

مقدمه‌ای بر آنتروپی در همتیدگی (در هولوگرافی)

علی ملباشی

فهرست مطالب

۱	آنتروپی در همتیدگی در نظریه میدان‌های کوانتمی
۲	۱.۱ روش زمان حقیقی
۶	۲.۱ روش زمان اقلیدسی
۱۰	۲ آنتروپی در همتیدگی در هولوگرافی
۱۰	۱.۲ یادآوری فضای AdS
۱۱	۲.۲ پیشنهادی ریو-تاکایاناگی
۱۸	۳.۲ اثبات نسخه‌ی ریو-تاکایاناگی برای نواحی کروی
۱۹	۴.۲ نسخه‌ی هموردای آنتروپی در همتیدگی هولوگرافیک

دیباچه

این نوشتار برای ارائه در مدرسه‌ی یک روزه‌ی «آنتروپی در همتیدگی از دیدگاه هولوگرافی» در دانشگاه شهید بهشتی در ۱۳ آبان ۱۳۹۵ تهیه شده است. فصل اول مقدمه‌ای است بر همتیدگی در نظریه میدان‌های کوانتمی و فصل دوم آن درخصوص معرفی آنتروپی در همتیدگی هولوگرافیک است. این نوشتار صرفاً بر مبنای زمان‌بندی این مدرسه‌ی یک روزه نگاشته شده لذا نسخه‌ی فعلی آن درسامه‌ی جامعی برای مرور مطالب موجود در ادبیات دو موضوع فوق‌الذکر به حساب نمی‌آید.

۱ آنتروپی در همتیدگی در نظریه میدان‌های کوانتمی

در چهارچوب نظریه میدان‌های کوانتمی انگیزه‌های متفاوتی برای مطالعه‌ی مفهوم در همتیدگی و به‌طور مشخص آنتروپی در همتیدگی وجود دارد. به لحاظ تاریخی اولین انگیزه‌ای که توجه برخی را به آنتروپی در همتیدگی در حد پیوستار جلب کرد این سوال بود که آیا آنتروپی سیاه‌چاله از نوع آنتروپی در همتیدگی میان درجات آزادی درون و برون افق رویداد است؟ علی‌رغم تلاش‌هایی که تاکنون برای پاسخ به این سوال انجام شده اما به‌نظر می‌رسد هنوز به این سوال جواب دقیقی داده نشده است. از سوی دیگر ارتباط میان مفهوم از دست رفتن اطلاعات در سیاه‌چاله‌ها و (آنتروپی) در همتیدگی نیز از دیگر سوالات مربوط در این حوزه است. همچنین برای فهم حدهایی که روی آنتروپی وجود دارند مثل حد بکنشتین، حد بوسو و حتی قانون دوم (ترمودینامیک) تعمیم‌یافته به فهم آنتروپی در همتیدگی در چهارچوب نظریه میدان‌های کوانتمی نیاز است.

از منظر نظریه اطلاعات کوانتومی مطالعه‌ی مفهوم درهم‌تنیدگی در چارچوب نظریه میدان‌های کوانتومی اهمیت دارد چرا که الگوریتم‌های عددی موجود برای یافتن حالت پایه‌ی سامانه‌های بس-ذره‌ای در چارچوب شبکه‌های تانسوری مثل DMRG و MERA با مفهوم درهم‌تنیدگی در حد پیوستار ارتباط مستقیم دارند.

از سوی دیگر بعد از کشف دوگانی AdS/CFT و اضافه شدن پیشنهادی ریو-تاکایاناگی به عنوان بخش مهمی از واژه‌نامه‌ی این دوگانی سوالات مهمی پیشرو قرار گرفته‌اند که از جمله‌ی آنها عبارتند از ارتباط درهم‌تنیدگی و سازوکار دوگانی و امکان توصیف داخل افق رویداد به وسیله‌ی آنتروپی درهم‌تنیدگی.

از سوی دیگر مطالعه‌ی سامانه‌های خارج از تعادل ترمودینامیکی، فرایند دما دار شدن و فرونشانی‌های کوانتومی نشان می‌دهد که شاید دینامیک آنتروپی درهم‌تنیدگی و سایر سنج‌های درهم‌تنیدگی کوانتومی کمیت‌های مناسبی برای توصیف این پدیده‌ها باشند.

مطالعه‌ی آنتروپی درهم‌تنیدگی در چارچوب نظریه میدان‌های کوانتومی و فیزیک ماده چگال تاکنون بسیار آموزنده بوده است. به عنوان مثال در این چارچوب می‌توان به صورت مستقل اثباتی برای قضیه‌ی c ارائه کرد و همچنین با استفاده از سنج‌های مختلفی از درهم‌تنیدگی می‌توان برخی گذار فازهای سامانه‌های مختلف را توضیح داد و همچنین می‌توان فازهای توپولوژیک را از سایر فازها تشخیص داد. برخی معتقدند که با استفاده از درهم‌تنیدگی می‌توان به فهم عمیق‌تری از قضایای c رسید و می‌توان در درازمدت امیدوار بود که توصیف بدیعی از نظریه میدان‌های کوانتومی بر حسب کمیت‌های غیرموضعی مانند آنتروپی درهم‌تنیدگی کشف شود.

۱.۱ روش زمان حقیقی

آنتروپی درهم‌تنیدگی آنتروپی است که به ناحیه‌ای از فضا (معمولاً با حجم محدود) نسبت داده می‌شود.^۱ باید توجه داشت که در این حوزه فارق از اینکه منشا این آنتروپی افت و خیزهای کوانتومی حول یک حالت کوانتومی باشد یا افت و خیزهای گرمایی به آنتروپی درهم‌تنیدگی گفته می‌شود. با این حساب در ادبیات مرتبط با این موضوع آنتروپی گرمایی بخشی از آنتروپی درهم‌تنیدگی به حساب می‌آید.

روش طبیعی نسبت دادن آنتروپی به ناحیه‌ی مشخصی از فضا این است که ابتدا از روی حالت کلی سیستم که با ρ نمایش می‌دهیم حالتی منتسب به ناحیه‌ی مشخصی از فضا تعریف کنیم و سپس آنتروپی متناظر با این حالت را محاسبه کنیم. حالت منتسب به ناحیه‌ی مشخصی از فضا که آن را با A مشخص می‌کنیم را ماتریس چگالی کاهش یافته می‌نامیم که به صورت

$$\rho_A = \text{Tr}_{\bar{A}}[\rho] \quad (1)$$

تعریف می‌شود. حال می‌توان آنتروپی درهم‌تنیدگی را به صورت

$$S(A) = -\text{Tr}_A[\rho_A \log \rho_A]$$

تعریف کرد. نکته‌ی مهمی که در مورد این کمیت باید به خاطر سپرد این است که ورودی‌های این کمیت حالت سیستم ρ و همچنین نوع تقسیم‌بندی فضای هیلبرت

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}$$

که در این حالت متناظر با هندسه‌ی ناحیه‌ی فضایی A است می‌باشند.

^۱ این ناحیه به صورت عمومی باید ناحیه‌ای فضاگونه باشد ولی برای سادگی در این نوشتار آنرا روی برش زمان-ثابتی از خمینه‌ای که نظریه میدان روی آن تعریف شده در نظر می‌گیریم.

ماتریس چگالی کاهش یافته ρ_A فقط به فیزیک ناحیه A بستگی دارد به این معنی که به ازای هر عملگر O_A که در این ناحیه تعریف شده است مقدار انتظاری این عملگر از $\langle O_A \rangle$ به دست می آید و فقط یک ماتریس چگالی کاهش یافته یکتا وجود دارد که به ازای همه عملگرهای

$$\text{Tr}[\rho_A O_A] = \langle O_A \rangle$$

را نتیجه می دهد. لذا اگر مقدار انتظاری همه عملگرهایی که در این ناحیه تعریف می شوند مفروض باشد آنگاه می توان ماتریس چگالی کاهش یافته این ناحیه را به صورت یکتا تعیین کرد.^۲

یک روش مشخص برای محاسبه ماتریس چگالی کاهش یافته بنا به بحث فوق استفاده از توابع همبستگی تمامی عملگرهایی است که در ناحیه تعریف شده اند. این روش اولین بار توسط پسچل در [۱] انجام شده است. در ادامه این بخش پس از مرور این روش برای خانواده خاصی از مدل های بسیار ساده نتایج آن را برای نظریه میدان نرده ای تحلیل خواهیم کرد. پیش از مرور این روش باید توجه داشته باشیم که از آنجایی که بحث در چارچوب نظریه میدان های کوانتومی است و تعداد درجات آزادی بر واحد حجم واگراست، برای انجام محاسبات مشخصی ابتدا نظریه را روی یک شبکه تعریف می کنیم و پس از انجام محاسبات ثابت شبکه را به سمت صفر میل می دهیم. در این بخش نظریه را روی شبکه مربعی (در بعد دلخواه) تعریف می کنیم. بدیهی است دست آخر کمیت هایی مورد توجه خواهند بود که از این تکنیک محاسباتی مستقل باشند. در این بحث به آنچه مستقل از نحوه عادی سازی^۳ نظریه باشد جهانشمول^۴ گفته می شود.

برای سادگی یک نظریه میدان نرده ای آزاد را در نظر می گیریم که همیلتونی آن به صورت

$$H = \frac{1}{4} \int d^{d-1}x \left[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right] \quad (2)$$

است و

$$[\phi_i, \pi_j] = i\delta_{ij} \quad , \quad \langle \phi_i \phi_j \rangle = X_{ij} \quad , \quad \langle \pi_i \pi_j \rangle = P_{ij} \quad , \quad \langle \phi_i \pi_j \rangle = \frac{i}{4} \delta_{ij} \quad (3)$$

نکته مهم در مورد این مثال این است که با استفاده از قضیه Wick می توان در این نظریه مقدار انتظاری همه عملگرهای هر ناحیه فضایی دلخواهی را از روی توابع دو-نقطه ای به دست آورد. به عنوان مثال برای توابع چهار-نقطه ای داریم

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle = \langle \phi_1 \phi_2 \rangle \langle \phi_3 \phi_4 \rangle + \langle \phi_1 \phi_3 \rangle \langle \phi_2 \phi_4 \rangle + \langle \phi_1 \phi_4 \rangle \langle \phi_2 \phi_3 \rangle$$

و بقیه توابع زوج-نقطه ای نیز به همین ترتیب از روی همه ترکیبات ممکن توابع دو-نقطه ای به دست می آید. با توجه به اینکه نظریه گوسی است فرض می کنیم ماتریس چگالی کاهش یافته را می توان به صورت

$$\rho_A = \mathcal{N} e^{-\sum_i \epsilon_i a_i^\dagger a_i} \quad (4)$$

نوشت که ثابت $\mathcal{N} = \prod_i (1 - e^{-\epsilon_i})$ از بهنجارش ماتریس چگالی کاهش یافته به دست می آید. با اعمال تبدیلات بگلیف

^۲ این محاسبه اولین بار توسط پسچل در [۱] انجام شده است.

^۳ regularization

^۴ universal

به صورت

$$\phi_i = \alpha_{ij}(a_j^\dagger + a_j) \quad , \quad \pi_i = i\beta_{ij}(-a_j^\dagger + a_j) \quad (5)$$

که $\alpha\beta^T = -\frac{I}{\nu}$ است و با جای گذاری (5) در (6) داریم

$$\begin{aligned} X &= \alpha(2q + 1)\alpha^T \\ P &= \beta(2q + 1)\beta^T \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن q قطری است و درایه های آن عبارتند از

$$q_{kk} = (e^{\epsilon_k} - 1)^{-1}$$

با استفاده از $\alpha\beta^T = -\frac{I}{\nu}$ می توان دید که

$$XP = \frac{1}{\nu} \alpha(2q + 1)^2 \alpha^{-1}$$

لذا ویژه مقادیر عملگر $C = \sqrt{XP}$ به صورت

$$\nu_k = \frac{1}{\nu} \coth \frac{\epsilon_k}{\nu}$$

به دست می آید. از این رابطه می توان استفاده کرد و انرژی مدهای واجفتیده یعنی ϵ_i ها را برحسب توابع دونقطه ای میان میدانها که داده های مسئله هستند به دست آورد. بدین ترتیب به راحتی می توان با جایگذاری رابطه ی (4) در تعریف آنتروپی مقدار آن را برحسب ϵ_i ها یا به صورت معادل برحسب C (توابع دونقطه ای) به صورت

$$\begin{aligned} S(A) &= \sum_i \left[-\log(1 - e^{-\epsilon_i}) + \frac{\epsilon_i e^{-\epsilon_i}}{1 - e^{-\epsilon_i}} \right] \\ &= \text{Tr} \left[\left(C + \frac{1}{\nu} \right) \log \left(C + \frac{1}{\nu} \right) - \left(C - \frac{1}{\nu} \right) \log \left(C - \frac{1}{\nu} \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

به دست آورد.

برای مثال مشخصی که در (2) معرفی شد همیلتونی گسسته به صورت

$$H = \frac{1}{\nu} \sum_i \pi_i^2 + \frac{1}{\nu} \sum_{i,j} \phi_i M_{ij} \phi_j$$

است که می توان ماتریس های X و P را از روی آن به صورت

$$X_{ij} = \frac{1}{\nu} (M^{-1/2})_{ij} \quad , \quad P_{ij} = \frac{1}{\nu} (M^{1/2})_{ij}$$

به دست آورد. برای چنین سیستمی در حالت بدون جرم و در $(1 + 2)$ - بعد می توان مقدار همبستگی میان میدان ها را به صورت

$$\begin{aligned}\langle \phi_{ij} \circ \phi_{ij} \rangle &= \frac{1}{\lambda \pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dp_x \int_{-\pi}^{\pi} dp_y \omega_{\mathbf{p}}^{-1} \cos ip_x \cos jp_y \\ \langle \pi_{ij} \circ \pi_{ij} \rangle &= \frac{1}{\lambda \pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dp_x \int_{-\pi}^{\pi} dp_y \omega_{\mathbf{p}} \cos ip_x \cos jp_y\end{aligned}\quad (8)$$

که در آن

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{(1 - \cos p_x)(1 - \cos p_y)}$$

است محاسبه کرد. این انتگرال را می توان به صورت عددی محاسبه کرد و در نهایت ϵ_i ها را به صورت عددی به دست آورد. اگر فرمالیزم بالا را برای نواحی درهم تنیدگی که در شکل ۱ نشان داده شده انجام دهیم از روی داده های به دست آمده می توان دید که مقدار آنتروپی با توابع زیر برازش می شوند

$$\begin{aligned}S(A_1) &= c_1 \frac{L}{\epsilon} - c_2 \log \frac{L}{\epsilon} + c_3 \\ S(A_2) &= c_1 \frac{L}{\epsilon} - \frac{6}{4} c_2 \log \frac{L}{\epsilon} + c_3 \\ S(A_3) &= c'_1 \frac{L}{\epsilon} - c_2 \log \frac{L}{\epsilon} + c_3\end{aligned}\quad (9)$$

از نتایج فوق، مشخصاً ضرایب جمله ی اول $S(A_1)$ و $S(A_3)$ به نظر می رسد که این جمله به نوع عادی سازی^۵ بستگی دارد و لذا نمی تواند از ویژگی های نظریه در حد پیوستار اطلاعاتی به دست دهد. از سوی دیگر این نتایج نشان می دهد ضریب جمله ی لگاریتمی به نوع عادی سازی بستگی ندارد و علی الاصول می تواند از ویژگی های نظریه در حد پیوستار نظریه اطلاعات به دست دهد. ضریب $6/4$ در $S(A_2)$ نسبت به $S(A_1)$ وجود دارد نشان می دهد سهم این جمله از تعداد گوشه های ناحیه ی درهم تنیدگی است و یک اثر موضعی فزونور^۶ است.

علت واگرایی آنتروپی درهم تنیدگی در نظریه میدان های کوانتومی وجود مدهای با طول موج (به اندازه ی دلخواه) کوتاه است. به همین علت در نظریه میدان های موضعی درجات آزادی جای گزیده در نزدیکی مرز ناحیه ی درهم تنیدگی بیشترین سهم را به آنتروپی را می دهد و به همین علت جمله ی غالب در آنتروپی متناسب با مرز ناحیه ی درهم تنیدگی است. به صورت عمومی رفتار آنتروپی به صورت

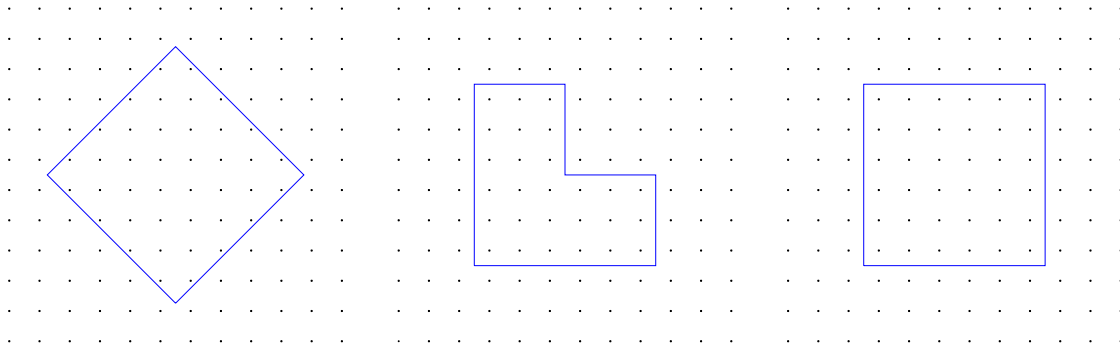
$$S(A) = \frac{g_{d-2}(\partial A)}{\epsilon^{d-2}} + \frac{g_{d-1}(\partial A)}{\epsilon^{d-1}} + \dots + g_0(\partial A) \log \frac{\ell}{\epsilon} + S_0(A)\quad (10)$$

است که ℓ طول مشخصه ای از ناحیه ی درهم تنیدگی است. باید توجه کرد که بسط فوق می تواند علی الاصول بسته به هندسه ی ناحیه ی درهم تنیدگی جملاتی با توان های غیر صحیح از ϵ هم داشته باشد که برای سادگی از نوشتن آنها صرف نظر شده است. از بسط فوق چندین نکته می توان آموخت. اول اینکه همان طور که پیشتر اشاره شد جمله ی غالب متناسب با سطح ناحیه ی درهم تنیدگی است و در صورتی که $\epsilon \propto \ell_p$ باشد این جمله مشابه آنتروپی سیاه چاله هاست. لذا به نظر می رسد اگر این دو مفهوم با هم مرتبط باشند باید در حضور گرانش آنتروپی درهم تنیدگی به نوعی بازبهنجار شود.

نکته ی دوم این است که ضریب $g_0(\partial A)$ مستقل از نحوه ی عادی سازی است و می تواند حاوی اطلاعاتی از نظریه و حالتی

^۵ regularization

^۶ extensive



شکل ۱: سه ناحیه‌ی درهم‌تنیدگی که به ترتیب از راست به چپ با A_1 ، A_2 و A_3 مشخص می‌شوند. محیط پیرامون هر سه شکل $4L$ است.

که آنتروپی در آن محاسبه شده باشد. در ادامه‌ی نوشتار مثال‌هایی از این نوع جملات را بررسی خواهیم کرد. نکته‌ی سوم در خصوص بسط فوق اطلاعاتی است که در جمله‌ی $S_0(A)$ قرار دارد. این جمله حاوی اطلاعات بسیار مهمی از جمله آنتروپی گرمایی است (که مقدار آن محدود است) اما علی‌رغم اینکه بستگی صریحی به ϵ ندارد اما برخلاف جمله‌ی لگاریتمی ابهام دارد چراکه مقدار آن با تغییر ثابت شبکه متغیر خواهد بود.

۲.۱ روش زمان اقلیدسی

روش دیگری محاسبه‌ی آنتروپی درهم‌تنیدگی در نظریه میدان‌های کوانتومی روش زمان اقلیدسی یا روش المثنی^۷ است که از برخی لحاظ عمومیت بیشتری نسبت به روش زمان حقیقی دارد. در این روش برای محاسبه‌ی آنتروپی درهم‌تنیدگی ابتدا آنتروپی‌های رنئی^۸ محاسبه می‌شوند. در این نوشتار فارغ از اهمیتی که آنتروپی‌های رنئی دارند آنها را فقط به‌عنوان ابزاری برای محاسبه‌ی آنتروپی درهم‌تنیدگی در روش المثنی در نظر می‌گیریم. آنتروپی رنئی به‌ازی $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ به‌صورت

$$S_n(A) = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr} [\rho_A^n] \quad (11)$$

تعریف می‌شوند. به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که آنتروپی درهم‌تنیدگی به‌صورت زیر

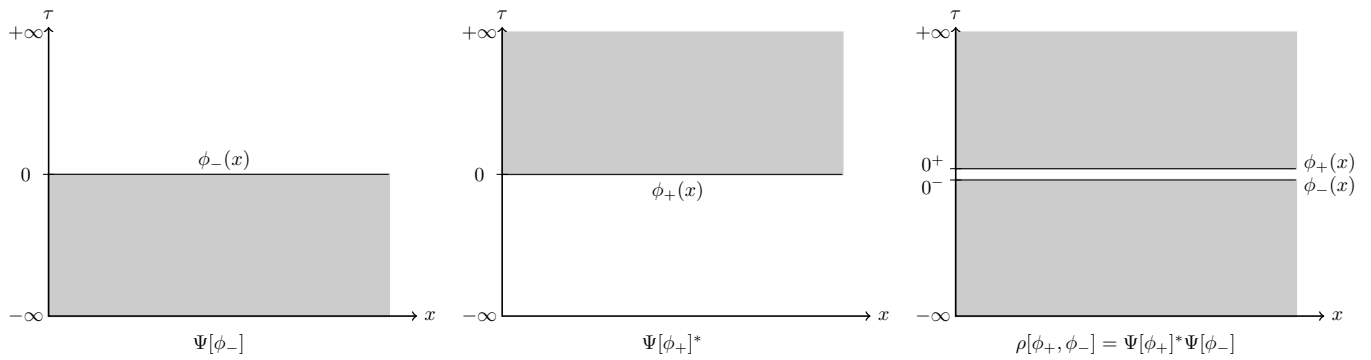
$$S(A) = \lim_{n \rightarrow 1} S_n(A) \quad (12)$$

به‌دست می‌آید. در ادامه‌ی این بخش روشی برای محاسبه‌ی ماتریس چگالی کاهش‌یافته در حالت خلاء در فرمالیزم انتگرال مسیر ارائه می‌شود. برای نوشتن تابعی موج حالت خلاء ابتدا روش متناظر را در مکانیک کوانتومی یادآور می‌شویم. در فرمالیزم انتگرال مسیر مکانیک کوانتومی دامنه‌ی گذار یک ذره با مختصات (x_0, t_0) به $(x, 0)$ به‌صورت

$$\langle x_0, t_0 | x, 0 \rangle = \int_{(x_0, t_0)}^{(x, 0)} \mathcal{D}x(t) e^{iS(x)} \quad (13)$$

^۷Replica

^۸Renyi



شکل ۲: روش ساختن تابعی موج (سمت چپ) و مزدوج مختلط آن (وسط) و ماتریس چگالی (سمت راست) در فرمالیزم انتگرال مسیر.

داده می‌شود. از سوی دیگر می‌دانیم که

$$\langle x_0, t_0 | x, 0 \rangle = \langle x_0 | e^{iHt_0} | x \rangle. \quad (14)$$

برای به دست آوردن تابع موج حالت خلاء تکنیک شناخته شده‌ای وجود دارد که شامل دو گام است. گام اول رفتن به زمان اقلیدسی به صورت $t \rightarrow i\tau$ که

$$\langle x_0 | e^{iHt_0} | x \rangle \rightarrow \langle x_0 | e^{-H\tau_0} | x \rangle \quad (15)$$

و گام دوم رفتن به حد $\tau_0 \rightarrow \infty$ که در نتیجه‌ی آن

$$\langle x_0 | e^{-H\tau_0} | x \rangle \approx \langle x_0 | e^{-H\tau_0} | 0 \rangle \langle 0 | x \rangle = \mathcal{Z}^{1/2} \psi_0(x) \quad (16)$$

در این حد عملگر واحد (مجموعه‌ی کاملی از ویژه حالت‌های همیلتونی) را در سمت راست عملگر $e^{-H\tau_0}$ وارد کردیم ولی از آنجا که سهم حالت‌های با انرژی بالاتر از خلاء به صورت نمایی کوچک‌تر از سهم خلاء است در نهایت داریم

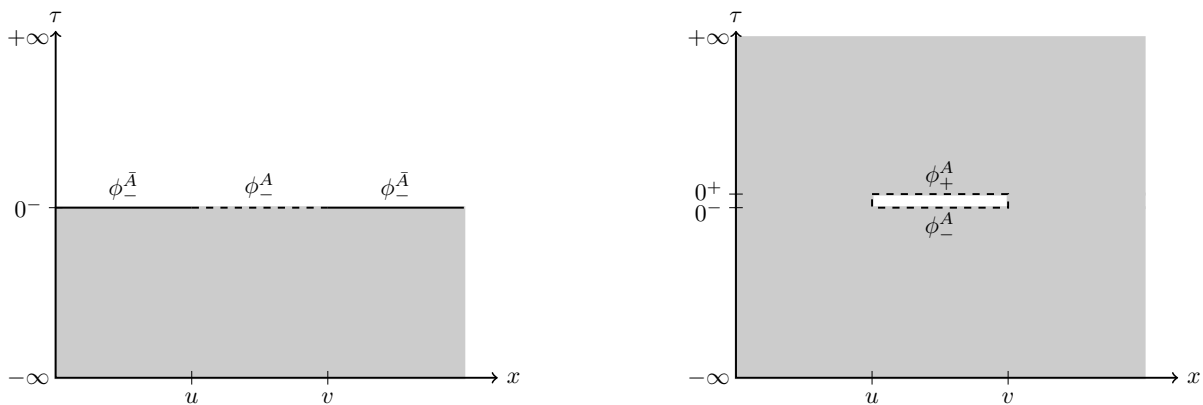
$$\psi_0(x) = \mathcal{Z}^{-1/2} \int_{(x_0, -\infty)}^{(x, 0)} \mathcal{D}x(t) e^{-S_E(x)} \quad (17)$$

به صورت مشابه می‌توان در نظریه میدان کوانتومی می‌توان تابعی موج متناظر با حالت خلاء را به صورت زیر

$$\Psi[\phi_0(x)] = \mathcal{Z}^{-1/2} \int_{\phi(x, -\infty)=0}^{\phi(x, 0)=\phi_0(x)} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} \quad (18)$$

بدین ترتیب می‌توان ماتریس چگالی متناظر با حالت خلاء را به صورت

$$\rho[\phi_+, \phi_-] = \Psi[\phi_+]^* \Psi[\phi_-]$$



شکل ۳: روش ساختن ماتریس چگالی کاهش یافته در فرمالیزم انتگرال مسیر.

به دست آورد (شکل ۲ را ببینید). از آنجایی که هدف به دست آوردن ماتریس چگالی کاهش یافته است اندیس های ماتریس چگالی را به صورت

$$\phi_{\pm} = \phi_{\pm}^A \oplus \phi_{\pm}^{\bar{A}}$$

در نظر می گیریم. بنا به تعریف (۱) ابتدا شرط $\phi_{+}^{\bar{A}} = \phi_{-}^{\bar{A}} \equiv \phi^{\bar{A}}$ را اعمال می کنیم و روی $\phi^{\bar{A}}$ ها جمع می زنیم (شکل ۳ را ببینید)

$$\begin{aligned} \rho_A[\phi_{+}^A, \phi_{-}^A] &= \mathcal{Z}^{-1} \int \mathcal{D}\phi^{\bar{A}} \Psi[\phi_{+}^A \oplus \phi^{\bar{A}}] \Psi[\phi_{-}^A \oplus \phi^{\bar{A}}] e^{-S_E[\phi]} \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \int \mathcal{D}\phi^{\bar{A}} e^{-S_E[\phi]} \prod_{\vec{x} \in A} \delta(\phi_{+}^{\bar{A}} - \phi^{\bar{A}}) \delta(\phi_{-}^{\bar{A}} - \phi^{\bar{A}}) \\ &\equiv \mathcal{Z}^{-1} \int_{\phi(x_A, \circ^-) = \phi_{-}^A}^{\phi(x_A, \circ^+) = \phi_{+}^A} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} \end{aligned} \quad (19)$$

حال که ماتریس چگالی کاهش یافته را ساخته ایم در قدم بعد توان های صحیح آن را می سازیم. این کار یک ضرب ماتریسی ساده است که به صورت زیر انجام می شود

$$\rho_A^n[\phi_1, \phi_2] = \int \mathcal{D}\phi_{-}^{(1)} \cdots \mathcal{D}\phi_{-}^{(n-1)} \rho_A[\phi_1, \phi_{-}^{(1)}] \rho_A[\phi_{-}^{(1)}, \phi_{-}^{(2)}] \cdots \rho_A[\phi_1, \phi_{-}^{(n-1)}] \rho_A[\phi_{-}^{(n-1)}, \phi_2]$$

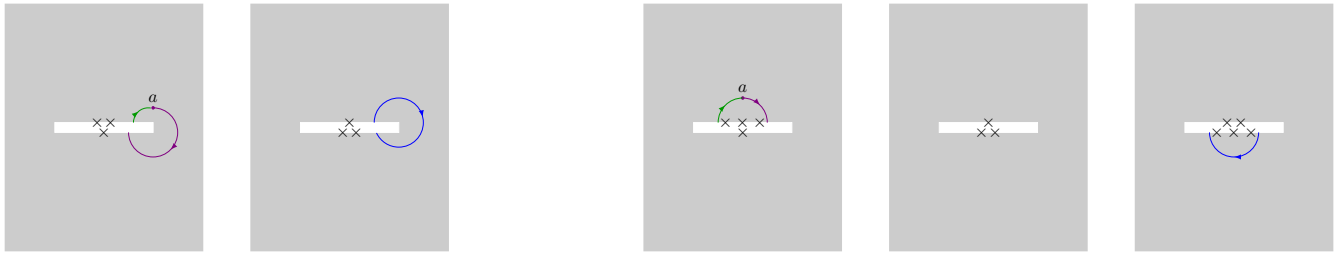
که شرایط مرزی

$$\phi_{-}^{(i)} = \phi_{+}^{(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

در آن اعمال شده است. برای اینکه رد موجود فوق را حساب کنیم باید شرط

$$\phi_{-}^{(n)} = \phi_{+}^{(1)}$$

را اضافه کنیم لذا



شکل ۴: ردّ توان‌های ۲ (چپ) و ۳ (راست) ماتریس چگالی کاهش‌یافته. روی شکل سمت چپ نشان داده شده که اگر روی خمینه‌ی $\mathcal{R}_{n(=2)}$ شخصی بخواهد حول نقاط سر و ته ناحیه‌ی درهمتنیدگی حرکت کند متوجه تکینگی می‌شود مثلاً اگر از نقطه‌ی a شروع به حرکت کند (مسیر بنفش رنگ) بعد از طی مسیر آبی و سبز نهایتاً مسافت $(= 4\pi) 2n\pi$ را طی کرده و به مکان اولیه‌ی اول خود می‌رسد. اما روی شکل نشان داده شده که اگر مسیری که طی می‌شود شامل نقاط سر و ته ناحیه‌ی درهمتنیدگی نباشد بعد از طی 2π به نقطه‌ی اول خود می‌رسد و فضا را فضای موضعا تخت می‌بیند.

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\rho_A^n] &= \int \mathcal{D}\phi_-^{(1)} \dots \mathcal{D}\phi_-^{(n-1)} \mathcal{D}\phi_-^{(n)} \rho_A[\phi_-^{(n)}, \phi_-^{(1)}] \rho_A[\phi_-^{(1)}, \phi_-^{(2)}] \dots \rho_A[\phi_1, \phi_-^{(n-1)}] \rho_A[\phi_-^{(n-1)}, \phi_-^{(n)}] \\ &\equiv \mathcal{N} \int_{\mathcal{R}_n} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} = \mathcal{N} \mathcal{Z}_n \end{aligned} \quad (20)$$

که خمینه‌ی \mathcal{R}_n با شرایط مرزی $\phi_-^{(i)} = \phi_+^{(i+1)}$ و $\phi_-^{(n)} = \phi_+^{(1)}$ تعریف می‌شود. ضریب بهنجارش در خط دوم عبارت فوق از شرط $\text{Tr} [\rho_A] = 1$ به دست می‌آید لذا

$$\text{Tr} [\rho_A^n] = \frac{\mathcal{Z}_n}{\mathcal{Z}_1^n} \quad (21)$$

نکته‌ی درخور توجه در مورد \mathcal{R}_n توپولوژی آن است. همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود این خمینه (در مورد نظریه میدان‌های ۲- بعدی) در دونقطه‌ی ابتدا و انتهای ناحیه‌ی A تکینگی مخروطی با نقص زاویه‌ی $(n-1)2\pi$ دارد و در سایر نقاط به صورت موضعی تخت است.

نظریه میدان‌های همدیس ۲- بعدی

نکته‌ی مهم در این بخش قابلیت محاسبه‌ی صریح طرف راست رابطه‌ی (۲۱) است. اولین بار کلبِرزه و کاردی در ۲۰۰۴ نشان دادند که برای نظریه میدان‌های همدیس ۲- بعدی می‌توان تابع پارش را از روی تابع دو-نقطه‌ای دو عملگر اولیه با وزن مشخص روی صفحه‌ی مختلط به دست آورد [۳].^۹ در این بخش بدون ورود به جزئیات این محاسبه نتیجه‌ی نهایی آن را مرور می‌کنیم. کلبِرزه و کاردی نشان دادند که

$$\text{Tr} [\rho_A^n] = \langle \mathcal{T}_n(u) \mathcal{T}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}} = \frac{c_n}{|u-v|^{2h_n}} \quad (22)$$

که وزن همدیس این عملگرها عبارت است از

^۹ برای مرور این روش با جزئیات دقیقتر به [۴] رجوع کنید.

$$h_n = \frac{c}{12} \left(n - \frac{1}{n} \right)$$

با اعمال این رابطه در (۱۱) و (۱۲) به سادگی می‌توان دید که

$$S(A) = \frac{c}{3} \log \frac{|u-v|}{\epsilon} + \text{const.} \quad (23)$$

که در آن ϵ عکس قطع فرابنفش نظریه است.^{۱۰} نکته‌ی جالب این است که می‌توان با استفاده از تبدیلات همدیس (روی تابع دو-نقطه‌ای فوق) نتیجه را برای حالت دمدار و طول محدود نیز به دست آورد. به عنوان نمونه نتیجه برای حالت دمای محدود به صورت

$$S(A) = \frac{c}{3} \log \left[\frac{\beta}{\pi \epsilon} \sinh \frac{|u-v|\pi}{\beta} \right] + \text{const.} \quad (24)$$

به دست می‌آید که $\beta = 1/T$.

۲ آنترپی در همتیدگی در هولوگرافی

آنترپی در همتیدگی هولوگرافیک امروزه بخش بسیار مهمی از واژه‌نامه‌ی دوگانی پاددوسیه/همدیس^{۱۱} و به صورت عمومی‌تر دوگانی گرانش/پیمان‌های^{۱۲} به حساب می‌آید. از زمان معرفی این نسخه تا کنون مطالعات بسیار گسترده‌ای در این زمینه انجام شده است که هم موجب تکمیل این نسخه از جنبه‌های گوناگون شده است و هم سرمنشا مطالعات بنیادی‌تری در این حوزه گردیده است. همچنین این نسخه موجب کشف و دنبال کردن جنبه‌های مختلفی از در همتیدگی در چارچوب نظریه میدان‌های همدیس (بدون در نظر گرفتن نظریه‌ی گرانشی دوگان) نیز بوده است.

از آنجایی که در این بخش هدف معرفی این نسخه و متعلقات آن است لذا فرض می‌شود خواننده با دوگانی پاددوسیه/همدیس آشناست و صرفاً جهت یادآوری فضای پاددوسیه را در سه مختصات که بیشتر در این مبحث مورد استفاده قرار می‌گیرند مرور خواهد شد.

۱.۲ یادآوری فضای AdS

فضای $(d+2)$ -بعدی تخت زیر را در نظر می‌گیریم

$$ds^2 = -dy_{-1}^2 - dy_0^2 + dy_1^2 + \dots + dy_d^2$$

فضای پاددوسیه‌ی $(d+1)$ -بعدی با شعاع L به صورت زیر فضایی از فضای فوق که در

$$-L^2 = -y_{-1}^2 - y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_d^2$$

^{۱۰} استفاده از رابطه‌ی (۱۲) مستلزم این است که ابتدا ثابت شود نتیجه‌ی (۲۲) دارای ادامه‌ی تحلیل یکتا برای n های غیر طبیعی دارد. برای اثبات ادامه‌ی تحلیلی رابطه‌ی (۲۲) به [۲، ۵] رجوع کنید.

^{۱۱} AdS/CFT

^{۱۲} gauge/gravity

صدق می‌کند تعریف می‌شود. با این تعریف بدیهی است که ایزومتري این فضا گروه $SO(2, d)$ می‌باشد که معادل گروه تقارنی نظریه میدان همدیس در d -بعد است.

مختصات سرتاسری

فضای AdS_{d+1} در مختصات سرتاسری به صورت

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (25)$$

است که r مختصه شعاعی است و توپولوژی مرز فضا در $r \rightarrow \infty$ به صورت $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ می‌باشد.

مختصات پوانکاره

فضای AdS_{d+1} در این مختصات به صورت

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + dz^2 + d\vec{x}_{d-1}^2) \quad (26)$$

است که z مختصه شعاعی است و توپولوژی مرز فضا در $z \rightarrow 0$ به صورت $\mathbb{R}^{1, d-1}$ می‌باشد.

مختصات هذلولوی

فضای AdS_{d+1} در مختصات هذلولوی به صورت

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{L^2} - 1 \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{L^2} - 1 \right)} + r^2 \left(du^2 + \sinh^2 u d\Omega_{d-2}^2 \right) \quad (27)$$

است که r مختصه شعاعی است و توپولوژی مرز فضا در $r \rightarrow \infty$ به صورت $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^{d-1}$ می‌باشد.

۲.۲ پیشنهادی ریو-تاکایاناگی

روش هولوگرافی برای محاسبه‌ی آنتروپی در همتیدگی در سال ۲۰۰۶ توسط ریو و تاکایاناگی (RT) معرفی شده است [۶]. در این نوشتار این روش را به عنوان بخشی از واژه‌نامه‌ی دوگانی پاددوسیه/همدیس به معنی بدیلی برای محاسبه‌ی آنتروپی در همتیدگی در نظریه میدان‌های کوانتمی که دارای دوگان گرانشی هستند معرفی می‌شود.^{۱۳}

^{۱۳} از سوی دیگر می‌توان آنتروپی در همتیدگی هولوگرافیک را به عنوان ابزاری بنیادی برای شناخت سازوکار هولوگرافی نگاه کرد. ریو و تاکایاناگی چنین دیدگاهی را به عنوان یکی از انگیزش‌های اولیه‌ی مطالعه‌ی آنتروپی در همتیدگی به روش هولوگرافیک بیان می‌کنند. به بیان آنها سوال اساسی که در مورد دوگانی‌ها و مشخصاً دوگانی پاددوسیه/همدیس باید پاسخ داده شود این است که آیا می‌توان مشخص کرد که اطلاعات زیرمجموعه مشخصی از فضای هیلبرت نظریه میدان در کدام بخش از هندسه‌ی فضا-زمان دوگان آن گد شده است؟ در صورتی که نظریه میدان مورد نظر نظریه‌ای موضعی باشد، حداقل زمانی که در حالت خلاء قرار داشته باشد این سوال را می‌توان در هر دو سمت تناظر به صورت هندسی مطرح کرد: اطلاعات زیرفضای مشخصی از نظریه‌ی مرزی در کدام قسمت از فضا-زمان دوگان آن نگاشته شده است؟ این سوال در صورتی که نظریه میدان در حالت خلاء قرار دارد همواره خوش تعریف است.

آنتروپی بکنشتین-هاوکینگ مساحت سطح افق را که کمیتی هندسی است به آنتروپی دمایی سیاهچاله که خاستگاهی میکروسکوپی دارد مرتبط می‌کند. علی‌الاصول باید بتوان چنین ارتباطی را در چارچوب دوگانی پاددوسیته/همدیس هم تصور کرد. بدین ترتیب می‌توان این ایده را دنبال کرد که آیا اطلاعاتی در مورد درجات آزادی نظریه میدان کوانتومی مرزی وجود که اطلاعات هندسه‌ی توده^{۱۴} را دربر داشته باشد؟ به عبارت صریح‌تر آیا می‌توان به این سوال پاسخ داد که اطلاعات آزادی مشخصی در نظریه میدان همدیس چگونه در نظریه‌ی گرانش دوگان گد شده است؟ دیدگاه RT برای نزدیک شدن به پاسخ این سوال این است که انتظار نمی‌رود مشاهده‌پذیرهایی مثل توابع چند نقطه‌ای یا حتی حلقه‌های ویلسون که به جزئیات نظریه میدان وابسته هستند بتوانند به این سوال پاسخ دهد. آنها پیشنهاد می‌کنند که باید مشاهده‌پذیرهایی مثل آنتروپی درهمتیدگی که در هر سامانه‌ای در چارچوب مکانیک کوانتومی خوش تعریف است را در این چارچوب مطالعه کرد. بدین ترتیب نسخه‌ای برای محاسبه‌ی دوگان آنتروپی درهمتیدگی در نظریه میدان به صورت یک موجود هندسی در توده ارائه می‌دهند که می‌تواند سنج‌های هندسی برای میزان اطلاعات موجود در ناحیه‌ی درهمتیدگی مشخص شده روی نظریه میدان باشد.

نسخه‌ی RT روشی است که با استفاده از آن می‌توان آنتروپی درهمتیدگی در یک نظریه میدان همدیس d -بعدی را در حالتی که دوگان آن جوابی ایستا^{۱۵} از نظریه‌ی اینشتن-هیلبرت باشد با محاسبه‌ی مساحت سطح مشخصی در فضای گرانشی $(d+1)$ -بعدی محاسبه کرد. در ادامه این پیشنهاد را به صورت دقیق‌تر بررسی می‌کنیم.

خمینه‌ی (مجانباً پاددوسیته) $\mathbb{R} \times M_d$ را در نظر می‌گیریم که نظریه میدان همدیس روی مرز آن، که خمینه‌ی $\mathbb{R} \times N_{d-1}$ می‌باشد و \mathbb{R} نشان‌دهنده‌ی جهت زمان است تعریف شده است. از آنجا که هدف محاسبه‌ی آنتروپی در همتیدگی برای ناحیه‌ی مشخصی از نظریه میدان همدیس است، برای این منظور برش زمان ثابت $t = t_0$ خمینه‌ی N_{d-1} را با معرفی ابرسطح $(d-2)$ -بعدی $\partial A = \partial \bar{A}$ به دو بخش (متصل^{۱۶}) A و \bar{A} تقسیم می‌کنیم به طوری که $A \cup \bar{A} = N_{d-1}$. پیشنهادی RT این است که آنتروپی درهمتیدگی ناحیه‌ی A را می‌توان بدین ترتیب محاسبه کرد: خانواده سطوح $[\tilde{\gamma}_A]$ را در خمینه‌ی M_d (داخل توده) طوری در نظر می‌گیریم که مرز آن‌ها روی N_{d-1} معادل مرز ناحیه‌ی A باشد لذا برای هر عضو دلخواه $\tilde{\gamma}_A$ از خانواده‌ی $[\tilde{\gamma}_A]$ داریم $\partial \tilde{\gamma}_A = \partial A = \partial \bar{A}$. از میان تمام سطوح عضو $[\tilde{\gamma}_A]$ سطح مشخص γ_A را طوری انتخاب می‌کنیم که تابعی مساحت آن در این خانواده کمینه باشد. بدین ترتیب آنتروپی درهمتیدگی ناحیه‌ی A در نظریه میدان همدیس عبارت است از

$$S(A) = \frac{\text{Area}[\gamma_A]}{4G_N^{d+1}} \quad (28)$$

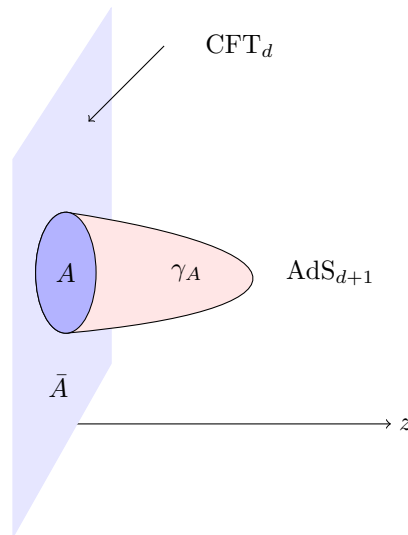
که در آن G_N^{d+1} ثابت نیوتن $(d+1)$ -بعدی می‌باشد. شکل ۵ را ببینید. انگیزش اولیه‌ی ارائه‌ی این نسخه از مقایسه‌ی ساده‌ی میان آنتروپی درهمتیدگی و آنتروپی سیاهچاله‌ها شکل گرفته است. از آنجا که در تعریف آنتروپی درهمتیدگی یک مرز فرضی در فضا تعریف می‌شود و حالت‌های متناظر با نواحی خارج از این مرز در فضای هیلبرت با رد گرفتن اصطلاحاً دور ریخته می‌شود، ناظری که به ماتریس چگالی کاهش یافته‌ی بخشی از فضا دسترسی دارد نسبت به اطلاعات خارج از آن کور است. از مشابَهت با فیزیک سیاهچاله‌ها در گرانش می‌توان مرز ناحیه‌ی درهمتیدگی را به صورت یک «افق» فرضی در نظر گرفت و لذا می‌توان انتظار داشت که در چارچوب دوگانی پاددوسیته/همدیس که این مرز در نظریه‌ی گرانشی امتداد پیدا می‌کند، مساحت این مرز گسترش یافته در توده با میزان آنتروپی درهمتیدگی این ناحیه مرتبط باشد. انتخاب چنین سطحی با مساحت کمینه هم شبیه به انتخاب قوی‌ترین حد روی میزان آنتروپی است.^{۱۷}

^{۱۴} bulk

^{۱۵} static

^{۱۶} connected

^{۱۷} حدود آنتروپی به دلیل بحث مفصلی که پیش می‌آورد در این رساله معرفی نشد اما برای آشنایی با آنها به عنوان مثال می‌توان به مقاله‌ی مروری [۸] مراجعه کرد.



شکل ۵: این شکل نشان دهنده‌ی پیشنهادی RT برای فضا-زمان‌های ایستای مجانباً پاددوسیه است. تصویر در یک برش زمان ثابت از نظریه مرزی و همچنین توده رسم شده که در آن سطح قرمز رنگ γ_a سطح کمینه‌ی RT و z نشان دهنده‌ی مختصه‌ی شعاعی نظریه گرانشی است.

لازم به ذکر است که نسخه‌ی RT برای جواب‌های ایستای^{۱۸} مجانباً پاددوسیه ارائه شده است.^{۱۹} در ادامه‌ی همین نوشتار تعمیم هموردایی از این نسخه که برای جواب‌های پایا^{۲۰} و همچنین سایر جواب‌های وابسته به زمان مجانباً پاددوسیه ارائه شده معرفی خواهد شد.

برخی ویژگی‌های آنتروپی درهمتنیدگی هولوگرافیک

در این زیر بخش برخی از ویژگی‌های شناخته شده‌ی آنتروپی درهمتنیدگی در نظریه میدان‌های کوانتومی به عنوان آزمون‌هایی برای بررسی امکان صحت نسخه‌ی RT بررسی خواهد شد.

اولین ویژگی مورد انتظار این است که قانون سطح درهمتنیدگی از این نسخه نتیجه شود. این ویژگی عملاً به صورت بدیهی در نسخه‌ی فوق مستتر است. از آنجا که متریک فضاهای مجانباً پاددوسیه در نزدیکی مرز همدیس فضا تقریباً معادل متریک پاددوسیه و در نتیجه واگرا است، لذا جمله‌ی غالب در رابطه‌ی (۲۸) ناشی از سهم تابعی مساحت γ_A در نزدیکی مرز است و به صورت

$$S(A) \sim \frac{\text{Area}[\partial\gamma_A]}{\epsilon^{d-2}} \quad (29)$$

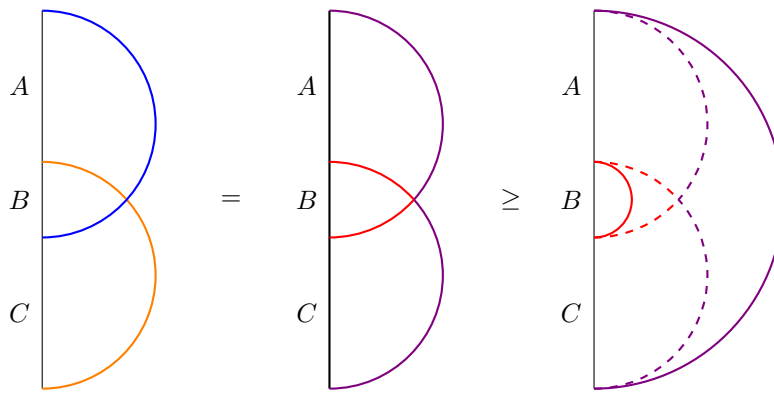
خواهد بود که در آن ϵ مقیاس قطع فضا-زمان است که با توجه به تناظر پاددوسیه/همدیس معادل مقیاس قطع فرابنفش نظریه میدان می‌باشد.

از مهمترین ویژگی‌های آنتروپی درهمتنیدگی قاعده‌ی جمع‌پذیری قوی است. این قاعده در نسخه‌ی RT (برای نواحی متصل)

^{۱۸}static

^{۱۹}برای مطالعه‌ی بیشتر در خصوص این نسخه علاوه بر مراجع [۶] که برای اولین بار این نسخه در آنها معرفی شده می‌توان به مقاله‌ی مروری [۷] مراجعه کرد.

^{۲۰}stationary



شکل ۶: قاعده‌ی جمع‌پذیری قوی در نظریه میدان دو بعدی. در شکل سمت چپ منحنی آبی رنگ نشان‌دهنده‌ی $S(A \cup B)$ و منحنی نارنجی نشان‌دهنده‌ی $S(B \cup C)$ هستند. در شکل میانی صرفاً تفکیک هندسی برای وضوح بیشتر مقایسه با شکل سمت راست انجام شده است. در شکل سمت راست منحنی بنفش نشان‌دهنده‌ی $S(A \cup B \cup C)$ و منحنی قرمز نشان‌دهنده‌ی $S(B)$ می‌باشد. منحنی‌های خط‌چین در شکل سمت راست همان منحنی‌های تصویر وسط هستند.

به صورت بسیار ساده‌ای به صورت هندسی قابل اثبات است. یکی از بیان‌های جمع‌پذیری قوی به صورت نامساوی

$$S_{AUC} + S_{BUC} \geq S_{AUBUC} + S_C$$

است. برای مشاهده اثبات این نامساوی کافی است به شکل ۶ توجه کنیم. در شکل سمت چپ منحنی‌های آبی و نارنجی بیان‌گر $S(A \cup B)$ و $S(B \cup C)$ هستند. همین منحنی‌ها در تصویر وسط به دو بخش منحنی‌های قرمز و بنفش تقسیم شده‌اند. از مقایسه‌ی تصویر وسط و تصویر سمت راست (که بیان‌گر سمت راست رابطه‌ی جمع‌پذیری قوی است) و از آنجا که می‌دانیم منحنی‌های قرمز و بنفش در تصویر سمت راست منحنی‌های کمی‌نه هستند، با توجه به اینکه که مرز آنها در تصاویر وسط و سمت راست بر یکدیگر منطبق است لاجرم نامساوی فوق برقرار خواهد بود. در نتیجه قاعده‌ی جمع‌پذیری قوی به وضوح با استفاده از نسخه‌ی RT برای نظریه میدان ۲- بعدی به صورت هندسی اثبات می‌شود.^{۲۱} یکی از سنجه‌های دره‌متیدگی که معیاری برای دره‌متیدگی میان دو ناحیه‌ی فضاگونه در یک نظریه میدان است اطلاعات متقابل است که به صورت

$$I(A, B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B)$$

تعریف می‌شود. در نظریه میدان‌های همدیسی که دوگان گرانشی دارند می‌توان نشان داد که لااقل در حد درجات آزادی بزرگ و جفتیدگی قوی (در حد گرانش کلاسیک) گذار فازی میان دو نوع پیکربندی متصل (منفصل) که در حد فواصل کوتاه (بلند) میان کمی‌نه هستند رخ می‌دهد.

لازم به ذکر است که یک ویژگی شناخته‌شده‌ی دیگر آنتروپی دره‌متیدگی هولوگرافیک منفی بودن اطلاعات سه‌تایی است که از ویژگی monogamy اطلاعات دوتایی نتیجه می‌شود [۹]. این ویژگی مختص نظریه میدان‌هایی است که دوگان گرانشی دارند و بنا به اطلاع نگارنده هنوز به‌خوبی شناخته شده نیست.

^{۲۱} این مطالعه ابتدا به صورت عددی در [۹] و سپس به بیان فوق در [۹] انجام شده است.

پس از آزمون ویژگی‌های عمومی آنتروپی در همتیدگی با استفاده از نسخه RT اولین انتظار این است که نتایجی که به‌طور مشخص در روابط (۲۳) و (۲۴) برای نظریه میدان‌های همدیس ۲-بُعدی به‌صورت عمومی (مستقل از نظریه) به‌دست آمد با استفاده از این نسخه باز تولید شود. برای بازتولید این نتایج ابتدا حالت نظریه میدان همدیس را در حالت دما دار در نظر گرفته و سپس با اعمال حد $T \rightarrow 0$ نتایج را برای نظریه میدان همدیس در حالت خلاء نیز به‌دست می‌آوریم. با توجه به دوگانگی پاددوسیه/همدیس که مطابق آن حالت دمایی نظریه میدان همدیس معادل است با فضای مجانباً پاددوسیه‌ای که افق و دمای غیرصفر داشته باشد، دوگان گرانشی مورد نظر را در حالت عمومی یک سیاه‌شامه‌ی ۳-بُعدی مجانباً پاددوسیه روی تکه‌ی پوانکاره به‌صورت

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left[-f(z)dt^2 + dx^2 + \frac{dz^2}{f(z)} \right], \quad f(z) = 1 - mz^2 \quad (30)$$

در نظر می‌گیریم که در آن شعاع فضای پاددوسیه و m جرم سیاه‌چاله می‌باشد. دمای هاوکینگ این سیاه‌چاله برابر $T = \frac{\sqrt{m}}{4\pi}$ می‌باشد.

مختصات (t, x) مختصات نظریه میدان ۲-بُعدی مورد نظر است که در برش $z = \epsilon$ که $\epsilon \rightarrow 0$ تعریف می‌شود. برای محاسبه‌ی در همتیدگی ناحیه‌ی A که $-\frac{\ell}{2} \leq x \leq \frac{\ell}{2}$ و در زمان $t = t_0$ تعریف شده است باید دو مرز این ناحیه را که دو نقطه‌ی $(t_0, \pm \frac{\ell}{2})$ هستند را به درون توده ادامه داده و با محاسبه‌ی طول منحنی کمینه آنتروپی را حساب کنیم. برای اینکار $x = x(z)$ در نظر گرفته که در نتیجه متریک القا شده روی این خم به‌صورت

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left[\frac{1}{f(z)} + x'(z)^2 \right] dz^2 \quad (31)$$

خواهد بود. بدین ترتیب با اعمال شرط کمینه بودن سطح که معادل حل کردن $x(z)$ روی معادله حرکت آن است می‌توان آنتروپی را به‌صورت

$$S(A) = \frac{R}{4G_N^2} \times \int_{\epsilon}^{z_*} \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{1}{f(z)} + x'(z)^2} \quad (32)$$

به‌دست آورد. z_* نشان‌دهنده‌ی نقطه‌ی بازگشتی منحنی $x(z)$ است که در آن $x'(z) = \infty$. ضریب ۲ که در انتگرال فوق ضرب شده به این خاطر است که منحنی $x(z)$ دارای دو شاخه است که در $z = \epsilon$ از $x = \pm \ell/2$ نقاط آغاز و در $z = z_*$ به $x = 0$ ختم می‌شوند و سهم این دو منحنی به‌دلیل تقارن ناحیه‌ی در همتیدگی یکسان است. از معادلات اوایلر-لاگرانژ برای میدان $x(z)$ به‌سادگی می‌توان نشان داد که دو شاحه‌ی منحنی کمینه در معادله‌ی

$$x'(z) = \pm \frac{z}{\sqrt{f(z)(z_*^2 - z^2)}} \quad (33)$$

صدق می‌کند و نقطه‌ی بازگشتی بر حسب طول ناحیه‌ی در همتیدگی به‌صورت

$$\ell = 2 \int_0^{z_*} x'(z) dz = \frac{1}{\sqrt{m}} \log \left[\frac{1 + \sqrt{m}z_*}{1 - \sqrt{m}z_*} \right] \quad (34)$$

به‌دست می‌آید. با جایگذاری (۳۳) و (۳۴) در (۳۲) و استفاده از رابطه‌ی برّون-هنو [۱۰] که بار مرکزی نظریه میدان همدیس

۲- بُعدی را به صورت $c = \sqrt{2}R/\sqrt{2}G_N^\gamma$ به شعاع فضای پاددوسیتهی ۳- بُعدی مربوط می‌کند آنتروپی به صورت

$$S(A) = \frac{R}{\sqrt{2}G_N^\gamma} \log \left[\frac{\sinh(\ell\pi T)}{\epsilon\pi T} \right] = \frac{c}{\sqrt{2}} \log \left[\frac{\beta}{\epsilon\pi} \sinh \left(\frac{\ell\pi}{\beta} \right) \right] \quad (35)$$

به دست می‌آید. این نتیجه دقیقاً معادل نتیجه‌ای است که در رابطه‌ی (۲۴) با استفاده از روش المثنی مستقیماً در نظریه میدان همدیس به دست آمده بود. این محاسبه عملاً محاسبه‌ی حالت خلاء را نیز به عنوان حالت خاص خود در حد خوش تعریف $m \rightarrow 0$ شامل می‌شود و به نتیجه‌ی قابل انتظار مطابق با (۲۳) منجر می‌شود. اگر نتیجه‌ی (۳۵) این را در حد $\ell \gg \beta$ که معادل طول‌های بزرگ (برای دمای داده شده) است نگاه کنیم می‌توان این رابطه را به صورت

$$S(A) \approx \frac{c}{\sqrt{2}} \frac{\ell\pi}{\beta} + \frac{c}{\sqrt{2}} \log \frac{\ell}{\epsilon} + \frac{c}{\sqrt{2}} \log \frac{\beta}{\sqrt{2}\pi\ell} \quad (36)$$

تقریب زد. همان‌طور که انتظار می‌رود جمله‌ی اول این عبارت دقیقاً برابر چگالی آنتروپی سیاه‌شامه‌ی (۳۰) است و جمله‌ی دوم آن سهم حالت خلاء آنتروپی درهمتنیدگی و جمله‌ی سوم نشان‌دهنده‌ی نحوه‌ی ترکیب شدن این دو آنتروپی می‌باشد. این تحلیل موید تصویری است که پیشتر در فصل به آن اشاره شد مبنی بر اینکه آنتروپی درهمتنیدگی علاوه بر میزان درهمتنیدگی دو ناحیه که اثری صرفاً کوانتومی است، اثرات دمایی سامانه را نیز در خود دارد. به علاوه به‌طور صریح نشان می‌دهد هنگامی که اثرات دمایی غالب هستند قانون حجم بر جمله‌ی غالب حاکم است.

آنتروپی درهمتنیدگی هولوگرافیک در ابعاد بالاتر

تا اینجا نشان دادیم که نسخه‌ی RT علاوه بر اینکه ویژگی‌های عمومی مورد انتظار آنتروپی درهمتنیدگی را داراست، نتایج شناخته شده در نظریه میدان همدیس ۲- بُعدی را نیز بازتولید می‌کند. اما از آنجایی که نسخه‌هایی مشابه روش المثنی در ابعاد بالاتر وجود ندارد، در نتیجه نتایجی که از روش هولوگرافیک برای ابعاد $d > 2$ به دست می‌آید غالباً از مصادیقی است که این نسخه به لحاظ محاسباتی نتایج بدیعی تولید می‌کند که پیش از آن در نظریه میدان همدیس ناشناخته بوده است.

تاکنون مطالعات فراوانی به صورت تحلیلی یا با روش‌های عددی در نظریه میدان‌های همدیس d - بُعدی (که $d > 2$) با استفاده از نسخه‌ی RT تولید شده است. در ابعاد بالاتر طبیعتاً متقارن‌ترین نواحی درهمتنیدگی، ساده‌ترین مثال‌های قابل بررسی هستند. مطالعه‌ی نواحی درهمتنیدگی نوار بینهایت بلند و همچنین نواحی کروی و بعضاً استوانه‌ای از جنبه‌های خاصی مورد توجه بوده‌اند. در این بخش بنا نیست نتایج حاصله از این مطالعات مرور شود بلکه فقط یک نمونه ساده از این محاسبات معرفی خواهد می‌شود تا از روی نتیجه‌ی آن بحث‌هایی در خصوص میزان اطلاعاتی که این نوع محاسبه دربر دارد انجام شود. مثال مورد بررسی عبارت است از نوار بینهایت بلند در نظریه میدان همدیس d - بُعدی که در حالت خلاء قرار دارد. برای انجام این محاسبه فضای پاددوسیته (۱ + d)- بُعدی را روی وصله‌ی پوانکاره در نظر می‌گیریم

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (-dt^2 + dz^2 + d\vec{x}_{d-1}^2) \quad (37)$$

ناحیه‌ی درهمتنیدگی A به صورت

$$t = t_0, \quad -\frac{\ell}{\sqrt{2}} \leq x_1 \leq \frac{\ell}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq x_i \leq L, \quad i = 2, 3, \dots, d-1$$

تعریف می‌شود که در آن پارامتر L عادی‌ساز حجم است و مانند قطع فروسرخ عمل می‌کند و آنتروپی درهمتنیدگی قابل محاسبه در واقع جمله‌ی غالب بسط روی $\frac{\ell}{L}$ می‌باشد. در واقع فقط در حد $\ell \ll L$ است که می‌توان نوار مورد نظر را روی جهت‌های کاملاً متقارن فرض کرد و سطح را با فرض $x_1 = x_1(z)$ تقریب زد. با جای‌گذاری $x_1 = x_1(z)$ در متریک فوق می‌توان مشابه محاسبه‌ای که در بخش قبل انجام شد را برای این مورد نیز انجام داد که به

$$S(A) = \frac{1}{4G_N^{d+1}} \left[\frac{2R^{d-1}}{d-2} \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-2} - \frac{(2\sqrt{\pi}R)^{d-1}}{d-2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)}\right)^{d-1} \left(\frac{L}{\ell}\right)^{d-2} \right] \quad (38)$$

منجر می‌شود. جمله‌ی اول این عبارت همان قانون سطح آنتروپی است که مطابق انتظار به قطع فرابنفش نظریه هم وابسته است و جمله‌ی دوم مستقل از این قطع است و لذا جمله‌ی جهان‌شمول نامیده می‌شود. این جمله حاوی اطلاعات فیزیکی است. اگر این نتیجه را برای مورد خاص $d = 4$ در نظر بگیریم می‌توان آن را با نتایج نظریه‌ی اَبَر ینگ-میلز $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ مقایسه کرد. با استفاده از

$$4\pi g_s = g^2 = \frac{\lambda}{N}, \quad \frac{R}{\ell_s} = (4\pi g_s N)^{1/4} = \lambda^{1/4}$$

درکنار

$$G_N^{(1^0)} = R^5 \text{Vol}(S^5) G_N^{(5)} = R^5 \pi^2 G_N^{(5)}, \quad G_N^{(1^0)} = 8\pi^6 \ell_s^8 g_s^2$$

می‌توان به‌سادگی مشاهده کرد که روش هولوگرافیک نتیجه‌ی

$$S(A) = N^2 L^2 \left[\frac{1}{2\pi\epsilon^2} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\ell^2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\right)^3 \right] \quad (39)$$

را برای این نظریه پیش‌بینی می‌کند. بستگی آنتروپی به N^2 مورد انتظار است چرا که تعداد درجات آزادی این نظریه در حدی که نسخه‌ی فوق معتبر است با N^2 متناسب است. مقدار عددی جمله‌ی محدود (جمله‌ی دوم) برابر است با

$$S^{\text{finite}}(A) = -0.051 \frac{N^2 L^2}{\ell^2}$$

اما همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد این نظریه حاوی یک میدان پیمان‌های A_μ ، شش میدان نرده‌ای (ϕ^1, \dots, ϕ^6) و چهار میدان فرمیون وایل $(\psi_\alpha^1, \psi_\alpha^2, \psi_\alpha^3, \psi_\alpha^4)$ است. صرفاً برای مقایسه می‌توان آنتروپی درهمتنیدگی را برای همین ناحیه‌ی درهمتنیدگی درحدی که این نظریه آزاد باشد به‌صورت عددی تخمین زد [6] که نتیجه‌ی نهایی آن برای جمله‌ی محدود برابر با

$$S_{\text{Free}}^{\text{finite}}(A) = -0.078 \frac{N^2 L^2}{\ell^2}$$

خواهد بود. این عدم تطابق کاملاً قابل انتظار بود چرا که در محاسبه‌ی اول که با استفاده از روش هولوگرافیک انجام شده فرض شده دوگان نظریه میدان جوابی در حد گرانش کلاسیک است که به‌معنی جفتیدگی توفت بسیار بزرگ در نظریه میدان است. اما محاسبه‌ای که از نظریه میدان گزارش شد صرفاً در حد نظریه میدان آزاد صحیح است لذا انتظار نمی‌رود این دو مقدار برابر باشند. به‌عبارت دیگر این محاسبه صراحتاً نشان می‌دهد که نسخه‌ی هولوگرافیک محاسبه‌ی آنتروپی درهمتنیدگی نمی‌تواند به‌عنوان بدیلی برای محاسبه‌ی آنتروپی درهمتنیدگی در نظریه میدان در نظر گرفته شود چرا که هنگامی که این نسخه ارزش محاسباتی دارد درجات

آزادی موثر نظریه میدان شناخته شده نیستند لذا نتیجه‌ای که از این روش برای نظریه میدان پیش‌بینی می‌شود عملاً فقط می‌تواند تخمینی از آنتروپی درهم‌تنیدگی میان تمامی درجات آزادی محبوس در ناحیه‌ی درهم‌تنیدگی و تمامی درجات آزادی خارج از آن ارائه دهد.

۳.۲ اثبات نسخه‌ی ریو- تاکایاناگی برای نواحی کروی

در این بخش یکی از روشهای اثبات پیشنهادی RT مرور می‌شود. این اثبات بر فرض صحت دوگانی پاددوسیته/همدیس استوار است و برای نواحی درهم‌تنیدگی کروی معتبر است. در نظریه میدان CFT_d ناحیه‌ی درهم‌تنیدگی A را به صورت یک کره‌ی S^{d-2} در نظر می‌گیریم. این کره روی وصله‌ی پوانکاره (اقلیدسی) که مختصات مرزی آن کروی باشد

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{d-2}^2) \quad (40)$$

به صورت $\rho = R$ است. با توجه به تقارن ناحیه‌ی درهم‌تنیدگی می‌توان سطح RT را به صورت $z = z(\rho)$ پارامتر بندی کرد لذا تابعی سطح برای این متریک به صورت

$$A = L^{d-1} \text{Vol}(S^{d-2}) \int_0^R d\rho \frac{\rho^{d-2}}{z(\rho)^{d-1}} \sqrt{1 + (\partial_\rho z)^2}$$

است. اگر معادله‌ی اوایلر- لاگرانژ را برای «کنش» فوق بنویسیم می‌توان مشاهده کرد که جواب این معادله در بعد دلخواه به صورت نیمکره

$$z(\rho) = \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

است. با اعمال این معادله در تابعی مساحت می‌توان آنتروپی درهم‌تنیدگی را برای نواحی کروی در حالت خلا نظریه میدان همدیس دوگان به دست آورد. از آنجایی که منظور از این زیر بخش مشاهده‌ی گام‌های اثبات CHM است لذا به نتیجه‌ی این محاسبه از این روش علاقه‌ای نداریم. قدم اصلی این اثبات اعمال تبدیل مختصات زیر را روی متریک فوق است. این تبدیل که به تبدیل CHM معروف است عبارت است از

$$\begin{aligned} z &= \frac{R^2}{R \cosh u + \sqrt{r^2 - R^2} \cos \frac{r}{R}} \\ t &= R \frac{\sqrt{r^2 - R^2} \sin \frac{r}{R}}{R \cosh u + \sqrt{r^2 - R^2} \cos \frac{r}{R}} \\ \rho &= R \frac{r \sinh u}{R \cosh u + \sqrt{r^2 - R^2} \cos \frac{r}{R}} \end{aligned} \quad (41)$$

که در نتیجه‌ی آن متریک (۴۰) به هندسه‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$ds^2 = \frac{L^2}{R^2} \left[\left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right)} + r^2 \left(du^2 + \sinh^2 u d\Omega_{d-2}^2 \right) \right] \quad (42)$$

این هندسه همان فضای پاددوسیه (اقلیدسی) در مختصات هذلولوی است که مرز آن فضای $S^1 \times \mathbb{H}^{d-1}$ است. به این هندسه سیاهچاله‌ی توپولوژیک پاددوسیه هم گفته می‌شود که دمای آن $T = 1/2\pi R$ می‌باشد. تحت این تبدیل ناحیه‌ی دره‌متیدگی که به صورت

$$\rho = R, \quad t = 0, \quad z = 0$$

تعریف شده بود به

$$r = \infty, \quad \tau = 0, \quad u = \infty$$

نگاشته می‌شود. در این مختصات با توجه به تقارن می‌توان سطح RT را به صورت $r = r(u)$ پارامتر بندی کرد و با کمینه کردن تابعی مساحت

$$A = \left(\frac{L}{R}\right)^{d-1} \int_0^\infty du (r \sinh u)^{d-2} \sqrt{r^2 - \frac{(\partial_u r)^2}{1 - r^2/R^2}}$$

جواب آن را به دست آورد. از روی معادله‌ی اوایلر-لاگرانژ این تابعی به سادگی می‌توان مشاهده کرد که جواب آن $r = R$ است که همان افق سیاهچاله‌ی توپولوژیک است. بدین ترتیب آنتروپی دره‌متیدگی ناحیه‌ی کروی در حالت خلاء به آنتروپی گرمایی در حالت دمایی نگاشته شد.

$$S(A) = S_{\text{BH}}(T)$$

که در رابطه‌ی بالا از معادل بودن آنتروپی سیاهچاله با آنتروپی حالت دما دار نظریه میدان دوگان (طبق واژهنامه دوگانی پاددوسیه/همدیس) استفاده شده است.

۴.۲ نسخه‌ی هموردای آنتروپی دره‌متیدگی هولوگرافیک

همان‌طور که در تعریف نسخه‌ی RT اشاره شد این نسخه برای نظریه میدان‌هایی که فضا-زمان دوگان به آنها ایستا باشد معتبر است. از آنجایی که حالت‌هایی در نظریه میدان وجود دارند که فضا-زمان دوگان آنها پایا، یا حتی به صورت عمومی وابسته به زمان است، سوال مطرح این است که آیا روش هولوگرافیک را می‌توان به گونه‌ای تعمیم داد که این حالت‌ها را نیز دربر بگیرد یا خیر؟ طبیعتاً پاسخ این سوال مثبت است و حدود یک سال پس از معرفی نسخه‌ی RT چنین تعمیمی از آن که به نسخه‌ی هموردا معروف است توسط هابنی، رنګمانی و تاکایانگی (HRT) معرفی شده است [۱۲]. در این بخش صرفاً برداشت نویسنده از ایده‌ی اصلی این نسخه به اجمال بیان می‌شود.

نکته‌ی اصلی در فضا زمان‌های ایستا این است که وجود بردار کیلینگ زمان‌گونه‌ای که عمود بر سطوح زمان ثابت^{۲۲} است باعث می‌شود مسئله‌ی یافتن دره‌متیدگی کوانتمی به مسئله‌ای روی فضا-زمانی با نشانگان اقلیدسی کاهش یابد. بدین ترتیب وقتی ناحیه‌ی دره‌متیدگی روی برش زمان ثابتی از خمینه‌ای که نظریه میدان روی آن تعریف شده مشخص می‌شود، می‌توان زمان در توده را معادل زمان روی مرز در نظر گرفت و بدین ترتیب یافتن سطحی در توده که روی مرز به مرز ناحیه‌ی دره‌متیدگی قلاب می‌شود و مساحت آن کمینه است خوش تعریف است.

اگر نظریه میدان در حالتی باشد که فضا-زمان دوگان آن بردار کیلینگ عمود بر سطوح زمان ثابت نداشته باشد، در این صورت برش بندی^{۲۳} سطوح زمان ثابت در توده مثل جواب‌های ایستا بدیهی نخواهد بود. از آنجا که در این صورت مسئله را نمی‌توان به مسئله‌ای با نشانگان اقلیدسی تقلیل داد، در نتیجه سطح کمینه در آن لزوماً خوش تعریف نخواهد بود. هسته‌ی مرکزی ایده‌ی حل

^{۲۲} hypersurface orthogonal

^{۲۳} foliation

این مسئله این است که اگر فضا-زمان ۳-بُعدی را در نظر بگیریم، سطح گسترده شده در توده که طول آن با آنتروپی درهمتنیدگی متناسب است ژئودزی خواهد بود. بدیهی است اگر نشانگان این فضا-زمان اقلیدسی باشد، ژئودزی‌های آن کمینه‌های موضعی تابعی طول خواهند بود و اگر نشانگان لورنتسی باشد، ژئودزی‌ها نقطه‌ی زینی این تابعی خواهند بود. لذا پیشنهادی HRT برای حل این مشکل در فضا-زمان‌های عمومی (غیر ایستا با بُعد دلخواه) این است که آنتروپی در حالت عمومی از روی نقطه‌ی زینی تابعی سطح به دست می‌آید که در حالت خاص فضا-زمان‌های ایستا به کمینه‌ی این تابعی (نسخه‌ی RT) تقلیل می‌یابد.

نکته‌ای که باید به آن توجه داشت این است که وجود (عدم وجود) بردار کیلینگ عمود بر سطوح زمان ثابت به معنی عدم وابستگی (وابستگی) زمانی آنتروپی درهمتنیدگی است. لذا انتظار می‌رود آنتروپی درهمتنیدگی در فضا-زمان‌های پایا (که بردار کیلینگ زمان‌گونه دارد) وابستگی زمانی نداشته باشد. اما در فضا-زمان‌های پایا علی‌رغم وجود بردار کیلینگ زمان‌گونه، از آنجا که این بردار عمود بر سطوح زمان ثابت نیست، (برخلاف فضا-زمان‌های ایستا) نمی‌توان مختصه‌ی زمانی درون توده را معادل مختصه‌ی زمانی نظریه میدان در نظر گرفت. از این رو ناحیه‌ی درهمتنیدگی که روی سطح زمان ثابت نظریه میدان تعریف می‌شود، لزوماً روی یک سطح زمان ثابت درون توده گسترده نخواهد شد. به همین دلیل باید در چنین نظریه میدان‌هایی (که دوگان آنها یک جواب پایای گرانشی است) با استفاده از نسخه‌ی هموردا سطوح نقطه زینی را برای محاسبه‌ی درهمتنیدگی کوانتمی در نظر گرفت.

صحت تحلیل مذکور در حالت ۳-بُعدی را می‌توان ساده‌تر از ابعاد بالاتر بررسی کرد. ساده‌ترین مثالی که می‌تواند نشان‌دهنده‌ی صحت این تصویر باشد مقایسه‌ی دو سیاه‌چاله‌ی BTZ است که یکی از آنها چرخش نداشته باشد (ایستا) و دیگری چرخان باشد (پایا). می‌توان هر دوی این جواب‌ها را با نسخه‌ی HRT مورد بررسی قرار داد. بدین ترتیب اگر مختصات این جواب‌ها را با (t, r, ϕ) نشان دهیم و $t = t(r)$ و $\phi = \phi(r)$ فرض کنیم، تابعی طول در هر دو مورد دو ثابت حرکت π_ϕ و π_t خواهد داشت که تکانه‌های مزدوج t و ϕ هستند. نکته‌ی مهمی که پس از کمی محاسبه می‌توان دید این است که در مورد BTZ غیرچرخان $\pi_t = 0$ به جواب‌های سازگار می‌انجامد اما در مورد BTZ چرخان با فرض $\pi_t = 0$ جواب سازگاری وجود ندارد. به عبارت دیگر از روی وجود جواب سازگار برای تابعی طول هم می‌توان به سادگی کاستی نسخه‌ی RT را در مورد جواب‌های پایا مشاهده کرد. در ادامه‌ی این بخش این محاسبه با جزئیات کامل بررسی می‌شود.

مثالی از نسخه‌ی هموردا

در این پیوست با محاسبه‌ی صریح آنتروپی درهمتنیدگی با استفاده از نسخه‌ی HRT نشان داده می‌شود که برای فضا-زمان‌های پایا، که به‌رغم دارا بودن بردار کیلینگ زمان‌گونه (و در نتیجه مستقل از زمان بودن آنتروپی درهمتنیدگی)، نسخه‌ی RT معتبر نیست. مطابق اطلاع نگارنده این محاسبه به‌صورت مستقیم از روش HRT تاکنون گزارش نشده است، هرچند نتیجه نهایی آن با استفاده از تکنیک تبدیل متریک BTZ به فضای موضعاً پاددوسیته و انجام محاسبه با استفاده از نسخه‌ی RT و در نهایت اعمال تبدیل معکوس مختصات پیش از این گزارش شده است [۱۲]. برای این منظور این محاسبه برای سیاه‌چاله‌ی BTZ انجام می‌شود ولی از آنجا که صرف پایا بودن جواب مد نظر است، برای سادگی محاسبات در حد فرینه انجام می‌شود. سیاه‌چاله‌ی BTZ در حد فرینه به‌صورت

$$ds^2 = -\frac{(r^2 - r_0^2)^2}{R^2 r^2} dt^2 + \frac{R^2 r^2}{(r^2 - r_0^2)^2} dr^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{r_0^2}{R r^2} dt \right)^2 \quad (43)$$

است که در آن شعاع R فضا و r_0 شعاع افق فرینه می‌باشد. با استفاده از نسخه‌ی HRT آنتروپی درهمتنیدگی برای نظریه میدان دوگان به این فضا به‌صورت

$$S(A) = \frac{1}{4G_N} \int \mathcal{L} dr \quad (44)$$

محاسبه می‌شود که در آن تابعی مساحت به صورت

$$\mathcal{L}^2 = -\frac{(r^2 - r_0^2)^2}{r^2} t'^2 + \frac{r^2}{(r^2 - r_0^2)^2} + r^2 \left(\phi' - \frac{r_0^2}{r^2} t' \right)^2 \quad (45)$$

و تکانه‌های مزدوج عبارتند از

$$\pi_t = -\frac{1}{\mathcal{L}} \left[r_0^2 \left(\phi' - \frac{r_0^2}{r^2} t' \right) + t' \frac{r^2}{(r^2 - r_0^2)^2} \right], \quad \pi_\phi = \frac{r^2}{\mathcal{L}} \left(\phi' - \frac{r_0^2}{r^2} t' \right) \quad (46)$$

و انتگرال روی رویه‌ی اکستریمال گسترده شده در توده محاسبه می‌شود. با جای‌گذاری تکانه‌ها در تابعی مساحت می‌توان دوشاخه‌ی این منحنی را به صورت

$$\mathcal{L} = \pm \frac{r}{\sqrt{\pi_t^2 r^2 + 2\pi_\phi \pi_t r_0^2 - \pi_\phi^2 (r^2 - 2r_0^2) + (r^2 - r_0^2)^2}} \quad (47)$$

بازنویسی کرد. با حل معادلات حرکت داریم

$$t_\pm(r) = C_\pm \pm (f(r) + g(r)) \quad (48)$$

$$\phi_\pm(r) = D_\pm \pm (f(r) - g(r)) \quad (49)$$

که

$$f(r) = \frac{\sqrt{r^2 (-\pi_\phi^2 + \pi_t^2 + r^2) + 2(\pi_\phi(\pi_\phi + \pi_t) - r^2)r_0^2 + r^4}}{2(\pi_\phi + \pi_t)(r^2 - r_0^2)}$$

$$g(r) = \frac{1}{4r_0} \log \left[\frac{\pi_\phi (r^2 - 2r_0^2) - \pi_t (r^2 + r_0^2)}{r^2 - r_0^2} - 4r_0(\pi_\phi + \pi_t)f(r) \right]$$

شش ثابت حرکت $(C_\pm, D_\pm, \pi_t, \pi_\phi)$ را می‌توان با اعمال شرایط مرزی برحسب ناحیه‌ی دره‌متیدگی روی مرز $(r \rightarrow r_\infty)$ که عبارتند از $(t^{(1)}, t^{(2)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)})$ و همچنین شرط پیوستگی توابع $\phi(r)$ و $t(r)$ در نقطه‌ی بازگشت

$$r_* = \frac{\sqrt{\pi_\phi^2 - \pi_t^2 + 2r_0^2} + (\pi_\phi + \pi_t) \sqrt{\pi_\phi^2 - 2\pi_\phi \pi_t + \pi_t^2 - 4r_0^2}}{\sqrt{2}}$$

که عبارتند از $t_-(r_*) = t_+(r_*)$ و $\phi_-(r_*) = \phi_+(r_*)$ به دست آورد. این ثوابت عبارتند از

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{r_*(\mathcal{F}t^{(1)} + \Delta\phi + \Delta t) - \log(\pi_- - \mathcal{F}r_*)}{\mathcal{F}r_*}, \\ C_- &= \frac{r_*(\mathcal{F}t^{(1)} - \Delta\phi + \mathcal{F}\Delta t) + \log(\pi_- - \mathcal{F}r_*)}{\mathcal{F}r_*}, \\ D_+ &= \frac{r_*(\mathcal{F}\phi^{(1)} + \Delta\phi + \Delta t) + \log(\pi_- - \mathcal{F}r_*)}{\mathcal{F}r_*}, \\ D_- &= \frac{r_*(\mathcal{F}\phi^{(1)} + \mathcal{F}\Delta\phi - \Delta t) - \log(\pi_- - \mathcal{F}r_*)}{\mathcal{F}r_*}, \\ \pi_+ &= -\frac{\mathcal{F}}{\Delta\phi + \Delta t}, \quad \pi_- = -\mathcal{F}r_* \coth[r_*(\Delta\phi - \Delta t)]. \end{aligned}$$

که در این فضا-زمان عبارت است از $R\Delta\phi \geq \Delta t$ می توان آنتروپی درهمتنیدگی را به صورت $\Delta t = t_2 - t_1$ و $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ و $\pi_{\pm} = \pi_{\phi} \pm \pi_t$ در نهایت بادر نظر گرفتن شرط فضاگونه بودن ناحیهی درهمتنیدگی

$$S_A = \frac{1}{\mathcal{F}G_N} \int_{r_*}^{r_{\infty}} dr \mathcal{F} \mathcal{L}_+ \quad (50)$$

$$= \frac{c}{\mathcal{F}} \log[r_{\infty}(\Delta\phi + \Delta t)] + \frac{c}{\mathcal{F}} \log\left[\frac{r_{\infty}}{r_*} \sinh(r_*(\Delta\phi - \Delta t))\right] \quad (51)$$

به دست آورد. حال از آنجا که

$$\pi_t = -\frac{1}{\Delta\phi + \Delta t} + r_* \coth[r_*(\Delta\phi - \Delta t)] \quad (52)$$

است. برای حالت $\Delta t = 0$ واضح است که فقط حالت بدیهی $\Delta\phi = 0$ جواب این معادله خواهد بود لذا نسخهی RT برای فضا-زمان های پایا جواب سازگار نخواهد داشت.

قدردانی

نگارنده قدردان تمام کسانی است که مطالب مربوط به این نوشتار را در بحث با آنها آموخته است. این افراد عبارتند از اعضای گروه جلسات هفتگی «گروه درهمتنیدگی» شامل محسن علیشاهیها، محمدرضا تنهایی، محمدرضا محمدی مظفر، امین فرجی، علی ناصح، فرزاد امیدی و «گروه گرانش کوانتمی» پژوهشکدهی فیزیک شامل کمال حاجیان، علی سراج، محمدمهدی شیخ جباری، محمدحسن وحیدینیا و همچنین تاداشی تاکایاناگی، نوبورو شیبا، ماساهیرو نوزاکی، پاول کاپوتا، پیرمارکو فوندا، تومونوری اوگاجین و ابیشیک چادوری.

مراجع

- [۱] I. Peschel, “Calculation of reduced density matrices from correlation functions.” J. Phys. A: Math.Gen., ۳۶ L۲۰۵ (۲۰۰۳) [cond-mat/۰۲۱۲۶۳۱];
- [۲] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy in free quantum field theory,” J. Phys. A ۴۲, ۵۰۴۰۰۷ (۲۰۰۹) [arXiv:۰۹۰۵.۲۵۶۲ [hep-th]].

- [3] P. Calabrese and J. L. Cardy, “Entanglement entropy and quantum field theory,” *J. Stat. Mech.* **0406**, P06002 (2004) [hep-th/0405152].
- [4] P. Calabrese and J. Cardy, “Entanglement entropy and conformal field theory,” *J. Phys. A* **42**, 504005 (2009) [arXiv:0905.4013 [cond-mat.stat-mech]].
- [5] S. N. Solodukhin, “Entanglement entropy of black holes,” *Living Rev. Rel.* **14**, 8 (2011) [arXiv:1104.3712 [hep-th]].
- [6] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006) [hep-th/0603001];
S. Ryu and T. Takayanagi, “Aspects of Holographic Entanglement Entropy,” *JHEP* **0608**, 045 (2006) [hep-th/0605073].
- [7] T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic Entanglement Entropy: An Overview,” *J. Phys. A* **42**, 504008 (2009) [arXiv:0905.0932 [hep-th]].
- [8] R. Bousso, “The Holographic principle,” *Rev. Mod. Phys.* **74**, 825 (2002) [hep-th/0203101].
- [9] P. Hayden, M. Headrick and A. Maloney, “Holographic Mutual Information is Monogamous,” *Phys. Rev. D* **87**, no. 4, 046003 (2013) [arXiv:1107.2994 [hep-th]].
- [10] J. Brown and M. Henneaux, “Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: An example from three dimensional gravity,” *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 229–257
- [11] H. Casini, M. Huerta and R. C. Myers, “Towards a derivation of holographic entanglement entropy,” *JHEP* **1105**, 036 (2011) [arXiv:1102.0440 [hep-th]].
- [12] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, “A Covariant holographic entanglement entropy proposal,” *JHEP* **0707**, 062 (2007) [arXiv:0705.0016 [hep-th]].