$S = m_B^{\frac{D-2}{D-3}} G_D^{\frac{1}{D-3}} \propto \frac{A}{4G_D} \quad (2)$$

رابطه (۲) آنتروپی یک سیاهچاله D بعدی است. ساختار پنج بعدی سیاهچاله ترکیبی از یک بعد دایره‌ای با شعاع R که با S^1 نشان داده می‌شود و یک چنبره چهار بعدی که با T^4 نشان داده می‌شود که هر یک مدهای پیچشی خاص خود را دارند.

ذرات نقطه‌ای، پوسته صفر بعدی نامیده می‌شوند. زیرا آن‌ها بی‌نهایت کوچک هستند و بعد ندارند. در این صورت یک ریسمان یک پوسته یک بعدی نامیده می‌شود، زیرا یک شیء یک بعدی است که با طولش تعیین می‌شود. D - پوسته یک تعمیمی از مفهوم پوسته است. D - پوسته‌ها در نظریه ریسمان مهم اند زیرا انتهای ریسمان‌های بنیادی را می‌توان به آن‌ها چسباند. سیاهچاله در واقع از دو ریسمان شکل گرفته است که یکی از آن دو یک ریسمان D_1 -پوسته است که حول S^1 می‌پیچد و مدهای پیچشی آن جرم مخصوص خود را دارند. دیگری در D_5 -پوسته است که آن نیز حول S^1 می‌پیچد و مدهای آن روی دایره T^5 کوانتیده می‌شود پس D_5 -پوسته دو مد دارد و هر یک از این دو مد جرم خود را دارند بنابراین $T^5 = T^4 \times S^1$ است. برای آنکه آنتروپی را حساب کنیم باید جرم مدهای هر ریسمان را که با شعاع آن مد متناسب است بدست آوریم که به کمک رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$r_i^2 = \frac{16\pi m G_5}{3\Omega_3} = \frac{g_s^2 L_s^8}{RV} m_i \quad (3)$$

R شعاع بعد دایره‌ای S^1 است و V حجم چنبره چهار بعدی می‌باشد. برای ریسمان D_1 -پوسته جرم m_1 جرم مدهای پیچشی حول دایره‌ای به شعاع R را می‌دهد و برای D_5 -پوسته دو مد وجود دارد اولی مدهای پیچشی حول بعد دایره‌ای و چنبره است که جرم m_2 را دارد $m_2 = \frac{Q_5 RV}{g_s L_s^6}$ و دومی مدهای کلوزا- کلین است $m_1 = \frac{Q_1 R}{g_s L_s^2}$

که حول بعد دایره‌ای می‌پیچد و جرم $m_3 = \frac{n}{R}$ را دارد. n تعداد مد های پیچشی است. هر یک از این جرم ها را در معادله (۳) قرار می‌دهیم و شعاع هر کدام از مد ها را بدست می آوریم. با کمک این سه شعاع مساحت سیاهچاله در پنج بعد به صورت زیر بدست می آید:

$$A = 2\pi^2 r_1 r_2 r_3 = 2\pi^2 \frac{g_s L_s^8}{RV} \sqrt{Q_1 Q_5 n} \quad (4)$$

برای محاسبه آنتروپی در پنج بعد $G_5 = \frac{(2\pi)^5 G_{10}}{RV} = (2\pi)^5 8\pi^6 g_s^2 L_s^8$ و رابطه (۴) را در $S = \frac{A}{4G_5}$

جای گذاری می کنیم تا رابطه آنتروپی را در نظریه ریسمان به صورت زیر بدست آوریم:

$$S = 2\pi \sqrt{Q_1 Q_5 n} \quad (5)$$

نتیجه گیری

آنتروپی یک سیاهچاله (نشان دهنده میزان اطلاعات درونی سیاهچاله) با مساحت سطح افق رویداد متناسب است. سطح فرضی افق رویداد، سیاهچاله را پنهان می‌کند و مکان غیر قابل بازگشت برای ماده و نورگرافتاده در آن را مشخص می‌کند. می‌توان اطلاعات سه بعدی ستاره‌ای را با استفاده از اطلاعات سیاهچاله (که با مرگ این ستاره تشکیل خواهد شد) در افق دو بعدی آن رمزگشایی کرد. با توجه به تناسب مساحت سیاهچاله با آنتروپی آن می‌توان گفت مقادیر اطلاعاتی که سطح بیرونی سیاهچاله را پوشش می‌دهند، باید با تعداد بیت‌هایی که داخل حجم جهان هستند، متناسب باشند زیرا آنتروپی نشان دهنده میزان اطلاعات درونی سیاهچاله است. بنابراین می‌توان گفت که اطلاعات ناشناخته سیاهچاله را قبل از ناپدید شدن آن، در دست خواهیم داشت. در واقع این یک درون‌بینی عمیق فیزیکی است.

مرجع ها

1. Bekenstein, J. 1974. Black holes and the second law. *Physical Review*. **D9**, 32922.
2. Hawking, S. W. 1975. Particle Creation by Black Holes. *Commun Math Phys*. **43**, 199.
3. Kaku, M. 2005. *Parallel worlds: a Journey Through Creation*, London: : University Oxford .
4. Maldacena, J. M.. 1997. Black holes and D-branes. *Department of Physics and Astronomy, Rutgers University Piscataway USA, NJ. 08855.*
5. Mc Mahon, D. 2009. *String Theory Demystified*. First edition, New York : McGraw-Hill Companies.
6. Susskind, L., Lindesay, J. 2005. *An introduction to Black Holes, Information, And The String Theory Revolution*. First edition, London: Cambridge University Press.
7. Becker, K., Becker, M., Schwarz, J.H. 2007. *String Theory and M-Theory*. Second edition, Texas: Texas A & M University.