يکي از ويژگي هاي قابل توجه زنجيره هاي اسپيني امکان وجود حالت پايه ي دقيقا ضربي به ازاي مقادير خاصي از ضرايب بر هم کنش و ميدان خارجي است. اين موضوع ابتدا توسط Kurman ، Thomas ، muller و Muller ، Hrock در حالت زنجيره ي يک بعدي با بر هم کنش همسايه اول .XYZ بررسي شد. n اسپين S (که لزوما يکسان نيست) با بر هم کنش XYZ دلخواه در ميدان خارجي وابسته به مکان در نظر بگيريد. هاميلتوني سامانه به شکل روبرو است:

$$H = \sum_{i=1}^{N} b^i S_i^z - \frac{1}{2}\sum_{i,j}(v_x^{ij} s_i^y S_j^y + v_y^{ij} S_i^y S_i^y + v_z^{ij} S_i^z S_j^z) \tag{1}$$

ابتدا بررسي مي کنيم که تحت چه شرايطي H ،ويژه بردار ضربي به شکل زير خواهد داشت.

$$\mid \Theta >= \otimes_{i=1}^{n} exp[i\theta_i S_i^y] \mid 0_i >= \otimes_{i=1}^{n}[\sum_{k=0}^{2s_i} \sqrt{\binom{k}{2s_i}} \cos^{2s_i-k}(\frac{\theta_i}{2}) \sin^k(\frac{\theta_i}{2}) \mid k_i > \tag{2}$$

که داريم

$$S_i^z \mid K_i >= (K - S_i) \mid K_i > \tag{3}$$

مي توانيم به جاي معادله

$$H \mid \Theta >= E_\Theta \mid \Theta > \tag{4}$$

معادله

$$H_\Theta \mid 0 >= E_\Theta \mid 0 > \tag{5}$$

را حل کنيم. که

$$H_\Theta = e^{-i\sum_i \Theta_i S_i^y} H e^{i\sum_i \Theta_i S_i^y} \tag{6}$$

$$\mid 0 >= \otimes_{i=1}^{n} \mid 0_i > \tag{7}$$

با تبديلات زير به ها ميلتوني دوران يافته مي رسيم:

$$S_i^\mu \longrightarrow e^{-i\Theta_i S_i^y} S_i^\mu e^{i\Theta_i S_i^y} \tag{8}$$

يعني

$$S_i^{z,x} \longrightarrow S_i^{z,x}\cos(\Theta_i) \pm S_i^{z,x}\sin(\Theta_i) \tag{9}$$

$$S_i^y \longrightarrow S_i^y \tag{10}$$

که به معادلات زير مي رسيم:

$$v_y^{ij} = v_x^{ij}\cos(\Theta_i)\cos(\Theta_j) + v_z^{ij}\sin(\Theta_i)\sin(\Theta_j)$$

$$b^i sin(\Theta_i) = \sum_j (s_j - \frac{1}{2}\delta_{ij})\big(v_x^{ij}\cos(\Theta_i)\sin(\Theta_j) - v_z^{ij}\sin(\Theta_i)\cos(\Theta_j)\big)$$

$$E_= -\sum_i s_i[b^i\cos(\Theta_i)+\frac{1}{2}\sum_j\left(s_i-\frac{1}{2}\delta_{ij}\right)(\upsilon_x^{ij}\sin(\Theta_i)\sin(\Theta_j)+\upsilon_z^{ij}\cos(\Theta_i)\cos(\Theta_j))+\frac{1}{4}(\upsilon_x^{ii}+\upsilon_y^{ii}+\upsilon_z^{ii})] \tag{۱۱}$$

حالت پایه بودن

مي خواهيم ثابت کنيم که اگر برای هر i

$$|\upsilon_y^{ij}|<\upsilon_x^{ij} \tag{۱۲}$$

و

$$\Theta_i\in(0,\pi) \tag{۱۳}$$

در این صورت $|\pm\Theta>$ حالت پایه است.

لم:اگر تمام درایه هاي ماتریس هرمیتي H حقیقي باشند در این صورت هر ویژه مقدار این ماتریس، حالتي با ضرایب حقیقي دارد. اثبات: اگر E ویژه مقدار و $|\Psi>$ ویژه حالت H باشد، $|\Psi>$ را مي توان به شکل زیر نوشت:

$$|\Psi>=|X>+i|Y>$$

که تمام ضرایب $|X>$و $|Y>$ حقیقي باشند.

$$H\mid\Psi>=H\mid X>+H\mid Y>\implies H\mid X>+iH\mid Y>=E\mid X>+iE\mid Y>\implies\begin{cases}H\mid X>=E\mid X>\\H\mid Y>=E\mid Y>\end{cases} \tag{۱۴}$$

اگر

$$|\upsilon_y^{ij}|<\upsilon_x^{ij}$$

، در این صورت ضرایب غیر قطري هامیلتوني در پایه هاي $|K_i>$ نا مثبت هستند. جملات غیر قطري به صورت روبرو هستند که:

$$-\upsilon_x^{ij}S_i^XS_j^x-\upsilon_y^{ij}S_i^yS_j^y=-\upsilon_+^{ij}(s_i^+S_j^-+S_i^-S_j^+)-\upsilon_-^{ij}(S_i^+S_j^++S_i^-S_j^-) \tag{۱۵}$$

$$S_j^{\pm}=S_j^x\pm iS_i^y \tag{۱۶}$$

$$\upsilon_\pm^{ij}=\frac{1}{4}(\upsilon_x^{ij}\pm\upsilon_y^{ij})\geq 0 \tag{۱۷}$$

با استفاده از لم قبل مي دانیم که حالت پایه اي به شکل $|X>=\sum_{i=1}^N x_i|i>$ داریم که $\forall i \quad x_i\in\mathbf{R}$ حال خواهیم دید که $<x|H|x>$ وقتي ضرایب x_i همه هم علامت باشند کمینه خواهد شد. در واقع ضرایب غیر هم علامت $<x|H|x>$ را بزرگ تر مي کنند.

$$H=\sum_{i,j=1}^N H_{ij}\mid i><j\mid \tag{۱۸}$$

$$H_{ij}\leq 0 \qquad i\neq j \tag{۱۹}$$

$$<x\mid H\mid x>=\big(\sum_{i=1}^N x_i<i\mid\big)H\big(\sum_{j=1}^N x_j\mid j>\big)=\sum_{i,j=1}^N x_ix_jH_{ij} \tag{۲۰}$$

$$<x \mid H \mid x> = \sum_{i=1}^{N} H_{ii} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i<j} H_{ij} x_i x_j \qquad (۲۱)$$

میبینیم که اگر احیانا ضرایب x_i هم علامت نبا شند با هم علامت کردن تمام ضرایب بدون اینکه یکه بودن بردار $|x>$ را تغییر دهیم $<x|H|x>$ را کوچک تر خواهیم کرد.چون <H> در حالت پایه ي یکه کمینه است. پس تمام ضرایب x_i هم علامت هستند. از طرفي تمام ضرایب $|\Theta>$ نیز حقیقي مثبت هستند.پس $|\Theta>$ و $|X>$ بر هم عمود نیستند.هر دو ویژه حالت هامیلتوني هستند پس ویژه مقدار یکساني دارند.یعني $|\Theta>$ حالت پایه است. پس $|-\Theta>$ نیز حالت پایه است.