رهیافت انتگرال مسیر فاینمن در بیت های کوانتومی ابررسانا

علی ایزدی راد، حسام زندی، مهدی فردمنش [1]

[1] دانشگاه صنعتی شریف ، آزمایشگاه ادوات ابررسانایی ، دانشکده مهندسی برق

چکیده

در این مقاله رهیافت جدید و متفاوتی برای بررسی فیزیک و تحول بیت های کوانتومی که با مواد ابررسانا ساخته می شود با روش انتگرال مسیر فاینمن که روشی مرسوم در نظریه میدان های کوانتومی است ارائه شده است.به واسطه این رهیافت ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع سیستم های کیوبیت های فاز ، بار و شار مورد بررسی و محاسبه قرار گرفته اند، ضریب افت تابع موج در بیت کوانتومی فاز به دست امده ست و در نهایت با محاسبه ی انتشارگر بیت های کوانتومی ، مساله تحول زمانی این سیستم های مورد بررسی قرار گرفته اند.

مقدمه

مساله ی محقق کردن بیت ها و گیت های کوانتومی در ابعاد وسیع آرزویی که از یک دهه گذشته در حال پیگیری است و یکی از پشنهاد های جدی و مطرح برای این کار استفاده از مواد ابررسانایی است که در سه طراحی متفاوت با نام های بیت های فاز ، بار وشار ابررسانا قابلیت استفاده از یک متغییر کوانتومی مناسب در هر یک از این المان ها وجود دارد . مساله وفاداری و پایداری بیت های کوانتومی از جمله مسائلی است که جهت تحقق صحیح الگوریتم ها از حالت نظری به پیاده سازی در دنیای واقعی باید حتما مورد تاکیید قرار بگیرد بنابراین تحلیل دقیق رفتار و تحول زمانی سیستم های مطرح شده امری ضروری است و در این مقاله تلاش شده است تا به آنالیز دقیق سیستم های کیوبیت ابررسانا با روش انتگرال مسیر که یک روش قابل اعتماد تر از روش های مرسوم قبلی است بپردازیم .

مدل اینستنتون

از آن جا که همیلتونی کیوبیت شار ابررسانا به صورت زیر قابل بیان است :

$$H = \frac{\hbar^2}{4E_c}\dot{\varphi}^2 + E_{J(1-cos\varphi)} + E\_L\frac{(\varphi-\varphi_e)^2}{2}$$

بنابراین با توجه به شکل پتناسیل متناظر با آن که برای φ های کوچک پتناسیلی به شکل پتناسیل شکست خود به خود تقارن و پتناسیل ذره ی هیگز پیدا خواهد کرد ، بنابراین استفاده از ایده هایی که در نظریه میدان های کوانتومی برای حل مساله ی تونل زنی شبه ذرات گلدستون در بین دو مینیم متقارن پتناسیل مفید به نظر می رسد، نحوه ی تونل زنی در دهه هفتاد میلادی توسط [1] به طور کیفی مورد بررسی قرار گرفته است.در این روش ذراتی که بین دو مینیم تونل می زنند ، اینستنتون نامیده می شود.مساله ای که به آن علاقه مند هستیم دامنه احتمال به صورت های زیر است

$$\langle -a\left|e^{-\frac{HT}{\hbar}}\right| -a\rangle = \langle a\left|e^{-\frac{HT}{\hbar}}\right|a\rangle$$

که بیانگر احتمال این است که در مدت زمان T ذره در مکان اولیه ی خود که در یکی از مینیمم های خود است دوباره وجود داشته باشد.روش انتگرال مسیر برای محاسبه ی این دامنه احتمال به کمک ما می آید.طبق نظریه انتگرال مسیر ، این مقدار دامنه احتمال متناظر با انتگرال روی همه مسیر هایی است که

$$\langle a\left|e^{-\frac{HT}{\hbar}}\right|a\rangle = U(a,0;a,T) = \int_{x_f=a}^{x_i=a}[\mathrm{Dx(t)}]e^{-\frac{S[x(t)]}{\hbar}}$$

که S[x(t)] مقدار کنش اقلیدسی است .برای محاسبه ی انتگرال مسیر از تقریب نیمه کلاسیک استفاده می کنیم ، به گونه ای که کنش را حول مسیر کلاسیک تا مرتبه دوم بسط می دهیم ، مسیر کلاسیک در شکل ۱ نشان داده شده است .با محاسبه ی معادله ی مسیر از رابطه ی اویلر لاگرانژ متوجه خواهیم شد که ذره در نزدیکی های دو مینیمم به

صورت نمایی به آن نزدیک می شود و با توجه به مقیاس زمانی می توان در اکثر لحظات ذرات در یکی از مینیمم ها تصور کرد و تنها در بازه های زمانی کوتاهی ذره به نقطه مقابل خود حرکت می کنند به همین خاطر جرالد توفت ، نام این ذرات را اینستنتون ، یعنی ذره های زمان گونه نامید.حال اگر زمان را به گونه ی زیر تقسیم کنیم

$$-\frac{T}{2} < t_n < \cdots < t_2 < t_1 < \frac{T}{2}$$

نتیجه خواهیم گرفت که دامنه ی احتمال به صورت زیر قابل بیان است

$$\left\langle -a \middle| e^{-\frac{HT}{\hbar}} \middle| -a \right\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \sum_{even\,n} \frac{\left(Ke^{-\frac{S_0}{\hbar}}T\right)^n}{n!} [1 + O(\hbar)]$$

که $\omega = V''(x = \pm a)$تعریف می شود و مقدار K مرتبط با محاسبه انتگرال مسیر با تقریب نیمه کلاسیک است که منجر به یک انتگرال گاوسی می شود که جواب آن به متناسب با ضرب ویژه مقدارهای یک عملگر دیفرانسیلی است. اگر S_0 را مقدار کنش برای مسیر کلاسیک که یک عدد مشخص برای هر پتانسیل خاص به دست خواهد آمد آن گاه خواهیم داشت

$$K = \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\det[-\partial_t{}^2 + \omega^2]}{\det[-\partial_t{}^2 + V''(x_c)]}}$$

با داشتن رابطه ای برای انتشارگر ، داشتن ویژه مقادیر انرژی کاری ساده خواهد بود ، به عنوان مثال انرژی حالت پایه که اکنون از حالت تبهگنی درآمده است عبارت خواهد شد

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}\hbar\omega \pm \hbar K\, e^{-\frac{S_0}{\hbar}}$$

کیوبیت فاز

در همیلتونی کیوبیت فاز ، جمله ی پتانسیل به شکل پتانسیل سکو مایل است و در کاربردهای آزمایشگاهی ، در یکی از مینیمم های موضعی پتانسیل حالت های صفر و یک کیوبیت را مستقر می کنند:

$$H = -E_C\left(\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\right) + E_J\cos\delta + \frac{\hbar}{2e} I_e\delta$$

خوشبختانه با تغییر مختصری در روند حل مدل اینستنتون برای کیوبیت شار ، انتشارگر و ویژه حالت های انرژی استخراج خواهند شد .بر خلاف حالت قبل، به جای حالت های پایدار ، حالت های شبه پایدار خواهیم داشت و به دلیل اثر تونل زنی توابع موج به مرور زمان ناپدید خواهند شد.محاسبات نشان خواهد داد که ویژه حالت انرژی حالت پایه قسمتی موهومی خواهد داشت که دلیل افت تابع موج بر حسب زمان خواهد بود رابطه ی ضریب افت، گاما ، با مقدار موهومی انرژی به صورت زیر خواهد بود

$$\mathrm{Im}E_0 = \Gamma = \hbar|K|e^{-\frac{S_0}{\hbar}}$$

در این محاسبه به ضریب ½ نیاز مند بودیم که به دلیل این خواهد بود که تنها مسیرهای مشخصی از انتگرال مسیر لازم است که وارد محاسبه شوند .به این دلیل که اگر انتگرالی با پارامتر حقیقی z در نظر بگیریم :

$$J = \int dz\,(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{S(z)}{\hbar}}$$

آن گاه ضریب مورد نظر ظاهر خواهد شد

$$Im\,J = \frac{1}{2} e^{\frac{S(1)}{\hbar}} |S''(1)|^{-\frac{1}{2}}$$

در نهایت انتشارگر در کیوبیت فاز به صورت زیر خواهد بود

$$U(x_m,0;x_m,t) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} e^{-\Gamma t}$$

کیوبیت بار

شکل پتانسیل در کیوبیت بار به شکل پتانسیل های پرودیک است و با توجه به روش اینستنون در این مساله نیز انتشارگر و ویژه مقادیر انرژی که در این جا پیوسته خواهد بود قابل محاسبه است

$$\left\langle \lambda_+ \middle| e^{-\frac{HT}{\hbar}} \middle| \lambda_- \right\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\bar{n}!}\left(\mathrm{K}e^{-\frac{S_0}{\hbar}}\right)^{n+\bar{n}} \delta_{n-\bar{n}-\lambda_+-\lambda_-}$$

که به شکل ساده تری قابل نوشتن است که در اینجا از ارائه آن خودداری می کنیم ، همچنین با این ایده مشاهده خواهیم کرد که

$$\mathrm{E}(\theta) = \frac{1}{2}\hbar\omega + 2\hbar\mathrm{K}\cos\theta e^{-\frac{S_0}{\hbar}}$$

که متغییر θ کمیتی پیوسته و دلخواه است.

تحول زمانی و گیت های کوانتومی

همان گونه که در مقدمه ذکر شد مهم ترین علت توجه ما به روش انتگرال مسیر در تابع زمان بودن رهیافت در حالت کلی است. به گونه ای که در نگاه کنونیکال در کوانتوم مکانیک ، اختلال وابسته به زمان و مستقل از زمان به کلی متفاوت تلقی می شوند، اما در این روش ، برای سیستم های کوانتومی ما که عملا باز هستند و همیلتونی وابسته به زمان دارند این رهیافت کاملا مناسب می رسد با استفاده از لم زیر می توانیم انتشارگر برای هر زمان و مکانی را استخراج کنیم

$$\mathrm{U}(x_f,t_f;x_i,t_i) = e^{\frac{iS(x_f,t_f;x_i,t_i)}{\hbar}}\mathrm{U}(0,t_f;0,t_i)$$

بنابراین با استفاده از این لم و روابطی که میان انتشارگر و همیلتونی سیستم وجود دارد می توانیم درایه های ماتریس همیلتونی را به طور صریح تا تقریب نیمه کلاسیک داشته باشیم :

$$\langle \mathrm{m}|\mathrm{H}(t)|\mathrm{n}\rangle = \int\int dxdy\ \langle \mathrm{m}|\mathrm{x}\rangle\langle \mathrm{x}|\mathrm{H}(t)|\mathrm{y}\rangle\langle \mathrm{y}|\mathrm{n}\rangle =$$

$$\int\int dxdy\psi^*{}_m(x)i\hbar\left[-\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}\left(x_f P_f\right) + \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{i\omega}{2}-\Gamma\right]\right]\psi^*{}_n(y)$$

اهمیت دانستن درایه های ماتریس همیلتونی از این جهت است که با اعمال منبع خارجی که معمولا منبع جریان است می توان به کیت کوانتومی دلخواه دست یافت .

نتیجه گیری

در این مقاله جملات تصحیحی به ویژه مقادیر انرژی در حالت پایه و تراز های برانگیخته تا دقت مرتبه اول ثابت پلانک محاسبه شدند و انتشارگر و تحول زمانی سیستم در حضور منابع وابسته به زمان خارجی به دست آمد و نمایش مناسبی از درایه های ماتریس همیلتونی جهت استفاده در طراحی گیت های کوانتومی ارائه شد

مرجع ها

1. C.Coleman, Aspect of symmetry: selected Erice Lectures of Sidney Coleman, 1985

۲. J.Zinn-Justin, Path Integrals in Quantum Mechanis ,Oxford ,1993..