مروری بر نظریه های اختلالی QED و QCD

ابوالفضل میر جلیلی

پژوهشگاه دانشهای بنیادی

پژوهشکده فیزیک

۱۶ شهریور ۱۳۸۴

چکیده: این درسنامه شامل سه بخش می باشد. دربخش اول تاریخچه‌فیزیک ذرات بنیادی از زمانی که‌الکترون در سال ۱۸۹۷ کشف گردید تا ارائه مدل کوارکی تو سط گلمان مورد بررسی قرار می گیرد.در بخش دوم نظریه الکترو دینامیک کوانتمی جهت توصیف الکترو مغناطیسی اندر کنشهای ذرات بنیادی معرفی می شود. در بخش آخر نگاهی خواهیم داشت بر انجام محاسبات مر تبه دوم در نظریه های اختلالی QED وQCD . حضور حلقه‌ها در دیاگرامهای فاینمنِ مربوط و بالطبع آن واگرا ئیها و نا محدود شدن دامنه پراکندگی مورد توجه قرار می گیرد. یکی از راههای غلبه بر این مشکل آن است که کمیاتی نظیر بار الکتریکی و جرم را مجدداً تعریف نموده تا نتیجه نهائی برای دامنه های پراکندگی محدود باقی بماند. این عمل را اصطلاحاً باز بهنجارش پذیری می نا مند.شکل های دیگر باز بهنجارش پذیری کمیات نیز مورد بحث قرار میگیرد.

۱ مرور تاریخی بر فیزیک ذرات بنیادی

فیزیک ذرات بنیادی در سال ۱۸۹۷ و با کشف الکترون توسط تامسون متولد شد. سپس رادرفورد با آزمایش پراکندگی ذرات آلفا از ورقه‌ی نازک طلا، نشان داد که اتم باید از هسته‌ای متراکم و سنگین تشکیل شده باشد. این هسته از ذراتی با بار مثبت به نام پروتون تشکیل شده که در کنار هم قرار گرفته‌اند. در سال ۱۹۱۴ بوهر مدلی را برای هیدروژن پیشنهاد داد که از یک الکتر ون تشکیل شده و در اطراف هسته در حرکت بود.

بور توانست طیف هیدروژن را محاسبه کند که توافق آن با آزمایش جالب بود. اتم سنگین تر بعدی (هلیوم) گرچه‌دو الکترون دارد ولی وزن آن چهار برابر اتم هیدروژن است. لتیوم هفت برابر هیدروژن وزن دارد و غیره. این معما سرانجام در سال ۱۹۳۲ با کشف نوترون توسط چادویک حل شد. ذره‌ای که مانند پروتون اما بدون بار الکتریکی است.

اما چه چیزی این ذراتِ با بار مثبت را، که شدیداً یکدیگر را دفع می‌کنند، در کنار هم نگه داشته است؟. یوکاوا در سال ۱۹۳۴ فرض کرد که پروتون‌ها و نوترون‌ها به وسیله‌ی نیرویی که قویتر از نیروی دافعه الکتریکی است و نیروی قوی هسته‌ای نامیده می شود با یکدیگر در ارتباط بوده ودر کنار هم قرار گرفته‌اند. ذره‌ی ناقل این نیرو را مزون پی (پایون[۱]) نامید. اگر یک نوکلئون، یک مزون با جرم سکون M گسیل کند، پایستگی انرژی، حداقل به اندازه‌ی $\Delta E = Mc^{۲}$ نقض خواهد شد. اما طبق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، این نقضِ پایستگی، برای مدت زمانی که در رابطه‌ی $\Delta E.\Delta t \geq \hbar$ صدق کند مجاز می‌باشد. در نتیجه:

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{Mc^{۲}} \,. \qquad (۱-۱)$$

بُرد نیروی قوی به طور تجربی تقریباً برابر با $۱۰^{-۱۳}$ سانتیمتر برآورد شده است. در نتیجه با استفاده از رابطه بالا جرم پایون حدود ۳۰۰ برابر جرم الکترو ن (۱۵۰ Mev) بدست می آید که با مقدار تجربی که برای جرم پایون بدست آ مده است (۱۴۰ Mev) بخوبی سازگارمی باشد. چون این مقدار، کمتر از جرم پروتون است ذره‌ی ناقل را مزون (یعنی ذره‌ی میانی) نامیدند.

مرحله بعد در گسترش فیزیک ذرات مربوط به پیش بینی و کشف ذره ای بنام نو ترینو می باشد . وجود این ذره برای اولین بار در واپاشی بتای هسته‌ای مطرح شد. واپاشی زیر را واپاشی بتای هسته‌ای می‌نامیم:

$$N_{A,Z} \longrightarrow N_{A,Z+۱} + e^{-} \,, \qquad (۲-۱)$$

که در آن $N_{A,Z}$، یک هسته با عدد جرمی A و عدد اتمی Z است. اگر $M_{A,Z} < M_{A,Z+۱} + M_e$ باشد (M جرم هسته است)، بدین معنی است که انرژی پیوند منفی است و $N_{A,Z}$ هسته‌ای پایدار است. اگر $M_{A,Z} > M_{A,Z+۱} + M_e$ باشد، این هسته ناپایدار است و خود به خود واپاشی می‌کند. ساده‌ترین واپاشی بتای هسته‌ای، تجزیه‌ی یک نوترون به یک پروتون و یک الکترون است. چون جرم نوترون از مجموع جرم‌های پروتون و الکترون بیشتر است پس نوترون ناپایدار است و (اگر منفرد باشد) خود به خود واپاشی می‌کند.

---

[۱] pion

اولین بار که واپاشی نوترون مشاهده شد، توازن انرژی در دو طرف رابطه (۱—۲) برقرار نبود و دانشمندان در صدد حل این معما بودند. نیلز بوهر پیشنهاد داد که قانون بقای انرژی کنار زده شود. اما مشکل اینجا بود که اسپین نیز در واپاشی نوترون پایسته نمی‌ماند. بدین دلیل، پائولی پیشنهاد داد که ذره‌ی دیگری با اسپین نیم صحیح نیز باید تولید شود، یعنی:

$$n \longrightarrow p + e^- + \overline{\nu}\,. \qquad (۳-۱)$$

اسپین $\overline{\nu}$ برابر است با ۱/۲ – که پایستگی اسپین را برقرار می‌سازد. ذره‌ی ν را نوترینو می‌نامند.

یک دلیل بارزدیگر بر وجود نوترینو در واپاشی بتای هسته‌ای آن است که انرژی الکترون تولید شده در این واپاشی ثابت نبوده و متغیر می باشد. اگر محصولات نهایی یک واپاشی، فقط دو ذره باشد و ذره‌ی مادر درحال سکون باشد، در دستگاه مختصات مرکز جرم، دو ذره‌ی تولید شده باید با اندازه حرکت‌های مساوی و در خلاف جهت یکدیگر حرکت کنند (قانون پایستگی اندازه حرکت). پس هر بار که آزمایش را انجام می‌دهیم انرژی ذرات تولید شده نباید تفاوت کند. اما اگر سه ذره یا بیشتر تولید شود، زاویه‌ی بین جهت انتشار ذرات می‌تواند تغییر کند. پس اندازه حرکت و در نتیجه انرژی ذرات تولید شده، از یک آزمایش به آزمایش دیگر می‌تواند تغییر کند. در واپاشی بتای هسته‌ای انرژی الکترون تولید شده‌که بطور آزمایشگاهی اندازه گیری می شود متغیر است و این دلالت بر وجود ذره‌سومی در محصولات واپاشی دارد که آنرا نوترینو می نامند.

به لحاظ تاریخی جرم سکون نوترینو باید صفر فرض شده است. زیرا ثابت شده که نوترینو ذره‌ای قطبیده است. بدین معنا که اسپین آن با راستای حرکت آن پاد موازی است. حال اگر یک نوترینو با سرعتی کمتر از سرعت نور در راستای مثبت x حرکت کند، همواره یک ناظر وجودخواهد داشت که در راستای مثبت x و با سرعتی بیش از آن حرکت کند. از دید این ناظر، نوترینو در راستای منفی x حرکت خواهد نمود ولیکن جهت اسپین تغییرنخواهد کرد. به عبارتی می‌توان با تبدیل دستگاه مختصات، یک نوترینو را به پاد نوترینو تبدیل نمو د که این غیر ممکن است. پس نوترینو دارای سرعتی برابر با سرعت نوربوده و جرم سکون آن صفرمی باشد.

۱.۱ باریونها و مزونها

در سال ۱۹۴۷ راچستر و باتلر عکس یک اتاقک ابری را منتشر کردند که در آن پرتو کیهانی پس از عبور ازطبقات فوقانی جوّ به یک صفحه‌ی سربی برخورد می‌کرد. ردهای V شکل بجا مانده در زیراین صفحه حکایت ازواپاشی یک ذره‌ی سنگین با جرمی حدود ۱۰۰۰ برابر جرم الکترون به یک پایون مثبت و یک پایون منفی را داشته است. این ذره را

کایون خنثی (K°) نامیدند. دو سال بعد پائولی عکسی را منتشر کرد که واپاشی یک کایون باردار را به سه پایون نشان می‌داد:

$$K^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \qquad (۴-۱)$$

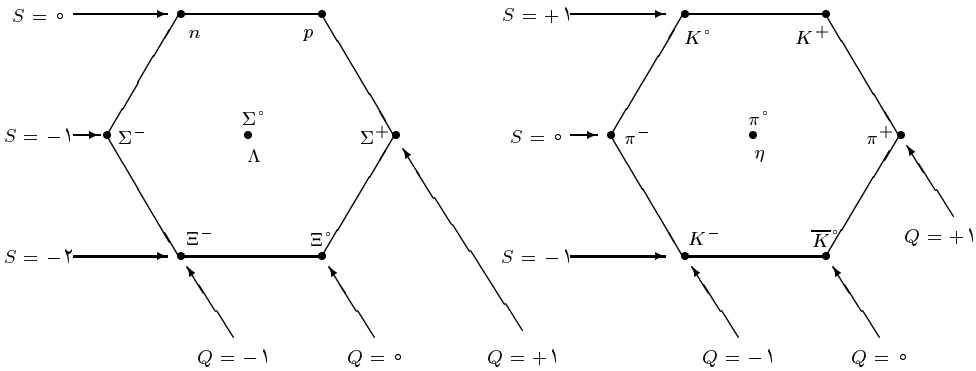
کایون ها را در خانواده‌ی " مزون ها" قرار دادند.

در سال ۱۹۵۰ ذره‌ی سنگین دیگری کشف گردید که به یک پروتون و یک پایون واپاشی می‌کردو آنرا لاندا نامیدند :

$$\Lambda \longrightarrow p^+ + \pi^- \qquad (۵-۱)$$

لاندا را همراه با پروتون و نوترون در خانواده‌ی "باریونها" جای دادند. به مجموعه ذرات جدیدی که بدین ترتیب کشف گردیدندذرات شگفت نامیدند. شگفتی این ذرات به این دلیل بود که معلوم شد آنها به میزان بسیار فراوان (در یک مقیاس زمانی حدود $۱۰^{-۲۳}$ ثانیه) تولید می‌شوند ولی تقریباً کُند واپاشی می‌کنند (حدود $۱۰^{-۱۰}$ ثانیه). امروزه می‌دانیم که تولید ذرات شگفت توسط نیروی قوی صورت می گیرد ولیکن واپاشی آنها تحت تاثیر نیروی ضعیف (نیروی دخیل در واپاشی بتا) می باشد. در پی مشاهدات دیگر تعداد این ذرات رو به افزونی نهاد.از اینرو به نظر می آید که نیاز مند به طبقه بندی جدیدی برای این ذرات می باشیم.

در سال ۱۹۶۱ موآری گلمان[۲] مدل راه هشتگانه [۳] راجهت طبقه بندی ذرات بنیادی ارائه نمود [۱]. در این مدل، باریون هاو مزون ها، بسته به بار الکتریکی و عدد شگفتی که حمل می کنند در آ رایهای منظم هندسی جای می گیرند. بعنوان مثال هشت باریون سبک و هشت مزون سبک، هر کدام می توانند مطابق شکل زیر در رئوس یک هشت ضلعی قرارگرفته و دو ذره‌دیگر نیز در مرکز آنها جای گیرد.



شکل (۱−۱): هشت تایی مزونی

شکل (۱−۲): هشت تایی باریونی

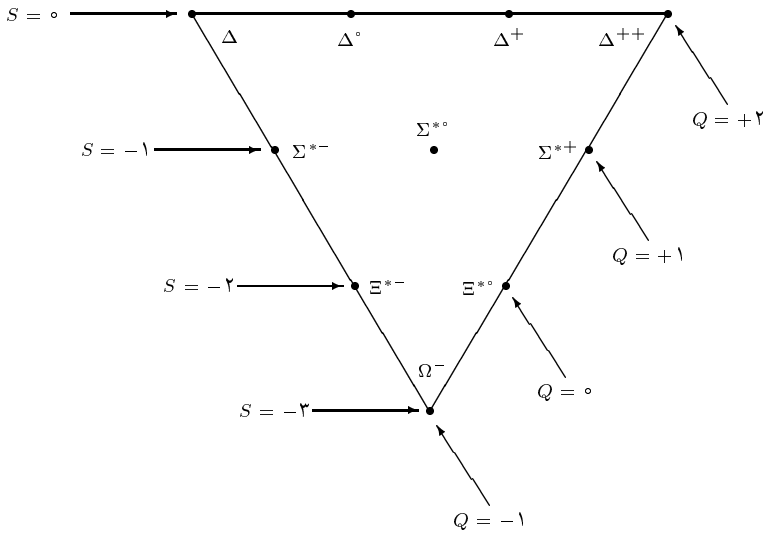
[۲] Muarray Gell-Man
[۳] The eightfold way

توجه‌شود که ترتیب اعداد شگفتی در دو شکل یکسان نمی باشد و عدد شگفتی در رابطه‌ی زیر صدق می کند [۲] :

$$Q = I_۳ + \frac{B}{۲} + \frac{S}{۲} \qquad (۶ - ۱)$$

که در آن $I_۳$ مولفه‌ی سوم ایزواسپینِ I، B عدد باریونی و S عدد شگفتی بوده و Q،معرف بارالکتریکی ذره می باشد. متغیر ایزواسپین می تواند جهت معرفی چند تاییِ ذرات در یک دسته مورد استفاده قرار گیرد. بعنوان مثال برای سه نوع پایون π^-، π° و π^+ داریم $۲I + ۱ = ۳$ و در نتیجه $I = ۱$ و $I_۳$ می‌تواند از -۱ تا $+۱$، با فاصله‌های واحد تغییر کند. از اینرو برای π^-، $I_۳ = -۱$، برای π°، $I_۳ = ۰$ و برای π^+، $I_۳ = +۱$ می باشد. عدد باریونی B در این رابطه بگونه ای تعریف میشود که برای هر باریون برابر با $+۱$ ، برای هرآنتی باریون برابر با -۱ و برای سایر ذرات صفر در نظر گرفته می شود.

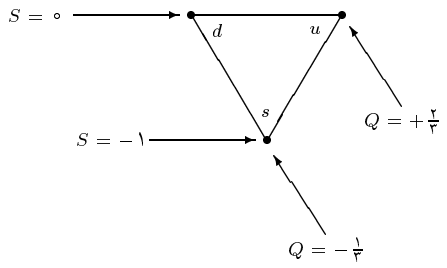
ده‌تاییِ باریون‌های سنگین در یک مثلث همانند شکل (۱—۳) قرار می‌گیرند.



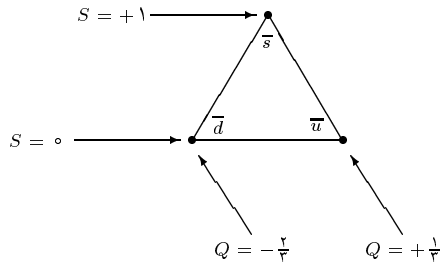
شکل (۱—۳): ده تایی باریونی

وقتی گلمان این آرایه را مرتب می‌کرد، ذره‌ی پایینی، یعنی Ω^- هنوزکشف نشده بود وبدین ترتیب وجود آن پیش بینی شده و حتی جرم و عمرآن نیز محاسبه گردید. سه سال بعد Ω^- کشف شد و صحت مدل هشتگانه به اثبات رسید [۳] . بقیه‌ی هادرونها نیز به همین صورت در ابَر چند گانه‌ها قرارگرفتند. مو فقیت راه هشتگانه این سوال را بر می انگیزد که چرا هادرونها که اینک بعنوان مجموع باریونها و مزونها در نظر گرفته می شود در این الگو

های عجیب جای می گیرند. در سال ۱۹۶۴ گلمان و شوایک[۴] هر کدام به طور جداگانه پیشنهاد کردند که تمام هادرونها ازذرات بنیادی تری بنام کوارک تشکیل شده‌اند [۴] که از یک الگوی چندگانه‌ی مثلثی تبعیت می کنند.



شکل (۱—۵): کوارک‌ها



شکل (۱—۴): پاد کوارک‌ها

هر کوارک دارای یک طعم[۵] (u یا d یا s) است و تمام کوارک‌ها اسپین نیم صحیح دارند. مطابق مدل کوارکی هر باریون از سه کوارک و هر مزون ازیک کوارک و آنتی کوارک تشکیل شده است. هر کوارک، یک پادکوارک دارد که تمام اعداد کوانتومی آنهادر یک علامت منفی بایکدیگر متفاوت می باشد. بدین ترتیب، با پیشگویی وجود کوارک‌ها، جدول ذرات بنیادی کامل گردید.

با وجود آنکه مدل کوارکی در طبقه بندی ذرات، بسیارمو فق بوده است اما تا کنون یک کوارک منفرد مشاهده‌نشده است . سبکترین کوارک باید پایدار باشد، زیرا نمی‌تواند به ذرات سبکتر واپاشی کند. اصولاً باید بتوانیم یک ذره‌ی پایدار را به راحتی ببینیم. بنا به دلایلی که بعداً روشن می‌شود، کوارک‌ها در داخل هادرونها محبوسند و نمی توانند بیرون آیند [۶]. از طرف دیگر، کوارک‌ها دارای اسپین نیم صحیح هستند و طبق اصل طرد پائولی نمی‌توان بیش از دو عدد از آنها را دریک تراز جای داد. این در حالی است که مطابق مدل کوارکی هر باریون از سه کوارک تشکیل شده است. از طرفی، داده‌های تجربی بدست آمده از شتابدهنده‌های بزرگ ناشی از فرایند های ناکشسان ژرف بطور قطع، وجود سه جرم متمرکز درون پروتون را تایید می‌کنند و نمی‌توان مدل کوارکی را به راحتی کنارنهاد. بدین منظور، گرینبرگ[۷] در سال ۱۹۶۴ یک عدد کوانتومی دیگر به نام رنگ[۸] نیز به کوارک‌ها نسبت داد [۵]. سه کوارک داخل پروتون، به ترتیب دارای رنگ‌های قرمز و سبز و آبی هستند که مجموع آنها، سفید (بی‌رنگ) می باشد. تابع موج رنگ، ضربدر تابع موج طعم، ضربدر

[۴] Zweig
[۵] flavor
[۶] quark confinement
[۷] Green berg
[۸] color

تابع موج فضایی، ضربدر تابع موج اسپینی یک تابع موج پاد متقارن خواهد بود که مناسب کوارک‌های با اسپینِ نیم صحیح می باشد (تابع موج طعم، متقارن است). داده‌های آزمایشگاهی نیز وجود عدد کوانتومی رنگ را تایید می‌کنند. بااین تعریف از رنگ، مشخص است که تمام ذرات طبیعی، بیرنگ هستند و کوارک‌ها باید طوری در کنار یکدیگر قرار گیرند که ذرات بی‌رنگ خلق کنند. به همین دلیل است که یک کوارک آزاد (و الزاماً رنگی) وجود ندارد.

۲ مقدّمه‌ای بر نظریه الکترودینامیک کوانتمی

در این بخش اندرکنشهای ذرات بنیادی مورد توجه است.در اکثر قسمتها ما درباره تئوری اختلالی بحث خواهیم نمود بطوریکه دامنه ها بصورت سری های توانی و بر حسب شدت اندر کنش بیان می شوند . در بسط دامنه ها جمله غالب پایین ترین مرتبه بسط می باشد و بندرت جملات سایر مرتبه‌ها در نظر گرفته می شود. در تئوری اختلالی مکانیک کوانتمی عباراتی را برای دامنه هابر حسب پتانسیل های اندر کنشی و توابع موج ذره آزاد بدست خواهیم آورد.

در ابتدا بعنوان یک مقدمه ضروری، به معرفی دو نوع معادله موج نسبیتی که بطور اصولی مورد اهمیت هستند می پردازیم که عبارتند از معادله کلاین گوردن [۱] که برای توصیف ذراتی با اسپین صفر بکار می رود و معادله دیراک [۲] که برای توصیف ذراتی با اسپین $\frac{1}{2}$ بکار می رود. همچنین در این خصوص بحث خواهیم نمود که چطور با استفاده از تعبیر فانیمن می توان فرایندها یی را که حاوی ضد ذرات هستند توصیف نمود.

۱.۲ معادله کلاین—گوردن

معادله غیر نسبیتی شرودینگر می تواند با رابطه:

$$E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \qquad (2-1)$$

نما یش داده شود بطوریکه جایگذاری های عملگری زیر را داریم:

$$E \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \qquad , \qquad \vec{p} \longrightarrow -i\vec{\nabla}\,. \qquad (2-2)$$

این عملگرهای دیفرانسیلی روی یک تابع موج شرودینگر اثر می کند. اما درنظریه نسبیت خاص داریم:

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2\,. \qquad (2-3)$$

دراینجا برای سهولت کار از دستگاه واحدهای طبیعی $\hbar = c = 1$ استفاده می شود. اگر در این معادله روابط عملگری (۲—۲) را قرار دهیم، بدست می آوریم:

$$-\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2} = (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x,t) \qquad (2-4)$$

که $\phi(x,t)$ تابع موج نسبیتی است. معمول آن است که در نسبیت با چهار بردارها کار می

کنند بطوری که:

$$\begin{aligned} p^\mu &= (E, \vec{p}) \\ p^2 &= p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \\ \Box^2 &= \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \ . \end{aligned} \qquad (۵-۲)$$

از این پس چهار بردارها را بدون علامت بردار می‌نویسیم. با استفاده از معادله‌ی (۲—۴)و روابط (۲—۵) ، می توان به معادله‌ی کلاین—گوردن[۹] بصورت زیر دست یافت [٦]:

$$(\Box^2 + m^2)\phi(x,t) = 0 \ . \qquad (٦-۲)$$

اگر موج تختی به شکل:

$$\phi(x,t) = Ne^{-iEt+i\vec{p}.\vec{x}} = Ne^{-ip.x} \qquad (۷-۲)$$

را در معادله‌ی کلاین—گوردن قرار دهیم بدست می آوریم:

$$E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow E = \pm(p^2 + m^2)^{1/2} \qquad (۸-۲)$$

که در چارچوب نظریه نسبیت خاص مورد قبول می باشد. می‌بینیم انرژی که به ذره نسبت داده می شود می‌تواند منفی باشد. این تنها مشکل موجود نیست. مشکل اساسی از چگالی احتمال ذره ناشی می‌شود. اگر رابطه‌ی (۲—٦) را در ϕ^* ضرب کنیم، سپس همیوغ مختلط این رابطه را در ϕ ضرب کنیم و دو رابطه‌ی حاصل را از هم تفریق کنیم به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{j} = 0 \qquad (۹-۲)$$

که تعریف کرده‌ایم:

$$\begin{aligned} \rho &= i\left[\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t}\right)\phi\right] \\ \vec{j} &= i^{-1}\left[\phi^* \vec{\nabla}\phi - (\vec{\nabla}\phi^*)\phi\right] \ . \end{aligned} \qquad (۱۰-۲)$$

با جایگذاری موج تخت (۲—۷) در این رابطه خواهیم داشت:

$$\rho = 2|N|^2 E \ . \qquad (۱۱-۲)$$

اگر انرژی ذره بتواند منفی باشد آنگاه چگالی احتمال نیز می‌تواند منفی باشد که نتیجه غیر قابل قبولی است .

۱.۲ معادله‌ی دیراک

برای معادله کلاین— گوردن دلایل اینکه چرا مشکلات پیش آمده وجود داشت مشخص می باشد.

[۹] Klein-Gordon

الف) در ساختن تابع موج مرتبط با رابطه مربعی انرزی —اندازه حرکت

$$E^{۲} = (\mathrm{p}^{۲} + m^{۲})$$

وجود جوابهای با انرزی منفی امکان پذیر می باشد.

ب) معادله کلاین —گوردن دارای جمله $\frac{\partial^{۲}}{\partial t^{۲}}$ می باشد. وجود این جمله منجر به معادله پیوستگی‌ائی خواهد شد که در آن چگالی احتمال شامل $\frac{\partial}{\partial t}$ است و از اینرو امکان اینکه‌چگالی احتمال منفی داشته باشیم وجود خواهد داشت.

دیراک با توجه به ویژگیهای فکری خاص خود به این مسائل بطور مستقیم توجه نمود و بمنظور آنکه چگالی احتمال مثبت ($\rho \geq ۰$) را بدست آورد او به یک معادله ای نیاز داشت که نسبت به $\frac{\partial}{\partial t}$ خطی باشد. لذا برای داشتن هموردائی نسبیتی ، معادله باید همچنین نسبت به ∇ خطی باشد. او معادله زیر را فرض نمود [۷]:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} &= \left[-i\left(\alpha_{۱}\frac{\partial}{\partial x^{۱}} + \alpha_{۲}\frac{\partial}{\partial x^{۲}} + \alpha_{۳}\frac{\partial}{\partial x^{۳}}\right) + \beta m\right]\psi(x,t) \\ &= (-i\alpha.\nabla + \beta m)\psi(x,t) \end{aligned} \qquad (۱۲-۲)$$

α ها و β چه هستند؟. برای پیدا نمودن شرایط مربوط به این کمیات آنچه را که مربوط به یک معادله موج نسبیتی می باشد در نظر بگیرید:

الف) رابطه صحیح نسبیتی بین E و p

ب)هموردائی معادله تحت تبدیلات لورنتس .

اکنون معادله دیراک را بر حسب چهار بردار ها، کمیات نرده ای و غیره می نویسیم. برای برآ وره شدن شرط (ا لف) دیراک تابع موج ψ را بگونه ای انتخاب نمود که شرط مربوط به معادله کلاین— گوردن را برآورده کند. پس می‌توان این معادله را با معادله‌ی کلاین—گوردون مقایسه کرد و پارامترهای آزاد را بدست آورد. برای این کار رابطه‌ی

(۲—۱۳) را روی خودش اثر می‌دهیم:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^{۲}\psi = (-i\vec{\alpha}.\vec{\nabla}+\beta m)(-i\vec{\alpha}.\vec{\nabla}+\beta m)\psi$$

$$= -\sum_{i=۱}^{۳}\alpha_i^{۲}\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial x_i^{۲}} - \sum_{i>j=۱}^{۳}(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial x_i\partial x_j} \quad . \qquad (۱۴-۲)$$

$$-im\sum_{i=۱}^{۳}(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\beta^{۲}m^{۲}\psi$$

با این فرض که ψ معادله کلاین— گوردن را برآورده میکند، خواهیم داشت :

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^{۲}\psi = -\sum_{i=۱}^{۳}\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial x_i^{۲}}+m^{۲}\psi \qquad (۱۵-۲)$$

واضح است که α هاو β ها نمی توانند کمیات معمولی کلاسیک جابجا پذیر باشند. در عوض این کمیات باید روابط نا جابجایی را که در زیر خواهد آمد برآورده کنند تا جملات نا خواسته در سمت راست معادله (۲—۱۴) را حذف نماید، لذا خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \alpha_i\beta+\beta\alpha_i &= ۰, \qquad i=۱,۲,۳ \\ \alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i &= ۰, \qquad i,j=۱,۲,۳; \quad i>j \\ \alpha_i^{۲}=\beta^{۲} &= I\,. \end{aligned} \qquad (۱۶-۲)$$

با بخاطر آوردن ماتریسهای پائولی به همراه روابط عدم جابجائی شان برای ذرات غیر نسبیتی با اسپین $\frac{۱}{۲}$، طبیعی است که ماتریسهای α و β راباید بگونه ای در نظر بگیریم که‌روی بردار ستونی (اسپینور) ψ اثر کند. لذا می توان انتظار داشت که معادله دیراک نمایش دهنده ذره با اسپین نیم صحیح $\frac{۱}{۲}$ می باشد. براحتی می توان ثابت نمود [٦] که برای ماتریسهای که شرایط معادله دیراک را برآورده کند کمترین ابعاد ممکن این ماتریسها ۴×۴ میباشد. شکل مرسوم ما تریسهای α و β عبارت هستند از :

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} ۰ & \sigma_i \\ \sigma_i & ۰ \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & ۰ \\ ۰ & -I \end{pmatrix} \qquad (۱۷-۲)$$

که در آن، I ها ماتریس‌های یکه‌ی ۲ × ۲ اند و σ_i ها ماتریس‌های پائولی می باشند . از این ماتریس‌ها پیداست که توابع موج باید ماتریس‌های ستونی چهار مولفه‌ای باشند:

$$\psi = \omega e^{-ip.x}, \qquad \omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \qquad (۱۸-۲)$$

که ϕ و χ اسپینورهای دو مولفه‌ای اند. اگر این تابع موج را در معادله‌ی دیراک قرار دهیم به

دستگاه دو معادله‌ای زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} (E-m)\phi = \vec{\sigma}.\vec{p}\chi \\ (E+m)\chi = \vec{\sigma}.\vec{p}\phi \end{cases} \qquad (۱۹-۲)$$

با حل این دو معادله برای E بدست می‌آوریم:

$$E = \pm(p^{۲} + m^{۲})^{۱/۲} \qquad (۲۰-۲)$$

از اینرو معادله‌ی دیراک، مشکل انرژی منفی را حل نکرده است. در مورد چگالی احتمال، وضع کمی تفاوت می‌کند. همیوغ هرمیتی رابطه‌ی (۲—۲۱) به شکل زیر است:

$$-i\frac{\partial\psi^{\dagger}}{\partial t} = \psi^{\dagger}(+i\vec{\alpha}.\overleftarrow{\nabla} + \beta m) \qquad (۲۱-۲)$$

که $\overleftarrow{\nabla}$ یعنی عملگر ∇ که روی عناصر قبل از خود اثر می‌کند چرا که $\psi^{\dagger}$ و $\vec{\alpha}$ ماتریس هستند و نمی‌توان ترتیب ضرب آنها را جابجا کرد. با ضرب این رابطه از راست در ψ و رابطه‌ی (۲—۱۲) از چپ در $\psi^{\dagger}$ و تفریق این دو رابطه از هم مجدداً می‌توان چگالی احتمال را بدست آورد:

$$\rho = \psi^{\dagger}(x,t)\psi(x,t) \qquad (۲۲-۲)$$

که به وضوح، کمیتی مثبت است.

۲.۲ تعابیر دیراک و فاینمن برای حل‌های با جواب منفی

برای الکترون آزاد در معادله دیراک، ترازهای انرژی مثبت و منفی حول مقدار E=0 بطور متقارن وجود خواهد داشت. به منظور اجتناب از انتقال الکترون هائی با انرژی مثبت به حالتها ئی با انرژی منفی ، " خلاء" در بردارنده حالتها ئی باانرژی منفی می باشد که باالکترون ها پر شده است. بدین ترتیب اصل طرد پا ئولی مانع از فرو ریزش الکترونها از ترازهای مثبت به ترازهای منفی خواهد شد. خلائی که بدین شکل تعریف می شود شامل انرژی ها و بارهای منفی خواهد بود. اما از آ نجائیکه برای تمام مشاهده پذیر ها می توانیم افت و خیزی در انرژی و بار داشته باشیم لذا می توان با فرضیات فوق به یک تئوری قابل قبول دست یافت. دیراک نبود یک الکترون با انرژی منفی را با«حفره» نشان داد. به این ترتیب انرژی و بار حفره به صورت زیر است

یک انرژی مثبت $\rightarrow$	$(E_{\text{منفی}})-$	$=$ انرژی حفره
یک بار مثبت $\rightarrow$	$(q_e)-$	$=$ بار حفره

او همچنین نبود یک الکترون با انرژی منفی و «اسپین بالا» را به معادل حضور پوزیترون با انرژی مثبت و «اسپین پایین» تعبیر کرد. بدین ترتیب دیراک وجود ضد ذره (پوزیترون) را پیشگویی کرد. چند سال بعد، در ۱۹۳۲ کارل اندرسون پوزیترون را کشف کرد و جایزه‌ی نوبل را از آن خود ساخت.

حال چه می توان راجع به جوابهای انرژی منفی معادله‌ی کلاین—گوردن گفت ؟. واضح است که علیر غم موفقیت بارز تعبیر دیراک برای ذراتی با اسپین $\frac{1}{2}$ ، تعبیر فوق برای ذراتی با اسپین صفر قابل اعمال نیست چرا که بوزونها منحصر به اصل طرد نمی باشند.

فاینمن تعبیر دیگری از انرژی منفی ارائه داد. با این تعبیر، ضد ذره‌ای با انرژی مثبت که در زمان به جلو می‌رود معادل است با ذره‌ای با انرژی منفی که در زمان به عقب برمی‌گردد [۷]. مانند بخش قبل، همانطور که ρ را از معادله‌ی کلاین—گوردون بدست آوردیم، می‌توانیم $\vec{j}$ (چگالی شار) را بدست آوریم:

$$\vec{j} = 2|N|^2\vec{p} \qquad (2-23)$$

ρ و $\vec{j}$ مولفه‌های چهار بردار چگالی شارند که اگر در بار الکتریکی ضرب شوند، چهار بردار چگالی جریان را نتیجه می‌دهند.

$$j^{\mu}_{em}(\pi^+) = \quad (+e)(\rho, \vec{j}\,) = (+e)2|N|^2(+(\vec{p}^{\,2} + m^2)^{1/2}, \vec{p}\,) \qquad (2-24)$$

$$j^{\mu}_{em}(\pi^-) = \quad (-e)2|N|^2(+(\vec{p}^{\,2} + m^2)^{1/2}, \vec{p}\,) = (+e)2|N|^2(-(\vec{p}^{\,2} + m^2)^{1/2}, -\vec{p}\,)$$

لذا بعنوان مثال حرکت π^- را می‌توان معادل با حرکت π^+ که تمام مولفه‌های چهار بردار چگالی شار آن در یک علامت منفی ضرب شده‌اند، در نظر گرفت. با این تعبیر، معادله‌ی کلاین—گوردون برای بوزون‌ها معتبر می‌گردد و معادله‌ی دیراک برای فرمیون‌ها مناسب خواهد بود.

۳.۲ تقریب اول در تئوری اختلالی QED

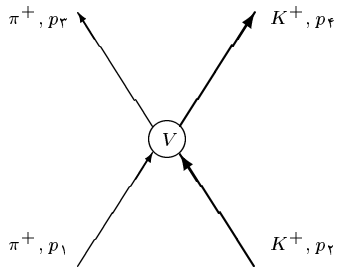
آنچه تا کنون گفتیم برای حالتی بود که پتانسیل وجود نداشته باشد. در صورت وجود پتانسیل باید از نظریه‌ی اختلال استفاده کنیم. در حضور پتانسیل، معادله‌ی کلاین—گوردون به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$(\Box^2 + m^2)\phi = -V\phi\,. \qquad (2-25)$$

در نظریه‌ی اختلال، دامنه‌ی پراکندگی برای ما مهم است. در مکانیک کوانتومی نسبیتی، دامنه‌ی پراکندگی در تقریب مرتبه‌ی اول به شکل زیر است:

$$\mathcal{A} = i^{-1}\int\!\!\int d^3x\,dt\,\psi_f^* V \psi_i \qquad (2-26)$$

که در آن فرض شده ذره‌ی آزاد با تابع موج ψ_i تحت تأثیر پتانسیل V قرار می‌گیرد و به ذره‌ی آزادی با تابع موج ψ_f تبدیل می‌شود. بعنوان مثال اندرکنش یک π^+ را با یک K^+ در نظر می‌گیریم.



شکل (۲—۱): برهمکنش π^+ با K^+

اگر π^+ در یک پتانسیل برداری A^μ قرار بگیرد، با استفاده از روش استاندارد توصیف کوانتم مکانیک، معادله‌ی حاکم بر آن با تبدیل ∂^μ به $\partial^\mu + ieA^\mu$ در معادله‌ی کلاین—گوردن بدست می‌آید، بطوریکه:

$$(\Box^2 + m^2)\phi = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)\phi + e^2 A^2 \phi \,. \qquad (۲۷-۲)$$

چون در تقریب مرتبه‌ی اول هستیم از جمله‌ی شامل A^2 صرفنظر می‌کنیم. پس دامنه‌ی پراکندگی به شکل زیر می‌شود:

$$\mathcal{A} = e\int d^4x\, \psi_3^*(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)\psi_1 = e\int d^4x\, [(-\partial_\mu \psi_3^*)\psi_1 + \psi_3^*(\partial_\mu \psi_1)]A^\mu \qquad (۲۸-۲)$$

در گام آخر از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده کرده‌ایم. ψ_1 و ψ_3 توابع موج π^+ هستند و A^μ پتانسیل ناشی از حضور K^+ است. پس داریم:

$$\mathcal{A} = -i\int j_\mu(\pi^+) A^\mu\, d^4x \qquad (۲۹-۲)$$

که در آن از رابطه‌ی (۲—۱۰) استفاده کرده‌ایم و «جریان انتقال الکترومغناطیس» را به شکل زیر تعریف کرده‌ایم:

$$j_\mu(\pi^+) = ie[\psi_3^*(\partial_\mu \psi_1) - (\partial_\mu \psi_3^*)\psi_1] \qquad (۳۰-۲)$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که معادلات ماکسول در پیمانه‌ی لورنتس $(\partial^\mu A_\mu = 0)$ به شکل چهار برداری زیر خواهد شد:

$$\Box^2 A^\mu = j^\mu_{em} \qquad (۳۱-۲)$$

اگر جریان انتقال الکترومغناطیس را برای ذره‌ی K^+ بنویسیم، داریم:

$$j^\mu(K^+) = ie[\psi_4^*(\partial^\mu \psi_2) - (\partial^\mu \psi_4^*)\psi_2] = eN_2N_4(p_2+p_4)^\mu e^{i(p_4-p_2).x} \qquad (۳۲-۲)$$

که از موج تختی به شکل معادله‌ی (۲—۷) استفاده کرده‌ایم. با این رابطه و رابطه‌ی (۲—۳۰) پتانسیل برداری تولید شده بوسیله‌ی K^+ به شکل زیر خواهد بود:

$$A^\mu = -q^{-2} j^\mu(K^+), \qquad q^\mu = (p_4 - p_2)^\mu = (p_3 - p_1)^\mu \qquad (۳۳-۲)$$

q^2 در اصل مربع جرم فوتون مجازی تبادل یافته است. اگر این رابطه را در رابطه‌ی (۲—۲۹) جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$\mathcal{A}_{\pi^+K^+} = -i\int j_\mu(\pi^+)\, A^\mu\, d^4x = +i\int j_\mu(\pi^+)\, q^{-2}\, j^\mu(K^+)\, d^4x \qquad (۳۴-۲)$$

$$= +ie^2 N_1N_3N_2N_4(p_1+p_3)_\mu(p_2+p_4)^\mu \times q^{-2}\int d^4x\, e^{i(p_3-p_1).x} e^{i(p_4-p_2).x}$$

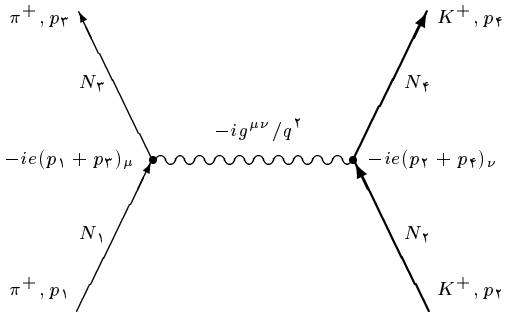
که آخرین انتگرال برابر با $(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)$ است.

۴.۲ دیاگرام فاینمن برای عناصر ماتریس پراکندگی

دامنه‌ی پراکندگی بدست آمده در رابطه‌ی (۲—۳۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathcal{A}_{\pi^+K^+} = \tag{۳۵ - ۲}$$
$$-iN_1N_2N_3N_4(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)\times e(p_1+p_3)_\mu\frac{(-g^{\mu\nu})}{q^2}e(p_2+p_4)_\nu$$

$g^{\mu\nu}$ تِنسور متریک است و زیر نویس ν در $(p_2+p_4)_\nu$ را به بالا نویس μ تبدیل می‌کند. هر قسمت از این معادله را می‌توان به یک قسمت از دیاگرامی که به دیاگرام فاینمن معروف است به شکل زیر نسبت داد:



شکل (۲—۲): دیاگرام فاینمن

پنج قاعده‌ی کلی بر این دیاگرام حکمفرماست:

۱) برای هر خط دیاگرام[۱۰]، یک ثابت بهنجارش N_i وجود دارد.

۲) اندرکنش بین دو ذره‌توسط یک فوتون مجازی (خط موج گونه که به آن انتشارگر[۱۱] می‌گویند) که کمیت $-ig^{\mu\nu}/q^2$ را به آن نسبت می‌دهیم انجام می‌گیرد. یک فوتون حقیقی معادله‌ی زیر را ارضا می‌کند:

$$\Box^2 A^\mu = 0 \tag{۳۶ - ۲}$$

که برای موج تخت، این رابطه معادل است با $q^2 = 0$. اما اکنون رابطه‌ی (۲—۳۱) که در آن $j^\mu_{em} \neq 0$ است برقرار می‌باشد. در نتیجه داریم $q^2 \neq 0$. یعنی فوتون، جرم دار یا مجازی است.

---

[۱۰] Leg
[۱۱] Propagator

۳) دیاگرام بالا دارای دو رأس[۱۲] است که با دایره‌ی توپر نشان داده شده است و به هر کدام کمیت چهار برداریِ $-ie(p_i+p_j)_\mu$ نسبت داده شده است.

۴) ضرایب $\pm i$ که در قسمتهای مختلف عناصر ماتریسی ظاهر شده، اتفاقی نیست و طوری تنظیم شده که برای دیاگرام‌های فاینمن در مراتب بالاتر نیز مناسب باشد.

۵) کمیت $(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)$ به طور صریح در دیاگرام ظاهر نشده است ولی در هر دیاگرامی به طور ضمنی، این کمیت وجود دارد و معرف بقاء چهار بردارهای اندازه حرکت می باشد که به خطوط خارجی دیاگرام نسبت داده می شود.

۵.۲ محاسبه‌ی سطح مقطع

از رابطه‌ی (۲—۱۱) پیداست که بجای آنکه یک ذره در حجم V داشته باشیم، $2E$ ذره در حجم V داریم. پس بهنجارش برای $2E$ ذره باید انجام شود. یعنی برای ذره‌ی i ام داریم :

$$\int_V \rho\, d^3x = 2E_i$$
$$\Rightarrow \quad \int_V 2N_i^2 E_i\, d^3x = 2E_i \Rightarrow 2N_i^2 E_i V = 2E_i \Rightarrow N_i = V^{1/2} \qquad (۳۷-۲)$$

اکنون برای بدست آوردن سطح مقطع، سه مرحله را پشت سر می‌گذاریم:

۱) نرخ گذار در واحد حجم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{fi} = |\mathcal{A}_{fi}|^2/VT \qquad (۳۸-۲)$$

که T زمان برهم‌کنش است. اگر دامنه‌ی ناوردای F را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$F = e^2 q^{-2}(p_1+p_3)_\mu(p_2+p_4)^\mu \qquad (۳۹-۲)$$

در نتیجه داریم:

$$\mathcal{A}_{fi} = -i(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)N_1N_2N_3N_4.F \qquad (۴۰-۲)$$

از رابطه‌ی (۲—۴۲) به راحتی می‌توان ثابت کرد که:

$$P_{fi} = (2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)(N_1N_2N_3N_4)^2|F|^2 \qquad (۴۱-۲)$$

۲) برای آنکه کمیتی بیابیم که از یک آزمایش به آزمایش دیگر تغییر نکند باید وابستگی این نرخ گذار را به شار ذرات فرودی و تعداد ذرات هدف، حذف کنیم. شار ذرات فرودی برابر است با تعداد ذرات در حجم V ضربدر سرعت ذرات. یعنی

[۱۲] vertex

$|v|(2E_1/V)$. تعداد ذرات هدف در حجم V که در حال سکونند برابر است با $2E_2/V$.

۳) و در نهایت، ضریب فضای فاز برای دو جسم، که به تعداد ذرات خروجی در حجم V تقسیم شده باشد برابر است با:

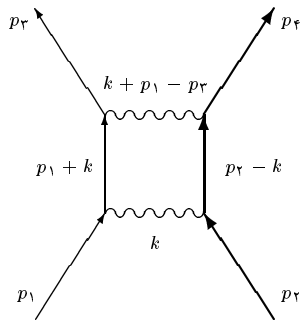
$$\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_3}{2E_3}\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_4}{2E_4}\,. \qquad (۴۲-۲)$$

با کنار هم قرار دادن همه‌ی این عوامل، سطح مقطع دیفرانسیلی رابصورت زیر خواهیم داشت :

$$d\sigma = P_{fi}\frac{V^2}{2E_1 2E_2|v|}\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_3}{2E_3}\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_4}{2E_4} \qquad (۴۳-۲)$$

۶.۲ تصحیح مرتبه بالاتر در نظریه QED

آنچه تا کنون محاسبه کردیم‌تقریب اول نظریه اختلالی و از مرتبه‌ی α[۱۳] بوده است . می‌توان دیاگرام فاینمن را به راحتی به مراتب α^2 و بالاتر نیز گسترش داد. مثلاً دیاگرام زیر برای تبادل دو فوتون با چهار بردار اندازه‌حرکت k، و در مرتبه‌ی α^2 می‌باشد [۸].



شکل (۲—۳): دیاگرام فاینمن برای تبادل دو فوتون

متأسفانه بیشتر انتگرال‌های بوجود آمده از حلقه‌هایی شبیه این، واگرا هستند. و این در حالی است که ما مشاهده پذیرهای فیزیکی را بر حسب توان‌های α بسط می‌دهیم و ضرایب α^2 یا بالاتر باید از ضریب α کوچکتر باشند تا بسط، همگرا و قابل اندازه‌گیری باشد. بعد از بحث مفصلی در این زمینه معلوم می‌شود که می‌توان این واگرایی‌ها را حذف کرد به طوری که سهم جملات مراتب بالاتر از سهم اولین جمله کمتر باشد. این کار را بازبهنجارش پذیزی [۱۴] می نامند. به این دلیل به آن بازبهنجارش پذیزی می‌گویند که

[۱۳] ثابت ساختار ریز
[۱۴] Renormalization

در اصل، سهم تمام واگرایی‌ها به طور معجزه‌آسایی در کمیات فیزیکی مانند جرم یا بار الکتریکی که قابل اندازه‌گیری هستند وارد شده ومشکل بینهایت شدن کمیات از بین خواهد رفت. درنتیجه این کمیات را می‌توان با مقدار فیزیکی آنها (که اندازه‌گیری می‌کنیم) جایگزین کرد و همه چیز، محدود باقی می‌ماند.

۳ حلقه‌ها و بازبهنجارش‌پذیری

آنچه تا کنون گفتیم برای پراکندگی بوزون‌ها، که از معادله‌ی کلاین—گوردون پیروی می‌کنند صادق است. فرمیون‌ها از معادله‌ی دیراک پیروی می‌کنند. رابطه‌ی (۲—۱۹) را به خاطر آورید. این دستگاه معادلات را از معادله‌ی دیراک بدست آوردیم. از این دستگاه معادلات می‌توان χ را بر حسب ϕ بدست آورد. در این صورت با توجه به رابطه‌ی (۲—۱۸) داریم:

$$\omega_\phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \\ \dfrac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+m}\,\phi \end{pmatrix} \qquad (۱-۳)$$

همچنین می‌توان ϕ را بر حسب χ بدست آورد:

$$\omega_\chi = \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{E-m}\,\chi \\ \\ \chi \end{pmatrix} \qquad (۲-۳)$$

اگر ذره در حال سکون باشد، یعنی $\vec{p} = ۰$، در نتیجه $E = m$ جواب مثبت است و در این صورت از معادله‌ی (۲—۱۹) داریم $\chi = ۰$. جواب منفی به شکل $E = -m$ است که در این صورت مجدد از معادله‌ی (۲—۱۹) داریم $\phi = ۰$. پس معادله‌ی (۳—۱) برای انرژی‌های مثبت مناسب است و معادله‌ی (۳—۲) برای انرژی‌های منفی. اما در انرژی‌های منفی $\vec{p}$ و E باید در یک علامت منفی ضرب شوند. پس جواب‌ها، برای انرژی‌های مثبت و منفی به شکل زیرند:

$$\omega_+ = \begin{pmatrix} \phi \\ \\ \dfrac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+m}\,\phi \end{pmatrix}, \qquad \omega_- = \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+m}\,\chi \\ \\ \chi \end{pmatrix} \qquad (۳-۳)$$

بنابراین کلی‌ترین شکل تابع موج به صورت زیر است:

$$\psi_\pm = N\omega_\pm e^{-ip.x} = \left\{ \begin{array}{c} u(p,s) \\ v(p,s) \end{array} \right\} e^{-ip.x} \qquad (۴-۳)$$

که p معرف اندازه حرکت و s معرف اسپین است. $N\omega_+$ را برابر با u و $N\omega_-$ را برابر با v قرار داده‌ایم. همانند قبل می‌توانیم ρ و $\vec{j}$ را بدست آوریم:

$$\rho = \psi^\dagger\psi, \qquad \vec{j} = \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi \qquad (۵-۳)$$

با تعریف کمیت چهاربرداری γ و نیز $\overline{\psi}$ به شکل زیر:

$$\gamma^\circ = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i,\ i = ۱, ۲, ۳, \quad \overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^\circ \qquad (۶ - ۳)$$

می‌توانیم شکل واحدی برای ρ و $\vec{j}$ بسازیم:

$$\rho = \overline{\psi}\gamma^\circ\psi, \qquad \vec{j} = \overline{\psi}\vec{\gamma}\psi \qquad (۷ - ۳)$$

و سرانجام می‌توانیم چهاربردار چگالی جریان را تعریف کنیم:

$$j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \qquad (۸ - ۳)$$

و همانند قبل، جریان گذار الکترومغناطیس برای یک فرمیون با بارِ $-e$ برابر است با:

$$j_\mu(e^-) = (-e)\,\overline{\psi}_f\,\gamma_\mu\,\psi_i = (-e)\,\overline{u}_f\,\gamma_\mu\,u_i\,e^{-iq.x} \qquad (۹ - ۳)$$

که در آن $q = p_f - p_i$.

اکنون پراکندگی یک الکترون از بار ساکن $Q = Ze$ را در نظر می‌گیریم. طبق رابطه‌ی (۲—۳۲) داریم:

$$\mathcal{A}_{eQ} = +i\int j_\mu(e^-)\,q^{-۲}\,j^\mu(Q)d^۴x \qquad (۱۰ - ۳)$$

برای Q ی در حال سکون داریم:

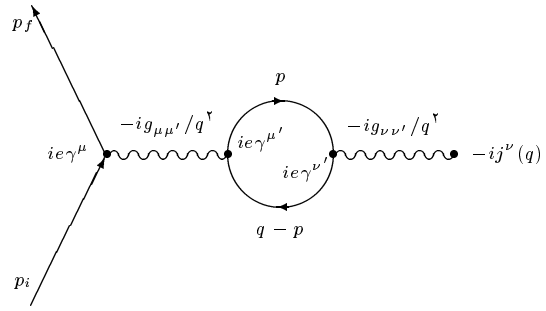
$$\rho(x) = Ze\delta(x), \qquad \vec{j}(x) = ۰ \qquad (۱۱ - ۳)$$

و با جایگزین کردن رابطه‌ی (۳—۹) و (۳—۱۱) در رابطه‌ی (۳—۱۰)، به سادگی دامنه‌ی ناوردای F محاسبه می‌شود:

$$F = (ie\,\overline{u}_f\,\gamma_\circ\,u_i)\left(\frac{-i}{q^۲}\right)(-iZe) \qquad (۱۲ - ۳)$$

۱.۳ تصحیحات مرتبه‌های بالاتر

اکنون به مرتبه‌ی $\alpha^۲$ می‌رویم. در این مرتبه، فوتون مجازیِ تبادل یافته در میانه‌ی راه به یک ذره و ضد ذره تبدیل می‌شود و دوباره ایندو به همان فوتون تبدیل می‌گردند.



شکل (۳—۱): دیاگرام فاینمن در مرتبه‌ی $\alpha^۲$

می‌توان طبق قوانین دیاگرام فاینمن، این ضد ذره را به صورت ذره‌ای در نظر گرفت که در

جهت (زمانی و مکانی) عکس حرکت می‌کند. درنتیجه حلقه‌ای مانند شکل (۳–۱) تشکیل می‌شود که گویا ذره‌ای روی آن در حرکت است. طبق قوانین فاینمن، دامنه‌ی ناوردا برای مرتبه‌ی دوم به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} F = \; & (-1)^1 (ie\,\overline{u}_f\,\gamma^\mu\,u_i)\left(-i\,\frac{g_{\mu\mu'}}{q^2}\right) \\ & \times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,Tr\left\{(ie\gamma_\mu)\,\frac{i(\gamma.p+m)}{p^2-m^2}\,(ie\gamma_\nu)\,\frac{i(\gamma.p-\gamma.q+m)}{(p-q)^2-m^2}\right\} \\ & \times \left(-i\,\frac{g_{\nu\nu'}}{q^2}\right)(-ij^\nu(q)) \end{aligned} \qquad (۱۳-۳)$$

که $j^\nu(q)$ تبدیل فوریه‌ی چهاربردار چگالی جریانِ الکترومغناطیسِ ذره‌ی هدف است، که اگر ساکن باشد مقدار Ze را نتیجه می‌دهد. در واقع با تبدیل زیر می‌توانیم تصحیح مرتبه‌ی دوم را به معادلات اضافه کنیم:

$$\begin{aligned} -i\,\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \longrightarrow \; & -i\,\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \left(-i\,\frac{g_{\mu\mu'}}{q^2}\right)\,I^{\mu'\nu'}\,\left(-i\,\frac{g_{\nu\nu'}}{q^2}\right) \\ \longrightarrow \; & -i\,\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \left(\frac{-i}{q^2}\right)\,(-ig_{\mu\nu}\,q^2 I(q^2))\,\left(\frac{-i}{q^2}\right) \end{aligned} \qquad (۱۴-۳)$$

که در این رابطه:

$$\begin{aligned} & -ig_{\mu\nu}\,q^2 I(q^2) = \\ & (-1)^1 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,Tr\left\{(ie\gamma_\mu)\,\frac{i(\gamma.p+m)}{p^2-m^2}\,(ie\gamma_\nu)\,\frac{i(\gamma.p-\gamma.q+m)}{(p-q)^2-m^2}\right\}. \end{aligned} \qquad (۱۵-۳)$$

محاسبه‌ی این انتگرال کاری بسیار طولانی است، اما نتیجه‌ی آن به صورت زیر است [۹] :

$$I(q^2) = \left[\frac{\alpha}{3\pi}\int_{m^2}^{\infty}\frac{dp^2}{p^2} - \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dz\,z(1-z)\ln\left(1-\frac{q^2 z(1-z)}{m^2}\right)\right] \qquad (۱۶-۳)$$

حد بالای ∞ در انتگرال اول همان حد واگرایی است که در بخش (۲) به آن اشاره شد. در اینجا آنرا با M^2 جایگزین می‌کنیم و سپس هر جا که لازم باشد M^2 را به سمت بینهایت میل می‌دهیم. به راحتی ثابت می‌شود که اگر $(-q^2)$ کوچک باشد، رابطه‌ی

(۳—۱۶) به رابطه‌ی زیر میل می‌کند:

$$I(q^{۲}) = \left[\frac{\alpha}{۳\pi}\ \ln\left(\frac{M^{۲}}{m^{۲}}\right) + \frac{\alpha}{۱۵\pi}\ \frac{q^{۲}}{m^{۲}}\right] \qquad (۱۷-۳)$$

اگر این رابطه را در رابطه‌ی (۳—۱۴) جایگزین کنیم دامنه‌ی ناوردا به شکل زیر خواهد شد:

$$F = (ie\,\overline{u}\,\gamma_{\circ}\,u)\left(\frac{-i}{q^{۲}}\right)\left[۱ - \frac{\alpha}{۳\pi}\ \ln\left(\frac{M^{۲}}{m^{۲}}\right) - \frac{\alpha}{۱۵\pi}\ \frac{q^{۲}}{m^{۲}} + O(e^{۴})\right](-iZe) \qquad (۱۸-۳)$$

اگر بار الکتریکی e_R را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$e_R = e\left[۱ - \frac{e^{۲}}{۱۲\pi^{۲}}\ \ln\left(\frac{M^{۲}}{m^{۲}}\right)\right]^{۱/۲} \qquad (۱۹-۳)$$

دامنه‌ی ناوردا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F = (ie_R\,\overline{u}\,\gamma_{\circ}\,u)\left(\frac{-i}{q^{۲}}\right)\left(۱ - \frac{e_R^{۲}}{۶۰\pi^{۲}}\ \frac{q^{۲}}{m^{۲}}\right)(-iZe_R) \qquad (۲۰-۳)$$

یعنی تمام واگرایی‌ها به شکل M در بار الکتریکی e_R ظاهر شده است. حال اگر این بار را با مقدار تجربی آن جایگزین کنیم تمام واگرایی‌ها حذف خواهند شد و دامنه‌ی ناوردا، محدود باقی خواهد ماند.

۲.۳ بازبهنجارش‌پذیری

اکنون خواهیم دید که چگونه می‌توان واگراییِ M را حذف کرد. از این پس، مقدار بار الکتریکی در پایین‌ترین مرتبه‌ی دیاگرام را که به «بار برهنه[۱۵]» معروف است، $e_{\circ}$ می‌نامیم (واضح است که $e_{\circ}^{۲}/۴\pi = ۱/۱۳۷$) و بار الکتریکی در مراتب بالاتر، مانند معادله‌ی (۳—۱۹)، را با e نمایش خواهیم داد. اگر بخواهیم بار e را با مقدار تجربی آن جایگزین کنیم باید آزمایش کنیم. اما آزمایش، در یک مقدار خاصِ انرژی انجام می‌شود و فوتونِ تبادل یافته، دارای یک انرژی خاص، مثلاً $q^{۲} = -Q^{۲} = -\mu^{۲}$ خواهد بود. معمول است که از $q^{۲}$ که کمیتی مثبت است استفاده کنند. در نتیجه در حالت کلی می‌توان بار e را بر حسب $e_{\circ}$ چنین نوشت:

$$e^{۲} = e_{\circ}^{۲}\left[۱ - I(q^{۲} = -\mu^{۲}) + O(e_{\circ}^{۴})\right] \qquad (۲۱-۳)$$

[۱۵] Bare Charge

همچنین با استفاده از رابطه‌ی (۳—۱۸) دامنه‌ی ناوردا را به شکل زیر بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} F(e_\circ) &= (ie_\circ\, \overline{u}\gamma_\circ\, u)\left(\frac{-i}{q^۲}\right)\left(۱ - I(Q^۲) + O(e_\circ^۴)\right)(-iZe_\circ) \\ &= A(Q^۲)\, e_\circ^۲\, (۱ - I(Q^۲) + O(e_\circ^۴)) \end{aligned} \qquad (۲۲-۳)$$

که $A(Q^۲)$ را به شکل زیر تعریف کرده‌ایم:

$$A(Q^۲) = (i\,\overline{u}\,\gamma_\circ\, u)\left(\frac{-i}{q^۲}\right)(-iZ) \qquad (۲۳-۳)$$

اکنون از رابطه‌ی (۳—۲۱)، $e_\circ^۲$ را بر حسب $e^۲$ بدست می‌آوریم:

$$e_\circ^۲ = e^۲\left[۱ - I(q^۲ = -\mu^۲)\right]^{-۱} = e^۲\left[۱ + I(q^۲ = -\mu^۲)\right] \qquad (۲۴-۳)$$

که آنرا تا مرتبه‌ی $O(e^۴)$ بسط داده‌ایم. این مقدار را در رابطه‌ی (۳—۲۲) قرار می‌دهیم تا دامنه‌ی ناوردا را بر حسب e بدست آوریم:

$$\begin{aligned} F(e) &= A(Q^۲)\, e^۲\, \left[۱ + I(q^۲ = -\mu^۲)\right]\left[۱ - I(Q^۲)\right] \\ &= A(Q^۲)\, e^۲\, \left[۱ - I(Q^۲) + I(q^۲ = -\mu^۲) + O(e^۴)\right] \end{aligned} \qquad (۲۵-۳)$$

جمله $O(e^۴)$ اشاره دارد به عبارت $I(q^۲ = -\mu^۲)I(Q^۲)$ و جملات مابعد آن که از مرتبه‌ی $e^۴$ است. واضح است که $F(e)$ باید دقیقاً با $F(e_\circ)$ برابر باشد. زیرا F مشاهده‌پذیر است و مقدار آن بر حسب اینکه آنرا نسبت به کدام کمیت بسط دهیم، نباید تغییر کند.

همانطور که رابطه‌ی (۳—۱۷) را بدست آوردیم می‌توان ثابت کرد که اگر $-q^۲$ بزرگ باشد $I(q^۲)$ در رابطه‌ی (۳—۱۶)، به صورت زیر خواهد بود:

$$I(q^۲) = \frac{\alpha}{۳\pi}\, \ln\left(\frac{M^۲}{-q^۲}\right) \qquad (۲۶-۳)$$

با جایگذاری این رابطه در رابطه‌ی (۳—۲۵) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} F(e) &= A(Q^۲)\, e^۲\, \left[۱ - \frac{\alpha}{۳\pi}\, \ln\left(\frac{M^۲}{Q^۲}\right) + \frac{\alpha}{۳\pi}\, \ln\left(\frac{M^۲}{\mu^۲}\right) + O(e^۴)\right] \\ &= A(Q^۲)\, e^۲\, \left[۱ + \frac{\alpha}{۳\pi}\, \ln\left(\frac{Q^۲}{\mu^۲}\right) + O(e^۴)\right] \end{aligned} \qquad (۲۷-۳)$$

دیده می شود که $M^{۲}$ حذف شد ه است اما کمیت غیرفیزیکی دیگری به نام $\mu^{۲}$ که به آن مقیاس بازبهنجارش پذیزی می گویند وارد محاسبات شده است.

اکنون وابستگی تمام مشاهده‌پذیرها به این کمیت باید کمینه شود. یعنی، مثلاً برای F:

$$\mu \frac{dF}{d\mu} = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial e}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial e}\right) F = ۰ \qquad (۳ - ۲۸)$$

به این رابطه معاد له گروه‌بازبهنجارش پذیزی گفته می شود. آنچه تا کنون گفتیم در مرتبه‌ی $e^{۴}$ بوده است . انتظار داریم که اگر محاسبات روی تمام مراتب انجام گیرد و بتوانیم تمام جملات بسط را با یکدیگر جمع بزنیم انگاه وابستگی به‌پارامتر غیر فیزیکی μ به طور خودکار حذف گردد. در مرجع [۱۰] نشان داده شده که‌چگونه این امر برای حالتی که دارای دو مقیاس غیر فیزیکی باز بهنجارش پذیری μ و تجزیه پذیری M هستیم اتفاق می‌افتد.

۳.۳ پوشش بار در QED

از رابطه‌ی (۳—۲۴) داریم:

$$e^{۲}(Q^{۲}) = e_{۰}^{۲} \frac{۱}{۱ + I(q^{۲})} \qquad (۳ - ۲۹)$$

از این رابطه به وضوح پیداست که باری که اندازه می‌گیریم صریحاً به $Q^{۲}$ وابسته است. همچنین می‌توان $\alpha(Q^{۲}) = e^{۲}(Q^{۲})/۴\pi$ را که به آن «ثابت جفت شدگی رونده[۱۶]» می‌گویند بدست آورد.

$$\alpha(Q^{۲}) = \frac{\alpha_{۰}}{۱ - \frac{\alpha_{۰}}{۳\pi} \ln\left(\frac{Q^{۲}}{M^{۲}}\right)} \qquad (۳ - ۳۰)$$

به این دلیل به آن «رونده» می‌گویند که به $Q^{۲}$ وابسته است. می‌توانیم مانند بخش قبل، حد بالای M را حذف کنیم و با وارد کردن μ این رابطه را بازبهنجارش کنیم:

$$\alpha(Q^{۲}) = \frac{\alpha(\mu^{۲})}{۱ - \frac{\alpha(\mu^{۲})}{۳\pi} \ln\left(\frac{Q^{۲}}{\mu^{۲}}\right)} \qquad (۳ - ۳۱)$$

چون $\alpha(Q^{۲})$ همیشه مثبت است پس عبارت $(\alpha/۳\pi) \ln (Q^{۲}/\mu^{۲})$ باید از یک، کوچکتر باشد. همینطور که $Q^{۲}$ زیاد می‌شود، فوتون بارهای بیشتری را خواهد دید تا اینکه در یک مقدار بسیار بزرگ، اما محدود $Q^{۲}$، ثابت جفت شدگی $\alpha(Q^{۲})$ نا محدود می‌شود.

[۱۶] Running Coupling Constant

۴.۳ ثابت جفت‌شدگی رونده در QCD

ثابت جفت‌شدگی که در رابطه‌ی (۳—۳۱) معرفی شد در QED و برای تبادل فوتون است. همین فرایندها می‌تواند برای یک گلئون نیز اتفاق بیفتد. اما گلئون می‌تواند به یک کوارک و پاد کوارک، یا به دو گلئون عرضی، یا به یک گلئون عرضی و یک گلئون کولمبی تبدیل شود. در نتیجه برای یک حلقه، سه دیاگرام وجود دارد. سهم تمام دیاگرام‌ها را هم که محاسبه کنیم ضریب $\ln(Q^۲/\mu^۲)$ در مخرج کسر رابطه‌ی (۳—۳۱) چنین می‌شود [۱۱] :

$$\frac{\alpha_s(\mu^۲)}{۴\pi}\left(-\frac{۲}{۳}n_f - ۵ + ۱۶\right) \qquad (۳۳-۳)$$

که n_f تعداد طعم‌های کوارکی فعال است. با استفاده از این رابطه، ثابت جفت‌شدگی رونده در QCD چنین است:

$$\alpha_s(Q^۲) = \frac{\alpha_s(\mu^۲)}{۱ + \frac{\alpha_s(\mu^۲)}{۱۲\pi}(۳۳ - ۲n_f)\ln\left(\frac{Q^۲}{\mu^۲}\right)} \qquad (۳۴-۳)$$

می‌بینیم که در مخرج کسر، علامت منفی به علامت مثبت تبدیل شده است. فقط در دنیائی که دارای بیش از ۱۶ طعم کوارکی می باشیم (ما بطور مطمئنی درانرژیهای موجود زیر این عدد خواهیم بود) علامت ضریب جمله لگاریتمی همانند آن چیزی است که در QED داریم. این بدین معنی است که با افزایش $Q^۲$ مقدار $\alpha_s(Q^۲)$ کاهش می‌یابد و لذا برای اندر کنشهای با فاصله کوتاه کوچک می باشد. در این حالت تئوری بطور مجانبی آزاد می باشد[۱۷] . کوارک‌ها تا وقتی که کنار هم هستند آزادند. ولی هنگامی که بخواهیم آنها را از یکدیگر دور کنیم، نیروی بیشتری به هم واردکرده و یکدیگر را با شدت بیشتری جذب می‌کنند. در این حالت اندر کنشها با فاصله بزرگ مد نظر بوده و بالطبع آن مقدارانرژی کاوش گر فوتونی ،$Q^۲$، کم شده و $\alpha_s(Q^۲)$ افزایش می‌یابد. به همین دلیل نمی‌توان یک کوارک را از درون یک هادرون بیرون کشید و کوارک‌ها همیشه با هم و در داخل هادرون‌ها یافت می‌شوند. این را پَربست کوارک‌ها[۱۸] می‌نامند.

از رابطه‌ی (۳—۳۴) پیداست که در یک $Q^۲$ ی به اندازه‌ی کافی کوچک، مقدار $\alpha_s(Q^۲)$ می‌تواند نامحدود شود. با مساوی صفر قرار دادن مخرج این رابطه، می‌توان مقدار

---

[۱۷] Asymptotic Freedom

[۱۸] Quark Confinement

$Q^۲$ را بدست آورد. در اینجا آنرا با $\Lambda^۲$ نمایش می‌دهیم[۱۲]:

$$\Lambda^۲ = \mu^۲ \exp\left[\frac{-۱۲\pi}{(۳۳ - ۲n_f)\alpha_s(\mu^۲)}\right] \qquad (۳۵ - ۳)$$

در اینصورت ثابت جفت‌شدگی برابر خواهد شد با:

$$\alpha_s(Q^۲) = \frac{۱۲\pi}{(۳۳ - ۲n_f)\ln\left(\frac{Q^۲}{\Lambda^۲}\right)} \qquad (۳۶ - ۳)$$

اگر $Q^۲$ بزرگتر از $\Lambda^۲$ باشد، ثابت جفت‌شدگی کوچک خواهد شد و برهم‌کنش بین کوارک‌ها و گلئون‌ها ضعیف است و تئوری اختلالی معتبر است. اگر $Q^۲$ در حد $\Lambda^۲$ باشد، کوارک‌ها و گلئون‌ها در داخل خوشه‌هایی به نام هادرون، به شدت مقیدند و تئوری اختلالی در آنجا چندان اعتبار ندارد. تئوری، مقدار Λ را پیش‌بینی نکرده است و این، یک پارامتر آزاد است که از برازش داده های آزمایشگاهی مربوط به تابع ساختارهای هادرونی بدست آمده و مقدار آن حدوداً باید بین ۰/۱ تا ۰/۵ گیگا الکترون ولت می باشد.

۵.۳ نگاهی دیگر

هنگامی که در فرایند بازبهنجارش پذیزی دامنه هائی که بر حسب m،e و ... محاسبه شده اند مجدد بر حسب m_R،e_R و... بیان می شوند یک پیچش غیر استادانه و نا پسند وقتی که نظریه از درون بررسی می شود وجود دارد. در حالیکه تفسیر فیزیکی فرایند مورد بحث ساده می باشد ولیکن ممکن است از دید ریاضی آنطور که ا نتظار می رود خوشایند نباشد. فرایند جانشین آن است که‌ازابتدا روی پارامتر هائی در بسط اختلالی تا کید کنیم که هما ن کمیات فیزیکی m_R،e_R و... باشند. برای شروع این روش پارامتر جرم الکترون را در نظر بگیرید. این فرایند مبتنی بر معادله دیراک بصورت زیر است

$$(i\partial\!\!\!/ - m_R + eA\!\!\!/ + \delta m)\psi = ۰ \qquad (۳۷ - ۳)$$

(بطوریکه بعنوان مثال $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu\partial_\mu$) تا اینکه بر معادله زیر متکی باشد

$$(i\partial\!\!\!/ - m + eA\!\!\!/)\psi = ۰ \qquad (۳۸ - ۳)$$

جائیکه‌در (۳—۳۷) ما جابجا ئی در جرم را بصورت $\delta_m = m_R - m$ معر فی نمو ده‌ائم بطوریکه بعنوان یک اندر کنش جدید در نظر گرفته می شود و اکنون معادله دیراک برای یک ذره آزاد فیزیکی بصورت $(i\partial\!\!\!/ - m_R)\psi = ۰$ می با شد . بطور مشابه، ماباید همه کمیاتی که در (۳—۳۷) ظاهر می شوند را بر حسب هم ارزهای باز بهنجارش شده آنهاو

تصحیحات مختلف نظیر δm دو باره بنویسیم. بطور طبیعی وقتی به دنبال آن هستیم که دامنه ها را در ا ین نظریه اختلالی جدید محاسبه کنیم با همان واگرائیهای قدیمی که قبلا داشتیم مواجه می شویم. هر چند اکنون یک تفاوت مهم وجود دارد و آن این است که سهم های قسمتهای جدید نظیر δ_m را که‌از طریق باز نویسی m،e بر حسب m_R،e_R ظاهر می شوند در نظر میگیریم. این قسمتهای اضافی از قبل نا شناخته می باشند (همانند بار عریان e و جرم m).” یک نظریه بازبهنجارش پذیر، نظریه‌ای است که در آن همه این جملات می توانند طوری انتخاب شوند که همه واگرائیها را مرتبه به مرتبه در نظریه اختلالی جدید که مبتنی بر m_R،e_R و... است حذف نموده باشد. “ این جملات اضافی بعنوان ” جملات متقابل (Counter term)“ نامیده می شود[۱۳] و در یک نظریه بازبهنجارش پذیر تعداد محدودی از آنها وجود دارد. بسط بر حسب m_R،e_R و... بعنوان نظریه اختلالی بازبهنجارش پذیر نامیده می شود.در این روش تمام پارامتر ها بعنوان کمیات بازبهنجارش پذیر تفسیر می شوند.

مراجع

[1] The original papers are collected in M.Gell-Mann and Y.Ne'eman, *The Eightfold way* (New York: Benjamin, 1964).

[2] L. J.Tassie, The Physics of Elementary particles; Longman, 1973.

[3] V. E Barnes et al, Phys. Rev. Lett **12** (1964) 204.

[4] An extensive bibilography on the Quark model, and useful commentary, is given by O. W. Greenberg, Am. Rev.J. Phys **50** (1982) 1074.

[5] O. W. Greenberg, Phys.Rev.Lett. **13** (1964) 598.

[6] I. J. R. Aitchison, Relativistic Quntum Mechanics (1972); London: Macmillan.

[7] I. J. R. Aitchison and A.J.G.Hey,Gauge Theories in Particle Physics Adam Hilger LED, Bristol (1982).

[8] J. D. Bjorken and S.D. Drell, Relativistic Quntum Mechanics (1964); McGraw Hill, London.

[9] J.M.Jauch and F.Rohlich, The Theory of Photons and Electrons (1976); Springer Verlag. , Berlin.

[10] C.J. Maxwell and A.Mirjalili, Nucl. Phys **B577** (2000) 209.

[11] F.Halzen and A.D. Martin,Quarks and Leptons: An Introduction Course in Modern Physics (1984); John Wiley and Sones.

[12] R.K. Ellis, W.J.Stirling and B.R.Webber, QCD and Collider Physics (1996); Cambridge university Press.

[13] T.Muta, Foundations of Quantum Chromodynamics (1987); Word Scientific Publishing.