نظریه ذره-میدان
رهیافتی نوین برای نظریه مکانیک کوانتوم استاندارد

Particle-Field Theory: An Alternative Approach to Standard Quantum Mechanics

فاطمه احمدی، افشین شفیعی

پنجمین همایش ملی فیزیک بنیادی
نقش فیزیک بنیادی در تحولات آینده علوم

پژوهشگاه دانش‌های بنیادی

پاییز ۹۶

چرا فیزیک بنیادی؟

اهداف

- یافتن معنای نوینی از تابع موج برای توضیح این که چرا شکل آن چگالی احتمال یافتن یک ذره در هرجایی از فضا را تعیین می‌کند.

اهداف

- یافتن معنای نوینی از تابع موج برای توضیح این که چرا شکل آن چگالی احتمال یافتن یک ذره در هرجایی از فضا را تعیین می‌کند.
- تعمیم معادله شرودینگر به طوری‌که شامل جمله‌های غیر خطی هم باشد.

اهداف

- یافتن معنای نوینی از تابع موج برای توضیح این که چرا شکل آن چگالی احتمال یافتن یک ذره در هرجایی از فضا را تعیین می‌کند.
- تعمیم معادله شرودینگر به طوری‌که شامل جمله‌های غیر خطی هم باشد.
- توضیح پدیده تونل زنی

اهداف

- یافتن معنای نوینی از تابع موج برای توضیح این که چرا شکل آن چگالی احتمال یافتن یک ذره در هرجایی از فضا را تعیین می‌کند.
- تعمیم معادله شرودینگر به طوری‌که شامل جمله‌های غیر خطی هم باشد.
- توضیح پدیده تونل زنی
- سازگاری با نظریه نسبیت

فهرست مطالب

- قواعد کلی
- معادله شرودینگر غیر خطی
- کاربرد: پدیده تونل زنی
- معادله شرودینگر نسبیتی
- اتم هیدروژن نسبیتی

برای توصیف یک ذره در حرکت یک بعدی، سه هویت فیزیکی معرفی می‌شود:

ذره ای به جرم m و مکان $x(t)$

معادله حرکت : $$m\frac{d^{2}x(t)}{dt^{2}} = f_P$$

f_P : نیروی وارد بر ذره

نیروی پایستار $\Longleftarrow$ پایستگی انرژی $E_P = V_P + K_P$

$K_P = \frac{p_P^{2}}{2m}$: انرژی جنبشی، V_P : انرژی پتانسیل، p_P : اندازه حرکت

میدان $X(x(t), t)$

سرعت میدان :

$$v_F = |\frac{dX}{dt}| = |\dot{X}|$$

v_P : سرعت ذره

$$\dot{X} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) v_P + \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)$$

میدان $X(x(t), t)$

سرعت میدان : $v_F = |\frac{dX}{dt}| = |\dot{X}|$

v_P : سرعت ذره $\dot{X} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) v_P + \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)$

تحول میدان : $m\frac{d\dot{X}}{dt} = f_F$

میدان $X(x(t),t)$

سرعت میدان : $v_F = |\frac{dX}{dt}| = |\dot{X}|$

v_P : سرعت ذره $\dot{X} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) v_P + \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)$

تحول میدان : $m\frac{d\dot{X}}{dt} = f_F$

f_P : نیروی پایستار $X = \chi(x(t))$

$$v_F = |(\frac{d\chi}{dx})|v_P = |\chi'|v_P, \qquad f_F = mv_P^{۲}\frac{d|\chi'|}{dx} + |\chi'|f_P$$

انرژی میدان : $E_F = V_F + K_F$

انرژی جنبشی میدان: $K_F = \frac{۱}{۲} m v_F^{۲} = K_P |\chi'|^{۲}$

انرژی میدان : $E_F = V_F + K_F$

انرژی جنبشی میدان: $K_F = \frac{۱}{۲} m v_F^{۲} = K_P |\chi'|^{۲}$

انرژی کل $E = E_P + E_F$

$$
\begin{aligned}
E &= V_P + (E_F + \frac{p_P^2}{2m}) \\
&= V_P + \frac{p^2}{2m}
\end{aligned}
$$

V_P : انرژی پتانسیل ذره

$$\frac{p^{۲}}{۲m} = E_F + \frac{p_P^{۲}}{۲m}$$

$$\frac{p^{۲}}{۲m} = E_F + \frac{p_P^{۲}}{۲m}$$

ویژگی دوگانه ذره–میدان:

رابطه دوبروی

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

λ : طول موج

$$k = \frac{۲\pi}{\lambda}$$

برای حالت‌های مانا، شکل میدان در معادله مستقل از زمان شرودینگر صدق می‌کند:

$$\chi'' = -k^{2}\chi \qquad k^{2} = \frac{p^{2}}{\hbar^{2}} = \frac{2m}{\hbar^{2}}(E - V_P)$$

میدان حقیقی و وابسته به $x(t)$ ، به طور جزئی یک نیروی نوسانی را تجربه می‌کند:

$$f_F = -m\bar{\omega}^{2}\chi + |\chi'|f_P \qquad \bar{\omega}^{2} = v_P^{2}k^{2}$$

برای حالت‌های مانا، شکل میدان در معادله مستقل از زمان شرودینگر صدق می‌کند:

$$\chi'' = -k^2\chi \qquad k^2 = \frac{p^2}{\hbar^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_P)$$

میدان حقیقی و وابسته به $x(t)$ ، به طور جزئی یک نیروی نوسانی را تجربه می‌کند:

$$f_F = -m\bar{\omega}^2\chi + |\chi'| f_P \qquad \bar{\omega}^2 = v_P^2 k^2$$

تابع موج کوانتومی

$$\Psi(x(t)) = \frac{N\chi(x(t))}{A}$$

$$\chi(x(t)) = Af(x(t)) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(x(t)) = Nf(x(t))$$

مکانیک کوانتوم استاندارد

ذره یا موج

مکانیک بوهمی

ذره و موج

مکانیک کوانتوم استاندارد

ذره یا موج

مکانیک بوهمی

ذره و موج

مکانیک کوانتوم استاندارد

ذره یا موج

ذره–میدان (PF)

مکانیک بوهمی

ذره و موج

مکانیک کوانتوم استاندارد

ذره یا موج

ذره-میدان (PF)

انرژی جنبشی: $K_{PF} = \frac{۱}{۲} m\dot{q}^۲$ $\quad K_{PF} \propto K_P + K_F$

سرعت : $\dot{q}$ $\quad$ مکان : q

g_{PF} : ضریب تناسب

$$\dot{q}^{۲} = g_{PF}^{۲}(\dot{x}^{۲} + |\dot{X}|^{۲})$$

مسیر حرکت سیستم PF :

$$q(x,t) = g_{PF} \int dx \sqrt{\left(۱ + |\frac{dX(x,t)}{dx}|^{۲} \right)}$$

g_{PF} : ضریب تناسب

$$\dot{q}^۲ = g_{PF}^۲(\dot{x}^۲ + |\dot{X}|^۲)$$

مسیر حرکت سیستم PF :

$$q(x,t) = g_{PF} \int dx \sqrt{\left(۱ + |\frac{dX(x,t)}{dx}|^۲\right)}$$

تحول سیستم ذره-میدان

f_{PF} : نیروی وارد بر سیستم PF

$$m\frac{d^۲q}{dt^۲} = f_{PF}$$

نیروی پایستار

$$E = E_F + E_P = f(V_{PF}, K_{PF})$$

$$\frac{\partial V_{PF}}{\partial q} = -f_{PF}$$

معادله شرودینگر غیر خطی

$$f_F = mv_P^{۲}\chi'' + \chi' f_P$$

معادله شرودینگر غیر خطی

میدان مانا (سیستم یک بعدی) :

$$f_{FI} = -m\bar{\omega}^{۲}\chi + m\varepsilon'\chi^{۳} + \ldots$$

$$f_F = m\upsilon_P^{۲}\chi'' + \chi' f_P$$

معادله شرودینگر غیر خطی

میدان مانا (سیستم یک بعدی) :

$$f_{FI} = -m\bar{\omega}^{۲}\chi + m\varepsilon'\chi^{۳} + \dots$$

$$f_F = mv_P^{۲}\chi'' + \chi' f_P$$

$$-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\chi'' + V\chi = E\chi - \frac{\varepsilon'\hbar^{۲}}{۲p_P}\chi^{۳}$$

تکانه خطی ذره $p_P = \sqrt{۲m(E_P - V_P(x))}$:

معادله شرودینگر خطی $\Longleftarrow$ $\varepsilon' \to ۰$

$$\chi = \chi^{(۰)} + \varepsilon\chi^{(۱)} + O(\varepsilon^{۲})$$

$\chi^{(۰)}$: پاسخ معادله شرودینگر خطی مستقل از زمان

$\chi^{(۱)}$: اولین تصحیح تابع موج

بنابراین اکنون می‌توانیم ساختار ریزترازهای انرژی که معادله شرودینگر خطی قادر به پیش‌بینی آنها نیست را به دست آوریم و پدیده‌های وابسته به زمان را با اثرات غیر خطی بررسی کنیم.

مثال: ذره در جعبه یک بعدی

$$\chi''(u) + \chi(u) - \frac{\varepsilon}{k^۲}\chi^۳(u) = ۰$$

$$u = kx, \quad ۰ \leq x \leq a \quad ; \quad k = \frac{۲mE}{\hbar^۲}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{mv_P^۲}$$

$$\chi = A\cos((۱ - \frac{۳\varepsilon}{۸k^۲}A^۲)kx + B) - \frac{\varepsilon}{۳۲k^۲}A^۳\cos(۳(۱ - \frac{۳\varepsilon}{۸k^۲}A^۲)kx + ۳B)$$

$$\chi(۰) = \chi''(۰) = ۰ \quad \Longrightarrow \quad B = \pm\frac{\pi}{۲}$$

$$\chi(a) = \chi''(a) = ۰ \quad \Longrightarrow \quad (۱ - \frac{۳\varepsilon}{۸k^۲}A^۲)ka = \pm n\pi$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$\begin{aligned}\chi &= A_n \sin(\frac{n\pi x}{a}) + \frac{\varepsilon}{32k_n^2} A_n^3 \sin(3\frac{n\pi x}{a}) + O(\varepsilon^2) \\ &\simeq A_n \sin(\frac{n\pi x}{a})\end{aligned}$$

تصحیح مرتبه اول انرژی:

$$E_n \simeq \frac{n^۲ h^۲}{۸ma^۲}\left[\frac{۱}{۲} + \left[\frac{۱}{۴} + \frac{۳\varepsilon A_n^۲ a^۲}{۸n^۲\pi^۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}\right]^۲ + O(\varepsilon^۲)$$

وقتی ε به صفر میل می‌کند، انرژی به همان مقدار عادی خود در جعبه یک بعدی تبدیل می‌شود. هر گونه تایید تجربی معادله فوق بیانگر صحت حضور میدان‌ها است.

پدیده تونل زنی

سد پتانسیل

$$\begin{aligned} V(x) &= V_0 \qquad & 0 \leq x \leq a \\ &= 0 \qquad & -\infty \leq x \leq 0, a \leq x \leq \infty \end{aligned}$$

ناحیه I

معادله شرودینگر مستقل از زمان در ناحیه I

$$\chi_I'' = -k^۲\chi$$

$$k = \sqrt{\frac{۲mE}{\hbar^۲}}$$

$$\chi_I = R_I \cos(kx + \vartheta_I)$$

معادله حرکت میدان در ناحیه I

$$\frac{d^۲\chi_I}{dt^۲} = -\omega_I^۲\chi_I$$

$v_{P,I}$: سرعت ذره در ناحیه I

$$\omega_I = v_{P,I}k$$

انرژی جنبشی میدان
$$K_{F,I} = \frac{1}{2}m\omega_I^2 R_I^2 \sin^2(kx - \vartheta_I)$$

انرژی پتانسیل میدان
$$V_{F,I} = \frac{1}{2}m\omega_I^2 R_I^2 \cos^2(kx - \vartheta_I)$$

انرژی کل میدان
$$E_{F,I} = \frac{1}{2}m\omega_I^2 R_I^2 = K_{P,I} k^2 R_I^2$$

انرژی جنبشی ذره در ناحیه I
$$K_{P,I} :$$

انرژی کل سیستم در ناحیه I
$$E = K_{P,I}(۱ + k^۲ R_I)$$

ناحیه II

$$\chi_{II} = R_{II} \cosh(kx + \vartheta_{II}) \qquad k = \sqrt{\frac{۲m(V_۰ - E)}{\hbar^۲}}$$

معادله حرکت میدان در ناحیه II

$$\frac{d^۲\chi_{II}}{dt^۲} = \omega_{II}^۲ \chi_{II}$$

$v_{P,II}$: سرعت ذره در ناحیه II

$$\omega_{II} = v_{P,II} k$$

علامت نیروی فنر مانند مشخص می‌کند باید یک انرژی پتانسیل جاذبه متناظر با انرژی کل وجود داشته باشد. به عبارت دیگر، در این ناحیه ذره انرژی را از میدان اطراف می‌گیرد تا انرژی جنبشی خود را افزایش دهد.

انرژی پتانسیل میدان

$$V_{F,II} = -\frac{۱}{۲} m\omega_{II}^{۲} R_{II}^{۲} \cos^{۲}(kx - \vartheta_{II})$$

علامت منفی نشان دهنده این است که بر خلاف سد انرژی که ذره احساس می‌کند، برای میدان یک انرژی جاذبه یا چاه پتانسیل وجود دارد که جمعا انرژی پتانسیل کل ذره-میدان را کاهش می‌دهد.

انرژی جنبشی میدان

انرژی کل میدان

انرژی جنبشی ذره در ناحیه II

$$\begin{aligned} K_{F,II} &= \frac{1}{2} m\omega_{II}^2 R_{II}^2 \sin^2(kx - \vartheta_{II}) \\ E_{F,II} &= -\frac{1}{2} m\omega_{II}^2 R_{II}^2 = -K_{P,II} k^2 R_{II}^2 \\ K_{P,II} &: \end{aligned}$$

انرژی کل سیستم در ناحیه II

$$\begin{aligned} E &= K_{P,II} + V_0 - K_{P,II} k^2 R_{II}^2 \\ &= K_{P,II}(1 - k^2 R_{II}) + V_0 \end{aligned}$$

سیستم ذره–میدان مقدار کاهش یافته سد پتانسیل را تجربه می‌کند. وقتی ذره وارد منطقه ممنوعه می‌شود با میدان خود انرژی مبادله می‌کند به طوری که انرژی جنبشی ذره افزایش و انرژی میدان اطراف آن کاهش می‌یابد. اما کل انرژی سیستم ذره–میدان ثابت است.

$$E = \frac{K_{P,I}}{1 - \frac{p_{P,I}^2 R_I^2}{\hbar^2}} \qquad E > 0 \Longrightarrow \quad p_{P,I}^2 R_I^2 < \hbar^2$$

وقتی انرژی جنبشی ذره زیاد می‌شود، دامنه میدان کاهش پیدا می‌کند. هر چه انرژی جنبشی ذره افزایش پیدا کند، به انرژی کل نزدیکتر می‌شود به طوری که

$$E \to K_{P,I} \qquad \Longrightarrow R_I \to 0$$

$$E = \frac{K_{P,II}}{1 - \frac{p_{P,II}^2 R_{II}^2}{\hbar^2}} + V_0 \qquad E < V_0 \Longrightarrow \quad p_{P,II}^2 R_{II}^2 > \hbar^2$$

دامنه میدان در داخل سد پتانسیل $$R_{II} = \pm\frac{\hbar}{p_{P,II}}(1 + \frac{K_{P,II}}{V_0 - E})^{\frac{1}{2}}$$

دامنه میدان در داخل سد پتانسیل نمی‌تواند صفر شود $$E < V_0 \quad \Longrightarrow$$

اگر انرژی جنبشی ذره به مقدار قابل توجهی افزایش پیدا کند:

$$R_{II} \to \pm\frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} = \pm\frac{1}{k} \quad \Longrightarrow \quad E \to V_0$$

که با فرض اولیه یعنی $E < V_0$ سازگار نیست. انرژی جنبشی ذره داخل سد کراندار است و بنابراین سهم انرژی میدان قابل چشم پوشی نیست.

تعمیم نسبیتی معادله شرودینگر مستقل از زمان

$$\gamma_p = \left(1 - \frac{v_p^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad m_p = \gamma_p m_{\circ} \qquad \frac{d(m_p \dot{\chi})}{dt} = f_{rF}$$

$m_{\circ}$: جرم سکون و m_p : جرم نسبیتی ذره

نیروی وارد بر میدان

$$f_{rF} = f_{rP}\chi' + \gamma_P m_{\circ} v_P^2 \chi''$$

قانون کلی برای میدانهای حقیقی و مانا

$$-m_P\bar{w}^2\chi = \gamma_P m_0 v_P^2 \chi''$$

p : تکانه دوبروی نسبیتی

$$\bar{w}^2 = k^2 v_P^2 \qquad k = \frac{p}{\hbar}$$

$$-\hbar^2\chi'' = p^2\chi$$

همان شکل معادله شرودینگر غیر نسبیتی را دارد. برای پیدا کردن مقدار p، باتوجه به این واقعیت که انرژی پتانسیل ذره به جرم آن بستگی دارد یا نه، دو حالت را در نظر می‌گیریم:

انرژی پتانسیل ذره وابسته به جرم است:

$$\begin{aligned} E &= \gamma_P(V_{nrP} + m_0c^2) + E_{rF} \\ &= \gamma(V_{nrP} + m_0c^2) \end{aligned}$$

انرژی پتانسیل ذره مستقل از جرم است:

$$\begin{aligned} E &= V_{nrP} + \gamma_P m_0 c^2 + E_{rF} \\ &= V_{nrP} + \gamma m_0 c^2 \end{aligned}$$

انرژی پتانسیل ذره وابسته به جرم است:

$$\begin{aligned} E &= \gamma_P (V_{nrP} + m_0 c^2) + E_{rF} \\ &= \gamma (V_{nrP} + m_0 c^2) \end{aligned}$$

انرژی پتانسیل ذره مستقل از جرم است:

$$\begin{aligned} E &= V_{nrP} + \gamma_P m_0 c^2 + E_{rF} \\ &= V_{nrP} + \gamma m_0 c^2 \end{aligned}$$

انرژی پتانسیل ذره وابسته به جرم است:

$$\begin{aligned} E &= \gamma_P (V_{nrP} + m_0 c^2) + E_{rF} \\ &= \gamma (V_{nrP} + m_0 c^2) \end{aligned}$$

$$p = \gamma m_{۰} v$$

$$\gamma = \left(۱ - \frac{v^۲}{c^۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱ + \frac{p^۲}{m_{۰}^۲ c^۲}}$$

معادله شرودینگر نسبیتی در حالتی که انرژی پتانسیل وابسته به جرم ذره است:

$$-\frac{\hbar^۲}{۲m_۰}\chi'' + \frac{۱}{۲}m_۰c^۲\chi = \frac{E^۲}{۲m_۰c^۲}\left(۱ + \frac{V_{nrP}}{m_۰c^۲}\right)^{-۲}\chi$$

معادله شرودینگر نسبیتی در حالتی که انرژی پتانسیل وابسته به جرم ذره است:

$$-\frac{\hbar^۲}{۲m_.}\chi'' + \frac{۱}{۲}m_.c^۲\chi = \frac{E^۲}{۲m_.c^۲}\left(۱ + \frac{V_{nrP}}{m_.c^۲}\right)^{-۲}\chi$$

معادله شرودینگر نسبیتی در حالتی که انرژی پتانسیل مستقل از جرم ذره است:

$$-\frac{\hbar^۲}{۲m_.}\chi'' + \frac{۱}{۲}m_.c^۲\chi = \frac{E^۲}{۲m_.c^۲}\left(۱ + \frac{V_{nrP}}{m_.c^۲}\right)^{-۲}\chi$$

اتم هیدروژن نسبیتی

انرژی پتانسیل غیر نسبیتی:

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

$$\begin{aligned} &- \quad \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right]\chi(r) \\ &+ \quad \frac{1}{2}m_0c^2\chi(r) = \frac{1}{2m_0c^2}(E - V_{nrp}(r))^2\chi(r) \end{aligned}$$

اتم هیدرووژن نسبیتی

انرژی پتانسیل غیر نسبیتی:

$$V(r) = -\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{e^۲}{r}$$

$$\begin{aligned} - \quad & \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right]\chi(r) \\ + \quad & \frac{1}{2}m_0c^2\chi(r) = \frac{1}{2m_0c^2}(E - V_{nrp}(r))^2\chi(r) \end{aligned}$$

$$\chi(r) = R(r)Y(\theta,\phi)$$

$$E = m_{۰}c^{۲} + E_n - \frac{E_n^{۲}}{۲m_{۰}c^{۲}}[\frac{۴n}{(l+\frac{۱}{۲})} - ۳]$$

$$E_n = -\frac{m_{۰}}{۲\hbar^{۲}}(\frac{e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{۰}})^{۲}\frac{۱}{n^{۲}}$$

با نتایج تصحیح نسبیتی اتم هیدروژن با استفاده از نظریه اختلال مرتبه اول سازگار است [۱]

$۱.F.Ahmadi, A.Shafiee, arXiv : ۱۷۰۹.۰۷۳۰۶, (۲۰۱۷)$

بحث و نتیجه گیری

- ذره و میدان به صورت یک هویت واحد به نام ذره–میدان
- معادله شرودینگر غیر خطی

میدان تحت تاثیر یک نیروی شبه نوسانی قرار دارد که می‌توان تا مرتبه اول با یک نوسانگر هماهنگ ساده تقریب زد. با درنظر گرفتن جملات مرتبه‌های بالاتر، می‌توان شکل غیر خطی معادله شرودینگر را به دست آورد [۱] .

- سازگاری با نظریه نسبیت خاص
- کاربردها

پدیده تونل زنی ، آزمایش دو شکاف، مشکل اندازه گیری، پارادوکس EPR [۲]

۱. A. Shafiee, Pramana journal of physics, ۷۶, No. ۶, ۸۴۳ – ۸۷۳, (۲۰۱۱)
۲. A. Shafiee, arXiv : ۰۸۱۰.۱۰۳۳, (۲۰۰۹)

با تشکر از توجه شما