واکنش تابشی در فضا – زمان تخت ٤ بعدی مبتنی بر تقارن پوانکاره

سروش زمانی مقدم [۱]، پدرام یعقوبی [۲]

[۱و۲] دانشگاه کاشان

چکیده

در این مقاله مسئله خودکنش ذره‌ی نقطه‌ای را بررسی می‌کنیم که در فضا – زمان تخت ٤ بعدی به صورت آزادانه حرکت می‌کند. به طور خاص با استفاده از پایستگی تکانه – انرژی و تکانه زاویه‌ای، معادله لورنتس – دیراک در ٤ بعد فضا – زمانی را محاسبه خواهیم کرد. در نهایت می‌توان مطمئن شد که معادله معروف Teitelboim برای چهار – تکانه یک ذره باردار نقطه‌ای و نیز معادله لورنتس – دیراک از تراز نمودن معادلات انرژی – تکانه و تکانه زاویه‌ای قابل حصول هستند [8]. در این مقاله $\eta^{\mu\upsilon}=(-,+,+,+)$ است.

در هنگام کار با مدل‌هایی که شامل ابعاد بالاتر هستند [۱۰] باید به بررسی نظریه میدان در ابعاد بالاتر و مخصوصا شیوه حل مسائل تابش و خودکنش در این ابعاد بپردازیم. در مسیر بررسی بازبهنجارش پذیری الکترودینامیک کلاسیک پوانکاره – ناوردا در ابعاد بالاتر از ٤ بعد، به عنوان اولین قدم به استخراج معادله لورنتس – دیراک در ٤ بعد فضا – زمانی با استفاده از پایستگی تکانه – انرژی و تکانه زاویه ای می‌پردازیم.

بر اساس یافته‌های گذشته [۱] که از دیدگاه دیراک [۲] نشأت گرفته است، در الکترودینامیک کلاسیک ذره نقطه‌ای باردار که در فضا – زمان تخت ٤ بعدی به صورت آزادانه حرکت می‌کند، پتانسیل برداری را می‌توان به فرم $A^{\mu}_{ret}=1/2\left(A^{\mu}_{ret}+A^{\mu}_{adv}\right)+1/2\left(A^{\mu}_{ret}-A^{\mu}_{adv}\right)$ نوشت که جمله $1/2\left(A^{\mu}_{ret}+A^{\mu}_{adv}\right)$ در همسایگی‌های بسیار نزدیک به جهان خط، تکین است و پس از اعمال رهیافت [۱] به خودکنشی نامتناهی منتج می‌شود. در حالی که قسمت عادی $1/2\left(A^{\mu}_{ret}-A^{\mu}_{adv}\right)$ به خاطر ارضاء نمودن معادله موج همگن می تواند به صورت یک میدان تابشی آزاد تفسیر شده و به نیروی واکنش تابشی استاندارد منتهی شود. در ٤ بعد، جرم موجود در انتگرال کنش، خودکنش نامتناهی را طی فرایند بازبهنجارش جذب کرده و به جرم سکون موثر تبدیل می‌شود.

از طرفی بر خلاف مرجع [۱] که با معادلات حرکت سر و کار داشت، در مرجع [۲و۳] با محاسبه شار انرژی – تکانه و اضافه نمودن یک عبارت مناسب[1]، نیروی واکنش تابشی محاسبه شده است. در این مقاله با بهره‌گیری از همین شیوه و البته با استفاده از مقادیر پایسته متناظر با ناوردایی نظریه تحت تبدیلات پوانکاره، نیروی واکنش تابشی در ٤ بعد فضا – زمانی را محاسبه خواهیم کرد. در واقع با این کار مسئله بازبهنجارش پذیری را به مسئله ناوردایی پوانکاره یک سیستم بسته از ذره و میدان تبدیل نموده‌ایم.

کنش شناخته شده برای سیستمی شامل یک ذره باردار نقطه‌ای و میدان الکترومغناطیسی آن عبارت است از [۳] :

$$S_{total}=S_{particle}+S_{interaction}+S_{field} \tag{۱}$$

$$S_{field}=-\frac{1}{8\pi}\int d^4x F^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon} \tag{۲}$$

$$S_{particle}=-m\int d\tau\sqrt{-\dot{z}^2}$$

$$S_{interaction}=e\int d\tau A_{\mu}\dot{z}^{\mu}$$

در این معادلات جهان خط ذره با تابع $z^{\mu}(\tau)$ توصیف می‌شود و τ ویژه زمان است. به علاوه $\dot{z}^{\mu}(\tau)=dz^{\mu}(\tau)/d\tau$. کنش معرفی شده تحت تبدیلات پوانکاره ناوردا است که طبق قضیه نوتر می‌توان از این خاصیت تقارنی قوانین پایستگی را استخراج کرد.

[1] Schott term

وردش کنش نسبت به متغیرهای میدان و حل معادلات ماکسول حاصل برای منبع نقطه‌ای، پتانسیل‌های لینارد – ویشرت را می‌دهد که با جایگزینی آن‌ها در قوانین پایستگی، نتیجه به صورت جملاتی شامل متغیرهای ذره بازنویسی می‌شود.

به این ترتیب مولفه‌های انرژی – تکانه‌ای که میدان الکترومغناطیسی حامل آن می‌باشد به فرم زیر است :

$$p^{\upsilon}_{em}(\tau)=P\int_{\Sigma}d\sigma_{\mu}T^{\mu\upsilon} \qquad (۳)$$

که $d\sigma_{\mu}$ المان برداری سطح، روی سطح فضا گونه Σ است. نماد P در معادله (۳) مقدار اصلی انتگرال تکین را مشخص می‌کند که از طریق برداشتن یک کره با شعاع ε به مرکز ذره از داخل Σ و میل دادن آن به $\varepsilon\to 0$ تعریف می‌شود.

تانسور تکانه زاویه ای میدان الکترومغناطیسی را نیز می‌توان به فرم زیر نوشت [٤] :

$$M^{\mu\upsilon}_{em}(\tau)=P\int_{\Sigma}d\sigma_{\alpha}\left(x^{\mu}T^{\alpha\upsilon}-x^{\upsilon}T^{\alpha\mu}\right) \qquad (٤)$$

با استفاده از شکل کلی پتانسیل لینارد – ویشرت در D بعد فضا – زمانی [۱۱] :

$$A_{\mu}=\left(\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r}\frac{d}{du}\right)^{(D-4)/2}e\frac{u_{\mu}(u)}{r} \qquad (۵)$$

و همین‌طور بهره‌گیری از مختصات مرسوم تاخیری [٥و٦] برای فضا – زمان تخت که برای انتگرال‌گیری‌های (۳) و (٤) مناسب است، می‌توانیم مقدار شار تکانه و تکانه زاویه ای میدان الکترومغناطیسی را از میان جهان لوله‌ای با شعاع ثابت r که جهان خط ذره را در بر گرفته است، محاسبه کنیم [۷].

در این جا r فاصله بین x و $z^{\mu}(u)$ در چارچوب لورنتسی است که به طور لحظه‌ای با ذره حرکت می‌کند[۲] و آن را فاصله تاخیری بین نقطه مشاهده میدان و ذره می‌نامند.

با استفاده از معادله (۵) و رابطه $F^{\alpha\beta}=\partial^{\alpha}A^{\beta}-\partial^{\beta}A^{\alpha}$، تانسور انرژی – تکانه را خواهیم یافت. هم انرژی – تکانه و هم تکانه زاویه‌ای که میدان لینارد – ویشرت حامل آن است شامل دو بخش کاملا متفاوت هستند : الف) بخش مقید که به طور مداوم به ذره وابسته است و با آن حمل می‌شود؛ ب) بخش تابشی که خود را از ذره جدا نموده و موجودیتی مستقل می‌یابد[۸]. بخش مقید واگرا و بخش تابشی متناهی است.

با مرتب‌سازی نتایج و توجه به این موضوع که مرتبه r^{-2} مربوط به تانسور تکانه – انرژی، نشان‌دهنده بخش تابشی است، خواهیم داشت :

$$P^{\mu}=p^{\mu}_{particle}+\frac{2}{3}e^{2}\int_{-\infty}^{\tau}du\left(a^{\alpha}a_{\alpha}\right)u^{\mu}(u) \qquad (۷)$$

در این جا $a^{\alpha}=du^{\alpha}/du$ مولفه αام شتاب است. همچنین برای تکانه زاویه‌ای خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}M^{\mu\upsilon}&=z^{\mu}(\tau)p^{\upsilon}_{particle}-z^{\upsilon}(\tau)p^{\mu}_{particle}\\&+\frac{2}{3}e^{2}\int_{-\infty}^{\tau}du\left(a^{\alpha}a_{\alpha}\right)\left[z^{\mu}(u)u^{\upsilon}(u)-z^{\upsilon}(u)u^{\mu}(u)\right]\\&+\frac{2}{3}e^{2}\int_{-\infty}^{\tau}du\left[u^{\mu}(u)a^{\upsilon}(u)-u^{\upsilon}(u)a^{\mu}(u)\right]\end{aligned} \qquad (۸)$$

با مشتق گیری از معادله (۷) نسبت به زمان داریم :

$$\dot{p}^{\mu}_{particle}(\tau)=-\frac{2}{3}e^{2}(a\cdot a)u^{\mu}(\tau) \qquad (۹)$$

حال با مشتق‌گیری از معادله (۸) نسبت به زمان و استفاده از معادله (۹)، رابطه‌ی بیان‌کننده وابستگی چهار تکانه ذره به سرعت و شتابش را به صورت زیر می‌یابیم :

---

[2] MCLF : Momentarily Comoving Lorentz Frame

$$u \wedge p_{particle} = -\frac{2}{3}e^2 u \wedge a \qquad (۱۰)$$

که در آن نماد $\wedge$ بیانگر ضرب خارجی[۳] است. معادله‌ای به فرم :

$$p^{\mu}_{particle} = mu^{\mu} - \frac{2}{3}e^2 a^{\mu} \qquad (۱۱)$$

پاسخ مناسبی برای معادله (۱۰) است که در آن وابستگی چهار تکانه به سرعت و شتاب ذره باردار مشهود است.

با توجه به این که $u \cdot a = 0$ و $u \cdot u = -1$، ضرب نرده‌ای چهار سرعت ذره و مشتق اول زمانی چهار تکانه آن برابر است با :

$$\dot{p}_{particle} \cdot u = \frac{2}{3}e^2 a \cdot a \qquad (۱۲)$$

از طرف دیگر داریم :

$$p_{particle} \cdot a = -\frac{2}{3}e^2 a \cdot a \qquad (۱۳)$$

بنا بر این با استفاده از معادلات (۱۲) و (۱۳) خواهیم داشت :

$$\frac{d}{d\tau}\left(p_{particle} \cdot u\right) = 0 \qquad (۱٤)$$

با توجه به این که حاصل ضرب چهار تکانه و چهار سرعت همان جرم سکون ذره را به ما می‌دهد [۲]، در واقع معادله (۱٤) بیانگر ثابت بودن جرم بازبهنجارش شده ذره نسبت به زمان است [۹].

نتیجه گیری

همانطور که از روند محاسبات می‌توان نتیجه گرفت، معادله (۱۱) همان معادله معروف Teitelboim برای چهار تکانه یک ذره باردار نقطه‌ای است و مشتق آن نسبت به زمان بیانگر معادله لورنتس - دیراک برای چنین ذره‌ای می‌باشد که تنها با استفاده از تراز معادلات مربوط به چهار تکانه و تکانه زاویه‌ای کلی سیستم متشکل از ذره و میدان الکترومغناطیسی‌اش به دست آمده است [۸]. به نظر می‌رسد از این روند بتوان برای محاسبه معادله لورنتس - دیراک در ابعاد زوج بالاتر نیز استفاده نمود و امکان بازبهنجارش پذیری نظریه الکترودینامیک کلاسیک را برخلاف آنچه در مرجع [۱] ذکر شده بررسی نمود.

مرجع‌ها

[۱] D. V. Gal'tsov, *Phys. Rev. D* **66**, 025016 (2002)
[۲] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. A* **167**, 148 (1938)
[۳] B. P. Kosyakov, *Theor. Math. Phys.* **199**, 493 (1999)
[۴] F. Rohrlich, Classical Charged Particles, Redwood City, CA: Addison-Wesley (1990)
[۵] E. Poisson, *An introduction to the Lorentz-Dirac equation*, arXiv : gr-qc/9912045
[۶] E. Newman, T. Unti, *J. Math. Phys.* **4**, 1467 (1963)
[۷] H. J. Bhabha, *Proc. R. Soc. A* **172**, 384 (1939)
[۸] C. Teitelboim, *Phys. Rev. D* **1**, 1572 (1970)
[۹] B. P. Kosyakov, *Phys. Part. Nucl.* **34**, 808 (2003)
[۱۰] A. Morozov, A. Mironov, *JETPLett.* **85**, 6-11 (2007)
[۱۱] Y. Yaremko, *J. Phys. Stud.* v. 8, **No. 3** (2004) p. 203_210

[3] Wedge product