

خودسامان دهی بحرانی

علی ملباشی

۹۰/۹/۱۴

فهرست

- تعریف خودسامان‌دهی بحرانی
- شواهد طبیعی خودسامان‌دهی بحرانی
- مدل‌های خودسامان‌دهی بحرانی
- طبقه‌بندی مدل‌های تپه‌ی شنی
- آشوب در مدل‌های تپه‌ی شنی

توصیف خودسامان‌دهی بحرانی

- قوانین توانی فضایی و زمانی
- شباهت به سیستم‌های ترمودینامیکی
- تنظیم ظریف
- توزیعی بدون میانگین!
- آستانه تحریک
- تحریک کند
- مثال تپه‌ی شنی

تعریف خودسامان‌دهی بحرانی

سامانه‌ای با بینهایت درجه‌ی آزادی که در حالت پایای غیرتعادلی قرار دارد و مادامی که با آهنگ کند تحریک می‌شود و اهلش‌های انفجارگونه در آن رخ می‌دهد به طوری که همبستگی‌های فضایی یا زمانی بلند برد دارد.

ردپای خودسامان‌دهی بحرانی

- قوانین توانی

$$P(s) \sim s^{-b}$$

- ساختارهای فرکتالی

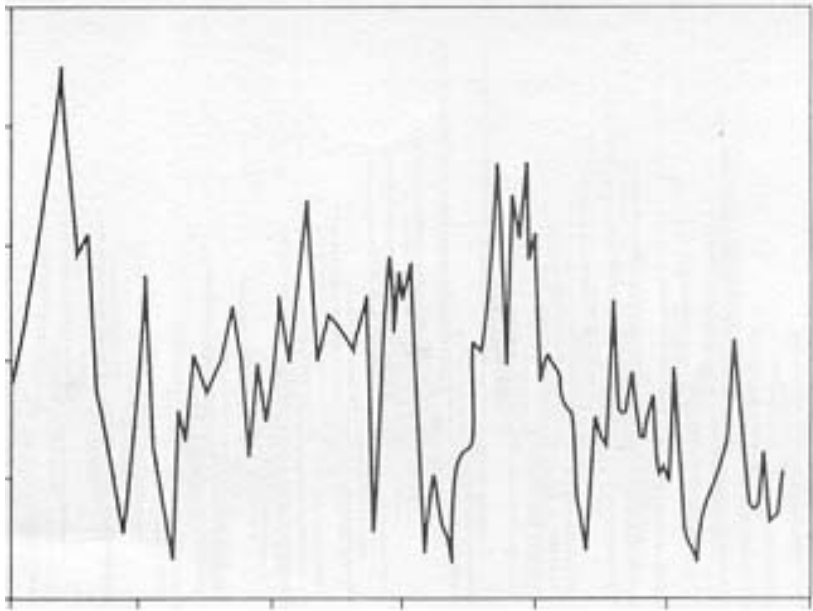
$$L(\epsilon) \sim \epsilon^{1-d}$$

- نوفه‌ی صورتی

نوفه سفید

نوفه صورتی

تک بسامد



(ب) نوفہی صورتی



(الف) نوفہی سفید

تفاوت آشوبناکی و پیچیدگی

- سامانه آشوبناک:

$$x_{n+1} = \alpha x_n (1 - x_n)$$

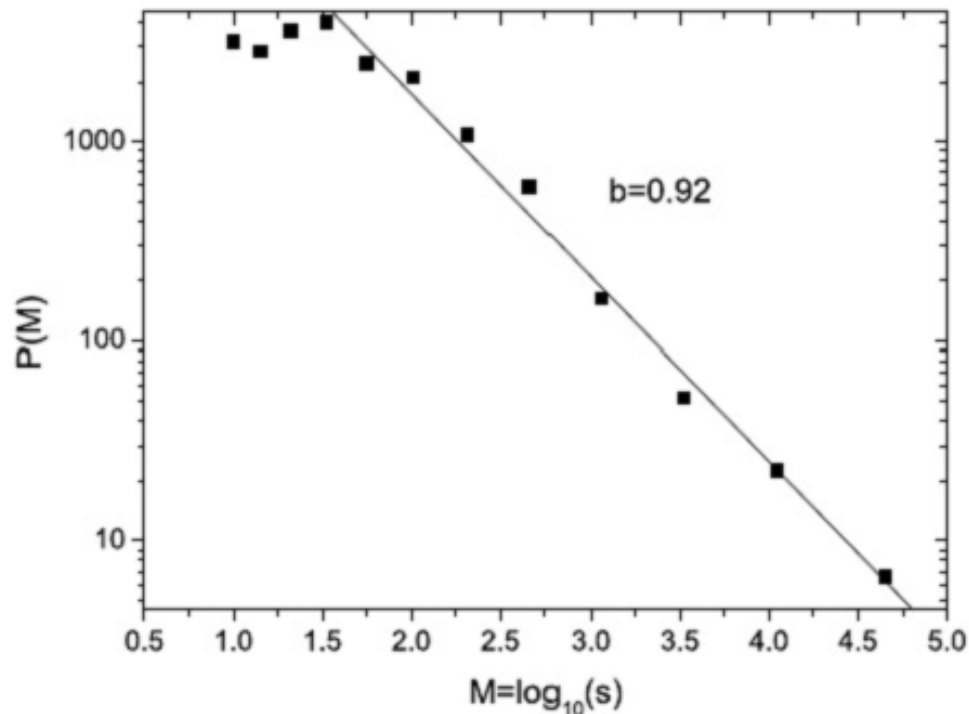
پیش‌بینی ناپذیری، نوفه کاتوره‌ای، ساختار فرکتالی رباینده

- سامانه پیچیده

پیش‌بینی ناپذیری، نوفه صورتی، ساختار فرکتالی هندسی

شواهد طبیعی

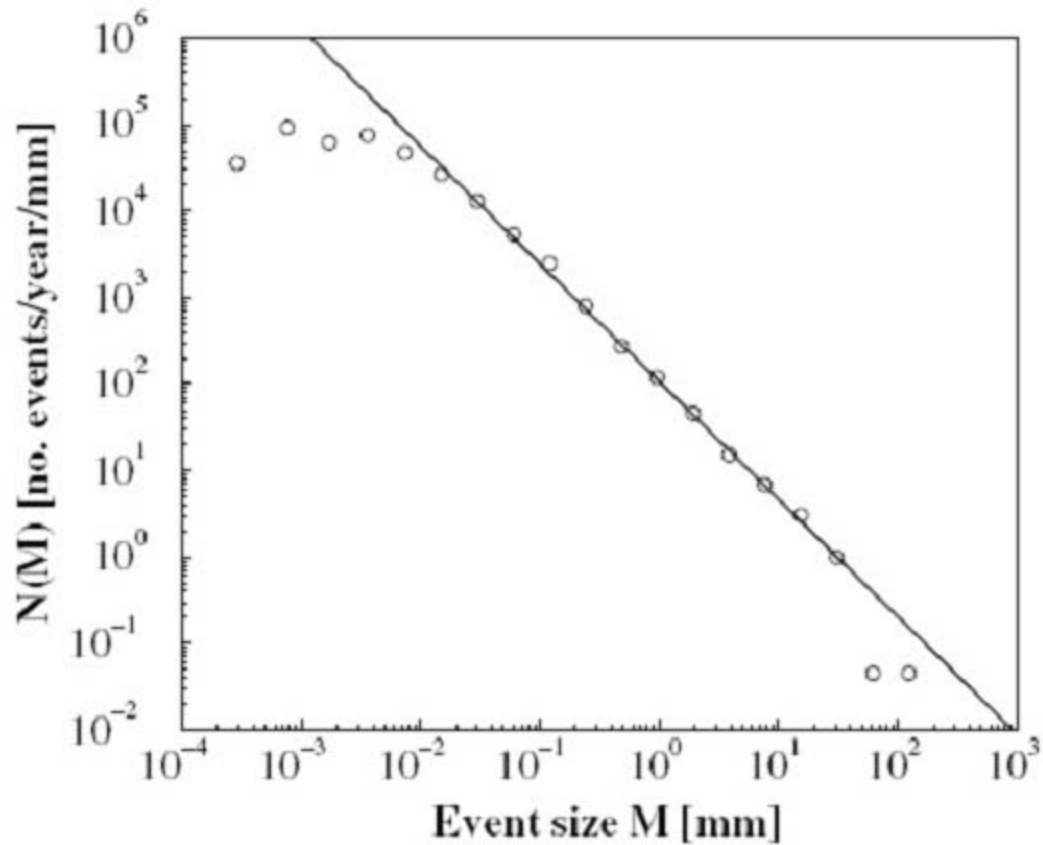
زلزله



شکل ۳.۱: توزیع زلزله‌هایی که بین سال‌های ۱۹۷۴ تا ۲۰۰۱ در منطقه‌ی نیومادرید رخ داده است.
LAORINCZ, K.-A. *Avalanche dynamics in a three-dimensional pile of rice*. Ph.D. thesis, Vrije niversity, Amsterdam, May 2008.

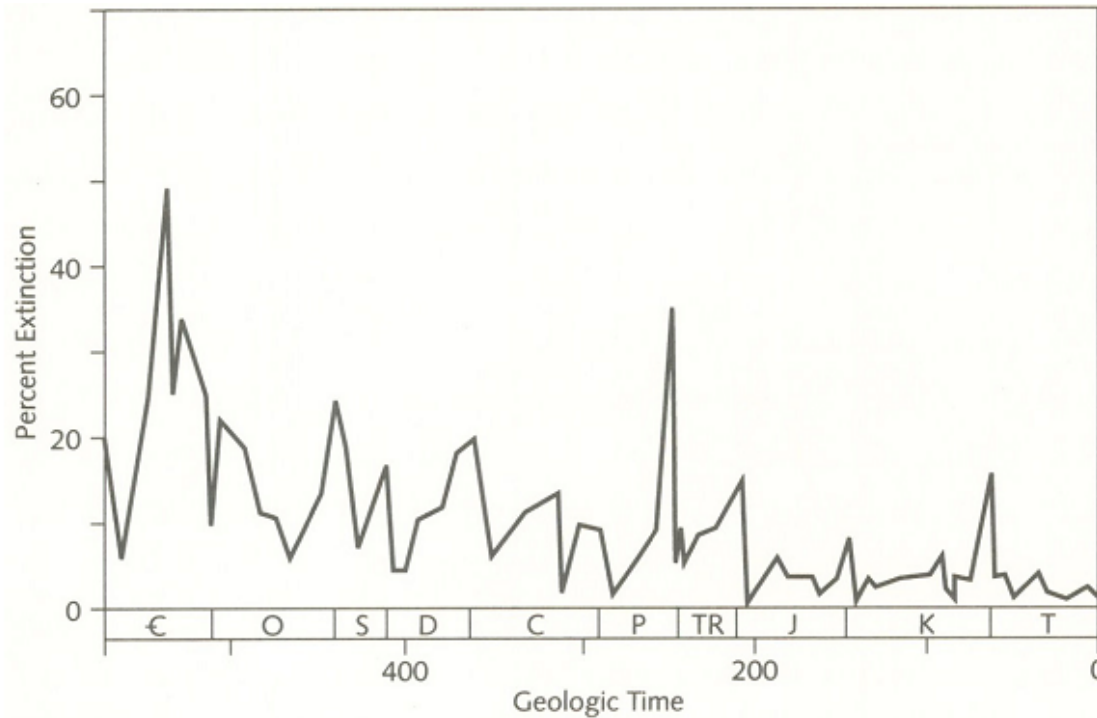
شواهد طبیعی

باران



شواهد طبیعی

انقراض گونه‌ها



شکل ۵.۱: انقراض گونه‌ها در ۶۰۰ میلیون سال اخیر. محور افقی زمان زمین‌شناختی و محور عمودی درصد انقراض را نشان می‌دهد. منحنی این نمودار نشان‌دهنده درصد خانواده‌هایی است که در حدود ۴ میلیون سال منقرض شده‌اند. تصویر از مرجع [۳].

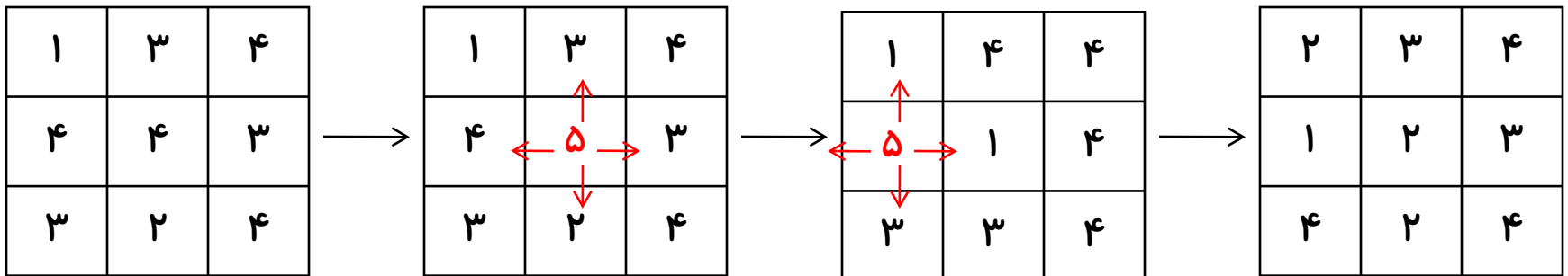
مدل‌های خودسامان‌ده بحرانی

- مدل تپه‌ی شنی (۱۹۸۷)
- مدل جرم و فنر (۱۹۸۹)
- مدل آتش‌سوزی جنگل (۱۹۹۰)
- مدل ولگشت حلقه‌برداشته
- ...

مدل‌های تپه‌ی شنی

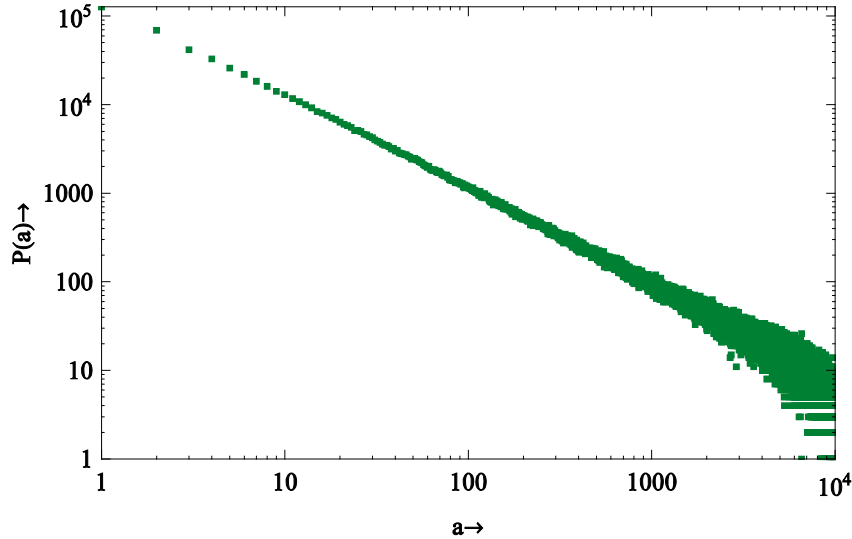
۱- مدل BTW (بک، تَنگ و ویزنفلد، ۱۹۸۷)

$$z(i, j) > z_c (= 4) \begin{cases} z(i, j) \rightarrow z(i, j) - 4 \\ z(i \pm 1, j \pm 1) \rightarrow z(i \pm 1, j \pm 1) + 1 \end{cases}$$

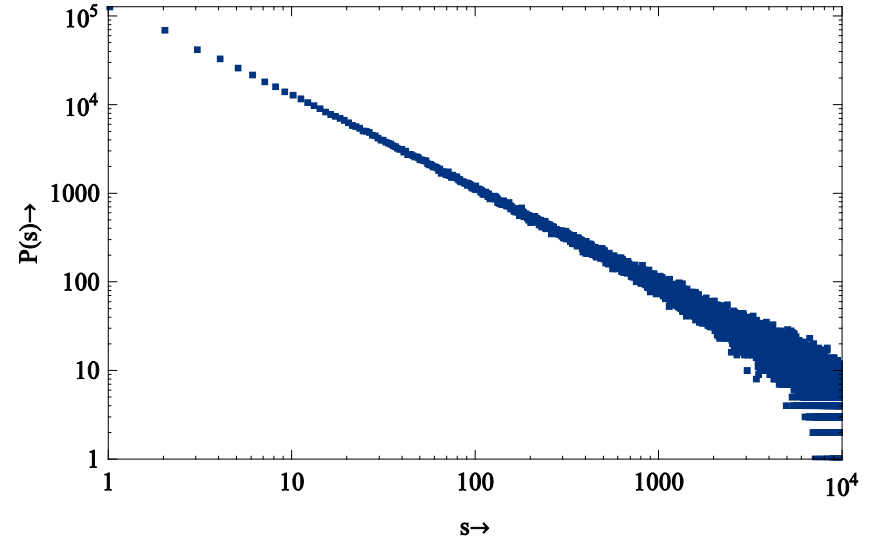


توزیع بهمن‌ها در مدل BTW

توزیع حجم بهمن‌ها در پنج میلیون بهمن (طول سامانه ۱۲۸)



توزیع تعداد کل فروریزش‌ها در هر بهمن در پنج میلیون بهمن (طول سامانه ۱۲۸)



مدل تپه‌ی شنی آبل‌ی (ASM)

تعریف مدل: گرافی با N گره، $\{p_i\}$ احتمال انتخاب، $\{z_{i,c}\}$ ارتفاع بحرانی و ماتریس $N \times N$ فروریزش Δ

$$(z_i \rightarrow z_i + 1, z_i > z_{i,c}) \rightarrow z_j \rightarrow z_j - \Delta_{ij}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & \\ & -1 & 4 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

مثلاً روی شبکه مربعی:

$$a_i a_j C = a_j a_i C$$

خاصیت آبل‌ی:

مدل تپه‌ی شنی آبل‌ی (ASM)

تابع دو نقطه‌ای:

$$G_{ik} \sim \begin{cases} r_{ik}^{2-d} & d > 2 \\ \log(L/r_{ik}) & d = 2 \\ (L - r_{ik}) & d = 1 \end{cases}$$

برهمکنش‌های بلندبرد

سایر مدل‌های تپه‌ی شنی

۲- مدل ژنگ (ژنگ، ۱۹۸۹)

$$\delta \in [p, q) \subseteq [0, 1)$$

$$z(i, j) > z_{critical} (= 1) \begin{cases} z(i, j) \rightarrow 0 \\ z(i \pm 1, j \pm 1) \rightarrow z(i \pm 1, j \pm 1) + \frac{z(i, j)}{4} \end{cases}$$

./۷۸	./۲۵	./۹۲
./۷۵	./۸۵	./۶۵
./۳۴	./۵	./۹۷

→

./۷۸	./۲۵	./۹۲
./۷۵	۱./۲۱	./۶۵
./۳۴	./۵	./۹۷

→

./۷۸	./۷۹	./۹۲
۱./۰۹	.	./۹۹
./۳۴	./۸۴	./۹۷

سایر مدل‌های تپه‌ی شنی

۳- مدل BTW پیوسته (عظیمی، لطفی، مقیمی عراقی، ۲۰۰۷)

$$\delta \in [p, q) \subseteq [0, 1)$$

$$z(i, j) > z_{critical} (= 1) \begin{cases} z(i, j) \rightarrow z(i, j) - 1 \\ z(i \pm 1, j \pm 1) \rightarrow z(i \pm 1, j \pm 1) + \frac{1}{4} \end{cases}$$

۰/۷۸	۰/۲۵	۰/۹۲
۰/۷۵	۰/۸۵	۰/۶۵
۰/۳۴	۰/۵	۰/۹۷

→

۰/۷۸	۰/۲۵	۰/۹۲
۰/۷۵	۱/۲۱	۰/۶۵
۰/۳۴	۰/۵	۰/۹۷

→

۰/۷۸	۰/۵	۰/۹۲
۱/۰	۰/۲۱	۰/۹
۰/۳۴	۰/۷۵	۰/۹۷

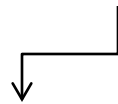
سایر مدل‌های تپه‌ی شنی

۴- مدل مانا (مانا، ۱۹۹۰)

$$z(i, j) > 2$$



$$z(i, j) \rightarrow z(i, j) - 2$$



$$z(i, j \pm 1) \rightarrow z(i, j \pm 1) + 1$$



$$z(i \pm 1, j) \rightarrow z(i \pm 1, j) + 1$$

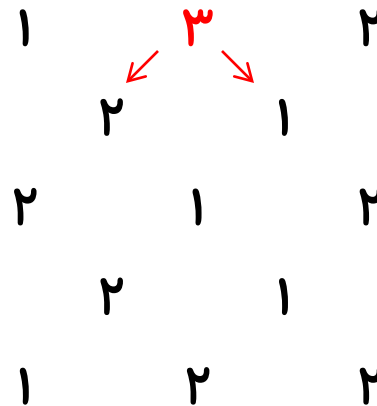
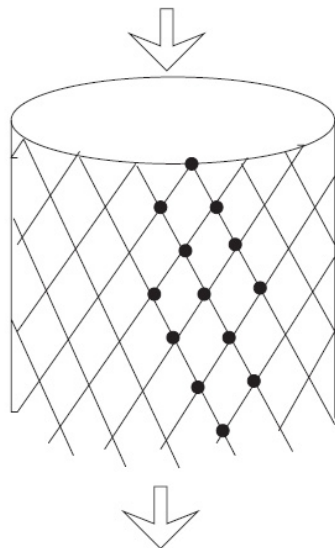
۱	۲	۲
۲	۳	۲
۲	۱	۲

۱	۲	۲
۲	۳	۲
۲	۱	۲

سایر مدل‌های تپه‌ی شنی

۵- مدل جهت‌دار (رامازومی و دار، ۱۹۸۹)

$$z_i > z_{critical} (= 2) \quad \begin{cases} z(i, j) \rightarrow z(i, j) - 2 \\ z(i+1, j \pm 1) \rightarrow z(i+1, j \pm 1) + 1 \end{cases}$$



طبقه‌بندی مدل‌های تپه‌ی شنی

مجموعه نماهای بنهور و بیهام (۱۹۹۶) $\{s, a, t, d, r, p\}$

بردار واهلش $\Delta E = (E_N, E_W, E_S, E_E)$

مدل BTW و ژنگ $\Delta E = (1, 1, 1, 1)$

$(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)$

مدل مانا

$(0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)$

جریان واهلش $\mathbf{J}[\Delta E] = \sum_{\mathbf{e}} \Delta E(\mathbf{e}) \mathbf{e}$

متوسط جریان واهلش $\mathbf{J} = \sum_{\Delta E} \mathbf{J}[\Delta E] P(\Delta E)$

طبقه‌بندی مدل‌های تپه‌ی شنی

$J(\Delta E) = 0$  غیر جهت‌دار

مدل‌های BTW، BTW پیوسته و ژنگ

$\begin{cases} J(\Delta E) \neq 0 \\ J = 0 \end{cases}$  به‌طور متوسط غیر جهت‌دار

مدل مانا

$J \neq 0$  جهت‌دار

مدل رامازوامی - دار

روش کار

دو پیکربندی نزدیک به هم Z و Z' را در نظر می‌گیریم که

$$z'_{i,j}(t=0) = z_{i,j}(t=0)$$

حداکثر در 0.0005 خانه‌ها $z'_{i,j}(t=0) = z_{i,j}(t=0) \pm 1$

در هر گام زمانی روی خانه‌ی (p,q) هر دو تپه شن ریخته می‌شود و فاصله‌ی دو تپه به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$H(t) = \left(\sum_{i,j=1}^L [z_{i,j}(t) - z'_{i,j}(t)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$