انتشارگر الکترون در حضور میدان مغناطیسی ثابت

سعیده صادقیان

استاد راهنما: دکتر ندا صدوقی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده فیزیک

بهمن ۱۳۸۹

فهرست

فهرست

الکترون‌های غیرنسبیتی در میدان مغناطیسی

- معادله شرودینگر مستقل از زمان

$$H\Psi = E\Psi$$

الکترون‌های غیرنسبیتی در میدان مغناطیسی

- معادله شرودینگر مستقل از زمان

$$H\Psi = E\Psi$$

- هامیلتونی الکترون در حضور میدان مغناطیسی

$$H = \frac{1}{2M}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + e\phi - \mu \cdot \mathbf{B}$$

پیمانه متقارن

- با انتخاب پیمانه متقارن، $\mathbf{A} = (-\frac{y}{2}B, \frac{x}{2}B, 0)$، هامیلتونی عبارتست از

$$H = \frac{1}{2M}\left[(p_x - \frac{eB}{2}y)^2 + (p_y + \frac{eB}{2}x)^2 + p_z^2\right] - \mu_z B_z$$

پیمانه متقارن

- با انتخاب پیمانه متقارن، $\mathbf{A} = (-\frac{y}{2}B, \frac{x}{2}B, 0)$، هامیلتونی عبارتست از

$$H = \frac{1}{2M}\left[(p_x - \frac{eB}{2}y)^2 + (p_y + \frac{eB}{2}x)^2 + p_z^2\right] - \mu_z B_z$$

- $\mu = (\frac{-eg}{2M}\mathbf{s})$ ممان مغناطیسی ذاتی، $\mathbf{s} = \hbar\sigma$ و g ثابت ژیرومغناطیسی

پیمانه متقارن

- با انتخاب پیمانه متقارن، $\mathbf{A} = (-\frac{y}{2}B, \frac{x}{2}B, 0)$، هامیلتونی عبارتست از

$$H = \frac{1}{2M}\left[(p_x - \frac{eB}{2}y)^2 + (p_y + \frac{eB}{2}x)^2 + p_z^2\right] - \mu_z B_z$$

- $\mu = (\frac{-eg}{2M}\mathbf{s})$ ممان مغناطیسی ذاتی، $\mathbf{s} = \hbar\sigma$ و g ثابت ژیرومغناطیسی
- معادله شرودینگر:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left[(\partial_x - i\frac{eBy}{2\hbar})^2 + (\partial_y - i\frac{eBx}{2\hbar})^2 + (\partial_z)^2\right]\Psi + 2B\mu_B\sigma = E\Psi$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2M}$$

پیمانه متقارن

- پیشنهاد تابع موج به شکل $u(\rho)e^{im\phi}e^{ik_3z}$ و تعاریف $q \equiv \sqrt{\frac{eB}{2}}\rho$ و $\lambda = \frac{4M}{eB}(E - \frac{k_3^2}{2M})$

پیمانه متقارن

- پیشنهاد تابع موج به شکل $u(\rho)e^{im\phi}e^{ik_3 z}$ و تعاریف $q \equiv \sqrt{\frac{eB}{2}}\rho$ و $\lambda = \frac{4M}{eB}(E - \frac{k_3^2}{2M})$
-

$$\frac{d^2u}{dq^2} + \frac{1}{q}\frac{du}{dq} - \frac{m^2}{q^2}u - q^2u + \lambda u = 0$$

پیمانه متقارن

- پیشنهاد تابع موج به شکل $u(\rho)e^{im\phi}e^{ik_3z}$ و تعاریف $q \equiv \sqrt{\frac{eB}{2}}\rho$ و $\lambda = \frac{4M}{eB}(E - \frac{k_3^2}{2M})$
-

$$\frac{d^2u}{dq^2} + \frac{1}{q}\frac{du}{dq} - \frac{m^2}{q^2}u - q^2u + \lambda u = 0$$

- جواب‌ها ضرایبی از توابع لاگر وابسته اند.

$$u(q) = q^{|m|}e^{-\frac{q^2}{2}}L_{n_r}^{|m|}(q); \qquad n_r = \frac{\lambda}{4} - \frac{1+|m|}{2}$$

پیمانه لاندائو

- $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\partial_x^2+(-i\partial_y+\frac{eBx}{\hbar})^2-\partial_z^2\right]\Psi(x,y,z) = (E-2B\mu_B\sigma)\Psi(x,y,z)$$

پیمانه لاندائو

- $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\partial_x^2+(-i\partial_y+\frac{eBx}{\hbar})^2-\partial_z^2\right]\Psi(x,y,z) = (E-2B\mu_B\sigma)\Psi(x,y,z)$$

- پیشنهاد تابع موج $\Psi(x,y,z) = e^{-i(k_2 y+k_3 z)}\phi(x)$ و تعاریف
$x_0 \equiv \ell_B^2 k_2$ و $\ell_B^2 \equiv \frac{\hbar}{eB}$ و $E' = E - 2B\mu_B\sigma - \frac{\hbar^2 k_3^2}{2M}$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\partial_x^2 + \frac{\hbar^2}{2M\ell_B^4}(x-x_0)^2\right]\phi = E'\phi, \quad K_{eff} = \frac{\hbar^2}{M\ell_B^4}$$

ترازهای لاندائو

n شمارنده ترازهای لاندائو

$$\begin{aligned}
\phi_n(x) &= \frac{1}{\pi^{1/4}\ell_B^{1/2}\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\ell_B^2}} H_n\left(\frac{x-x_0}{\ell_B}\right), \\
\omega_c &= \sqrt{\frac{K_{eff}}{M}} = \frac{eB}{M}, \\
E_n &= \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2M} + 2B\mu_B\sigma \\
&= \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}+\sigma\right) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2M}.
\end{aligned}$$

درجه تبهگنی

درجه تبهگنی

- تکانه k_2 کمیتی پیوسته است و در عبارت مربوط به انرژی ترازهای لاندائو وارد نمی‌شود، پس هر تراز انرژی به‌طور پیوسته تبهگن است.

درجه تبهگنی

- تکانه k_2 کمیتی پیوسته است و در عبارت مربوط به انرژی ترازهای لاندائو وارد نمی‌شود، پس هر تراز انرژی به‌طور پیوسته تبهگن است.
- کران‌دار کردن $S = L_x L_y$ و اعمال شرط مرزی:

$$k_2^m = \frac{2\pi}{L_y} m \Rightarrow \Delta k_2 = \frac{2\pi}{L_y}$$

درجه تبهگنی

- تکانه k_2 کمیتی پیوسته است و در عبارت مربوط به انرژی ترازهای لانداو وارد نمی‌شود، پس هر تراز انرژی به‌طور پیوسته تبهگن است.
- کران‌دار کردن $S = L_x L_y$ و اعمال شرط مرزی:

$$k_2^m = \frac{2\pi}{L_y} m \Rightarrow \Delta k_2 = \frac{2\pi}{L_y}$$

- قید $0 < x_0 < L_x$ نتیجه می‌دهد $k_2 = \frac{L_x}{\ell_B^2}$

درجه تبهگنی

- تکانه k_2 کمیتی پیوسته است و در عبارت مربوط به انرژی ترازهای لاندائو وارد نمی‌شود، پس هر تراز انرژی به‌طور پیوسته تبهگن است.
- کران‌دار کردن $S = L_x L_y$ و اعمال شرط مرزی:

$$k_2^m = \frac{2\pi}{L_y} m \Rightarrow \Delta k_2 = \frac{2\pi}{L_y}$$

- قید $0 < x_0 < L_x$ نتیجه می‌دهد $k_2 = \frac{L_x}{\ell_B^2}$
- نهایت تعداد حالتها (برای n و p_3 مشخص) برابر است با

$$N_{max} = \frac{S}{2\pi \ell_B^2}$$

درجه تبهگنی

درجه تبهگنی

- تبهگنی مربوط به اسپین الکترونها

$$E_n(\sigma = +\frac{1}{2}) = E_{n+1}(\sigma = -\frac{1}{2})$$

درجه تبهگنی

- تبهگنی مربوط به اسپین الکترونها

$$E_n(\sigma = +\frac{1}{2}) = E_{n+1}(\sigma = -\frac{1}{2})$$

- درجه تبهگنی هر حالتی از سیستم ذرات با اسپین ($\hbar s$)

$$(2s+1)\frac{eBS}{\hbar}$$

درجه تبهگنی

- تبهگنی مربوط به اسپین الکترونها

$$E_n(\sigma = +\frac{1}{2}) = E_{n+1}(\sigma = -\frac{1}{2})$$

- درجه تبهگنی هر حالتی از سیستم ذرات با اسپین ($\hbar s$)

$$(2s+1)\frac{eBS}{\hbar}$$

- تبهگنی ترازها نیز مانند انرژی ترازها، رابطه ای خطی با شدت میدان مغناطیسی دارد.

درجه تبهگنی

- تبهگنی مربوط به اسپین الکترونها

$$E_n(\sigma = +\frac{1}{2}) = E_{n+1}(\sigma = -\frac{1}{2})$$

- درجه تبهگنی هر حالتی از سیستم ذرات با اسپین ($\hbar s$)

$$(2s+1)\frac{eBS}{\hbar}$$

- تبهگنی ترازها نیز مانند انرژی ترازها، رابطه ای خطی با شدت میدان مغناطیسی دارد.
- در حد میدان مغناطیسی قوی در نظرگرفتن پایین‌ترین تراز لاندائو کافی است.

فهرست

- انتشارگر ذره آزاد در مکانیک کوانتومی:

$$U(t) = < X|e^{-iHt}|X_0 >$$

- انتشارگر ذره آزاد در مکانیک کوانتومی:

$$U(t) =< X|e^{-iHt}|X_0 >$$

- حالت غیر نسبیتی ($E = \frac{p^2}{2m}$)

$$U(t) = (\frac{m}{2\pi it})^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{im(X-X_0)^2}{2t}\right]$$

- انتشارگر ذره آزاد در مکانیک کوانتومی:

$$U(t) = < X| e^{-iHt} |X_0 >$$

- حالت غیر نسبیتی ($E = \frac{p^2}{2m}$)

$$U(t) = (\frac{m}{2\pi it})^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{im(X - X_0)^2}{2t}\right]$$

- حالت نسبیتی ($E = \sqrt{p^2 + m^2}$)

$$U(t) \xrightarrow{X^2 \gg t^2} \exp\left(-m\sqrt{X^2 - t^2}\right) \neq 0$$

میدان اسکالر حقیقی

◀

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2$$

میدان اسکالر حقیقی

- $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2$$

- $$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi = 0 \; (Klein - Gordon)$$

میدان اسکالر حقیقی

- $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2$$

- $$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi = 0 \; (Klein - Gordon)$$

- $$\frac{\partial^2 \Phi_p}{\partial t^2} + \omega_p^2 \Phi_p = 0; \; (\omega_p^2 \equiv p^2 + m^2)$$

میدان اسکالر حقیقی

- $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2$$
- $$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi = 0 \; (Klein - Gordon)$$
- $$\frac{\partial^2 \Phi_p}{\partial t^2} + \omega_p^2 \Phi_p = 0; \;\; (\omega_p^2 \equiv p^2 + m^2)$$
- $$\Phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{-ip.x} + a_p^\dagger e^{ip.x})$$

میدان اسکالر حقیقی

$$\Pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}(x)} = \dot{\Phi}(x)$$

$$\Pi(x) = (-i)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\left(a_p e^{-ip.x} - a_p^\dagger e^{ip.x}\right)$$

میدان اسکالر حقیقی

$$\Pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}(x)} = \dot{\Phi}(x)$$

$$\Pi(x) = (-i) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (a_p e^{-ip.x} - a_p^\dagger e^{ip.x})$$

کوانتش دوم

$$[\Phi(x), \Pi(y)] = i\delta^3(x-y)$$

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = [\Pi(x), \Pi(y)] = 0$$

علیت در نظریه میدان

- دامنه انتشار از y به x :

$$D(x-y) = <0|\Phi(x)\Phi(y)|0> = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} e^{-ip.(x-y)}$$

علیت در نظریه میدان

- دامنه انتشار از y به x :

$$D(x-y) =< 0|\Phi(x)\Phi(y)|0 >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}e^{-ip.(x-y)}$$

برای بازه زمان گونه $x^0 - y^0 = t, \vec{x} - \vec{y} = 0$

$$D(x-y) \xrightarrow{t\to\infty} e^{-imt}$$

علیت در نظریه میدان

- دامنه انتشار از y به x :

$$D(x-y) = <0|\Phi(x)\Phi(y)|0> = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} e^{-ip.(x-y)}$$

برای بازه زمان گونه $x^0 - y^0 = t, \vec{x} - \vec{y} = 0$

$$D(x-y) \xrightarrow{t\to\infty} e^{-imt}$$

برای بازه فضا گونه $x^0 - y^0 = 0, \vec{x} - \vec{y} = \vec{r}$

$$D(x-y) \xrightarrow{r\to\infty} e^{-mr}$$

علیت در نظریه میدان

- علیت:

$$[\Phi(x), \Phi(y)]\big|_{(x-y)^2<0} = 0$$

علیت در نظریه میدان

- علیت:

$$[\Phi(x), \Phi(y)]\big|_{(x-y)^2<0} = 0$$

- برای بازه زمان گونه

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = e^{-imt} - e^{imt}$$

علیت در نظریه میدان

- علیت:

$$[\Phi(x), \Phi(y)]\big|_{(x-y)^2<0} = 0$$

- برای بازه زمان گونه

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = e^{-imt} - e^{imt}$$

- برای بازه فضا گونه

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = e^{-mr} - e^{-mr} = 0$$

انتشارگر کلاین گوردون

- $$D_R(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) < [\Phi(x), \Phi(y)] >$$

انتشارگر کلاین گوردون

-
$$D_R(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) < [\Phi(x), \Phi(y)] >$$

-
$$D_F(x-y) =< T\{\Phi(x), \Phi(y)\} >= \begin{cases} < \Phi(x)\Phi(y) > & (x^0 > y^0) \\ < \Phi(y)\Phi(x) > & (y^0 > x^0) \end{cases}$$

انتشارگر کلاین گوردون

- $$D_R(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) < [\Phi(x), \Phi(y)] >$$

- $$D_F(x-y) =< T\{\Phi(x), \Phi(y)\} >= \begin{cases} < \Phi(x)\Phi(y) > & (x^0 > y^0) \\ < \Phi(y)\Phi(x) > & (y^0 > x^0) \end{cases}$$

- $$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) D_R(x-y) = -i\delta^4(x-y)$$

فهرست

معادله دیراک

- $$(i\not\partial - m)\psi(x) = 0,$$

معادله دیراک

- $$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0,$$

- $$\partial\!\!\!/ \equiv \gamma^{\mu}\partial_{\mu}$$

معادله دیراک

- $$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0,$$
- $$\partial\!\!\!/ \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$$
- جبر Clifford :
$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu},$$

انتشارگر آزاد دیراک

- $$(i\partial\!\!\!/ - m)G(x,x') = \delta(x - x')$$

انتشارگر آزاد دیراک

- $$(i\not{\partial} - m)G(x, x') = \delta(x - x')$$

- ناوردایی تابع گرین تحت انتقال :

$$G(x, x') = G(x - x')$$

انتشارگر آزاد دیراک

- $$(i\partial\!\!\!/ - m)G(x,x') = \delta(x-x')$$

- ناوردایی تابع گرین تحت انتقال :

$$G(x,x') = G(x-x')$$

- نمایش تابع گرین در فضای فوریه :

$$G(x,x') = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip\cdot x} S_F(p) e^{ip\cdot x'}$$

انتشارگر آزاد دیراک

- اعمال عملگر دیراک روی $G(x, y)$ و مقایسه با تابع دلتا در فضای فوریه

$$
\begin{aligned}
(i\partial\!\!\!/ - m)G(x, x') &= (i\partial\!\!\!/ - m)\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip\cdot x} S_F(p) e^{ip\cdot x'} \\
&= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip\cdot x} (p\!\!\!/ - m) S_F(p) e^{ip\cdot x'} \\
&= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip\cdot x} e^{ip\cdot x'}
\end{aligned}
$$

انتشارگر آزاد دیراک

- اعمال عملگر دیراک روی $G(x, y)$ و مقایسه با تابع دلتا در فضای فوریه

$$\begin{aligned}
(i\partial\!\!\!/ - m)G(x, x') &= (i\partial\!\!\!/ - m)\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip\cdot x} S_F(p) e^{ip\cdot x'} \\
&= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip\cdot x} (p\!\!\!/ - m) S_F(p) e^{ip\cdot x'} \\
&= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip\cdot x} e^{ip\cdot x'}
\end{aligned}$$

- $$S_F(p) = \frac{1}{p\!\!\!/ - m}$$

فهرست

معادله دیراک در میدان الکترومغناطیسی A_μ

$$(\not{\pi} - m)\psi = 0$$

$$\not{\pi} = \gamma^\mu (p_\mu + eA_\mu)$$

$$G = (\not{\pi} + m)\frac{1}{\not{\pi}^2 - m^2 + i\epsilon}$$

معادله دیراک در میدان الکترومغناطیسی A_μ

$$(\not\pi - m)\psi = 0$$

$$\not\pi = \gamma^\mu(p_\mu + eA_\mu)$$

$$G = (\not\pi + m)\frac{1}{\not\pi^2 - m^2 + i\epsilon}$$

- اگر میدان الکتریکی را خاموش کنیم و فقط میدان مغناطیسی ثابت داشته باشیم $(A_0 = 0)$

معادله دیراک در میدان الکترومغناطیسی A_μ

$$(\not{\pi} - m)\psi = 0$$

$$\not{\pi} = \gamma^\mu (p_\mu + eA_\mu)$$

$$G = (\not{\pi} + m)\frac{1}{\not{\pi}^2 - m^2 + i\epsilon}$$

- اگر میدان الکتریکی را خاموش کنیم و فقط میدان مغناطیسی ثابت داشته باشیم ($A_0 = 0$)
-

$$[\pi_0, \pi_\nu] = 0$$

تابع گرین در حضور میدان مغناطیسی

نمایش زمان ویژه

$$\frac{1}{A \pm i\epsilon} = \mp \int_0^\infty ds e^{\pm i(A \pm i\epsilon)s}$$

$$G = (\not\pi + m)\left\{ -i \int_0^\infty ds e^{is(\not\pi^2 - m^2)} \right\}$$

$(\not\pi)^2 = \pi^2 + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$

$$G = -i(\not\pi + m) \int_0^\infty ds e^{-ism^2} e^{ie\sigma\cdot F/2} e^{is[p_0^2 - \vec{\pi}^2]}$$

انتشارگر الکترون در پایه مکان

$$G(x',x'') = i[i\partial\!\!\!/' + A\!\!\!/(x') + m]\int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} e^{-ism^2} e^{ie\sigma\cdot F/2}$$
$$\times\Big\{\frac{e^{-3\pi i/4}}{(4\pi s)^{3/2}}\frac{eBs}{\sin eBs}\exp\left[ie\int_{x''}^{x'} d\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}(x)\right]$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{4}(x'-x'')eF\coth eFs(x'-x'')\right]\Big\}$$
$$\times\left[(\frac{\pi}{s})^{1/2}e^{\pi i/4}\exp\frac{-i}{4s}(x_0''-x_0')^2\right]$$

انتشارگر الکترون در پایه مکان

مسیر $\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') + \mathbf{x}''$ را انتخاب می‌کنیم که $0 < \alpha < 1$

$$\mathbf{A} = -By\widehat{\mathbf{x}}$$

$$\int_{x''}^{x'} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}(x) = -\frac{B}{2}(x' - x'')(y' - y'')$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \frac{B}{2}(xy'' - yx'' + xy)$$

$$\gamma \cdot A(x') = \frac{B}{2}\{\gamma_1(y'' - y') + \gamma_2(x' - x'')\}$$

انتشارگر الکترون در پایه تکانه

- $G(x', x'')$ تابع $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ و $x'_0 - x''_0$ است.

انتشارگر الکترون در پایه تکانه

- $G(x', x'')$ تابع $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ و $x'_0 - x''_0$ است.

تبدیل فوریه $G(x', x'')$

$$G(\mathbf{p}, E) = \int_0^\infty \frac{ds}{cos(eBs)} \exp\Big[-is\Big(m^2 + p_z^2 + \frac{p_x^2 + p_y^2}{eBs \cot eBs} - E^2\Big)\Big]$$
$$\times \Big\{ [cos(eBs) + \gamma_1\gamma_2 sin(eBs)](\gamma_3 p_z - \gamma_0 E - m) + \frac{\gamma_1 p_x + \gamma_2 p_y}{cos(eBs)} \Big\}$$

انتشارگر الکترون در پایه تکانه

$$I_1 = \int_0^\infty dv e^{-i\rho v} e^{-i\alpha \tan v}$$

$$I_2 = \int_0^\infty dv e^{-i\rho v} e^{-i\alpha \tan v} \tan v$$

$$I_3 = \int_0^\infty dv e^{-i\rho v} e^{-i\alpha \tan v} \frac{1}{\cos^2 v}$$

$$I_j = \int_0^\infty dv e^{-i\rho v} f_j(v)$$

$$f_j(v + n\pi) = f_j(v)$$

انتشارگر الکترون در پایه تکانه

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{p}, E) &= \frac{-i}{(2\pi)^2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\big[\frac{D_n(\frac{p_T^2}{B})}{p_L^2+2neB-i\epsilon}\big]+\frac{\gamma_1 p_x+\gamma_2 p_y}{p_T^2}\Big] \\
D_n(\alpha) &\equiv -i\Big[[\gamma_3 p_z-\gamma_0 E-m]-\frac{p_L^2}{p_T^2}([\gamma_1 p_x+\gamma_2 p_y)\Big]d_n(\alpha) \\
&+ (\gamma_1\gamma_2)[\gamma_3 p_z-\gamma_0 E-m]d_n'(\alpha), \\
d_n(\alpha) &\equiv (-1)^n e^{-\alpha}\big[L_n(2\alpha)-L_{n-1}(2\alpha)\big], n=0,1,\dots \\
p_L^2 &\equiv m^2+p_z^2-E^2, \\
p_T^2 &\equiv p_x^2+p_y^2
\end{aligned}
$$

انرژی ترازهای لاندائو

$$E^2 = m^2 + p_z^2 + 2neB, n = 0, 1, \dots$$

فهرست

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

- معادله‌ی دیراک در حضور میدان مغناطیسی

$$(\not{\pi} - m)\psi = 0$$

$$\not{\pi} = \gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} + eA_{\mu})$$

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

- معادله‌ی دیراک در حضور میدان مغناطیسی

$$(\not{\pi} - m)\psi = 0$$

$$\not{\pi} = \gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} + eA_{\mu})$$

- پایین‌ترین بعد نمایشی ماتریس‌های گاما (۲ × ۲) است.

انتشارگر الکترون در ۱+۲ بعد

- معادله‌ی دیراک در حضور میدان مغناطیسی

$$(\not{\pi} - m)\psi = 0$$

$$\not{\pi} = \gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} + eA_{\mu})$$

- پایین‌ترین بعد نمایشی ماتریس‌های گاما (۲ × ۲) است.

$$\gamma^0 = \sigma_3, \qquad \gamma^1 = i\sigma_1, \qquad \gamma^2 = i\sigma_2$$

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

- معادله‌ی دیراک در حضور میدان مغناطیسی

$$(\not{\pi} - m)\psi = 0$$

$$\not{\pi} = \gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu)$$

- پایین‌ترین بعد نمایشی ماتریس‌های گاما (۲ × ۲) است.

$$\gamma^0 = \sigma_3, \qquad \gamma^1 = i\sigma_1, \qquad \gamma^2 = i\sigma_2$$

- که جبر Clifford را ارضا می‌کنند:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

- روش تابع گرین

$$(\not{\pi} - m)G(x, x') = \delta(x - x')$$

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

- روش تابع گرین

$$(\not{\pi} - m)G(x, x') = \delta(x - x')$$

- $(\not{\pi})$ تحت انتقال ناوردا نیست. پس $G(x, x')$ و $\psi(x, x')$ نمی‌توانند بر حسب امواج تخت بسط داده شوند.

انتشارگر الکترون در ۱+۲ بعد

- روش تابع گرین

$$(\not{\pi} - m)G(x, x') = \delta(x - x')$$

- $(\not{\pi})$ تحت انتقال ناوردا نیست. پس $G(x, x')$ و $\psi(x, x')$ نمی‌توانند بر حسب امواج تخت بسط داده شوند.
- تابع گرین باید ترکیبی از γ^μ، π^μ و $F_{\mu\nu} = [\pi_\mu, \pi_\nu]/ie = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ و دارای خواص الکترودینامیک کوانتومی باشد:

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

- روش تابع گرین

$$(\not{\pi} - m)G(x,x') = \delta(x - x')$$

- $(\not{\pi})$ تحت انتقال ناوردا نیست. پس $G(x,x')$ و $\psi(x,x')$ نمی‌توانند بر حسب امواج تخت بسط داده شوند.
- تابع گرین باید ترکیبی از γ^μ، π^μ و $F_{\mu\nu} = [\pi_\mu, \pi_\nu]/ie = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ و دارای خواص الکترودینامیک کوانتومی باشد:
  - تقارن لورنتس

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

- روش تابع گرین

$$(\not\pi - m)G(x,x') = \delta(x-x')$$

- $(\not\pi)$ تحت انتقال ناوردا نیست. پس $G(x,x')$ و $\psi(x,x')$ نمی‌توانند بر حسب امواج تخت بسط داده شوند.
- تابع گرین باید ترکیبی از γ^μ، π^μ و $F_{\mu\nu} = [\pi_\mu, \pi_\nu]/ie = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ و دارای خواص الکترودینامیک کوانتومی باشد:
  - تقارن لورنتس
  - تقارن پیمانه‌ای

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

- روش تابع گرین

$$(\not{\pi} - m) G(x, x') = \delta(x - x')$$

- $(\not{\pi})$ تحت انتقال ناوردا نیست. پس $G(x, x')$ و $\psi(x, x')$ نمی‌توانند بر حسب امواج تخت بسط داده شوند.
- تابع گرین باید ترکیبی از γ^μ، π^μ و $F_{\mu\nu} = [\pi_\mu, \pi_\nu]/ie = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ و دارای خواص الکترودینامیک کوانتومی باشد:
  - تقارن لورنتس
  - تقارن پیمانه‌ای
  - مزدوج بار

انتشارگر الکترون در ۱+۲ بعد

$$G(x,x') = G\left(\gamma_\mu \pi_\mu, \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, (\tilde{F}^\nu \pi_\nu)^2\right)$$

$$A_\mu = (0, 0, W(x))$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

$$\tilde{F}_\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha} F^{\nu\alpha}$$

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

$$G(x,x') = G\left(\gamma_\mu \pi_\mu, \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, (\tilde{F}^\nu \pi_\nu)^2\right)$$
$$A_\mu = (0, 0, W(x))$$
$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$
$$\tilde{F}_\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha} F^{\nu\alpha}$$

◀

$$[(\not\pi)^2, \not\pi] = [(\not\pi)^2, \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = [(\not\pi)^2, (\tilde{F}^\nu \pi_\nu)^2] = 0$$

انتشارگر الکترون در ۱+۲ بعد

$$G(x,x') = G\left(\gamma_\mu \pi_\mu, \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, (\tilde{F}^\nu \pi_\nu)^2\right)$$
$$A_\mu = (0, 0, W(x))$$
$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$
$$\tilde{F}_\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha} F^{\nu\alpha}$$

- $$[(\not\pi)^2, \not\pi] = [(\not\pi)^2, \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = [(\not\pi)^2, (\tilde{F}^\nu \pi_\nu)^2] = 0$$

- $$[(\not\pi)^2, G(x,x')] = 0$$

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

- تبدیلی تشابهی که $(\not{\pi})^2$ و $G(x,x')$ را در فضای تکانه قطری می‌کند

$$E_p^{-1}\,(\not{\pi})^2 E_p = p^2 I$$

انتشارگر الکترون در ۲+۱ بعد

- تبدیلی تشابهی که $(\not\pi)^2$ و $G(x,x')$ را در فضای تکانه قطری می‌کند

$$E_p^{-1}\,(\not\pi)^2 E_p = p^2 I$$

$$(\not\pi)^2 = \pi^2 + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$F_{12} = -F_{21} = W'(x)$$

$$\left(\pi^2 + e\sigma_3 W'(x)\right) E_p = p^2 E_p$$

انتشارگر الکترون در ۱+۲ بعد

$k \equiv p_0^2 - p^2$

$$\left(-\pi_1^2 - \pi_2^2 + e\sigma_3 W'(x)\right) E_p = -kE_p$$

$$E_p = N_\sigma \begin{pmatrix} F_{k,p_2,1}(z) & 0 \\ 0 & F_{k,p_2,-1}(z) \end{pmatrix} e^{-i(p_0 t - p_2 y)}$$

$$\left[\partial_x^2 - (-p_2 + eW(x))^2 + e\sigma W'(x)\right] F_{k,p_2,\sigma} = -kF_{k,p_2,\sigma}$$

E_p در میدان مغناطیسی ثابت

$$W(x) = B_0 x \qquad , \qquad \eta \equiv \sqrt{2|eB_0|}(x - \frac{p_2}{eB_0})$$

E_p در میدان مغناطیسی ثابت

$$W(x) = B_0 x \qquad , \qquad \eta \equiv \sqrt{2|eB_0|}\left(x - \frac{p_2}{eB_0}\right)$$

$$\left[\partial_\eta^2 - \frac{\eta^2}{4} + k + \frac{\sigma}{2} sgn(eB_0)\right] F_{k,p_2,\sigma}(\eta) = 0$$

E_p در میدان مغناطیسی ثابت

$$W(x) = B_0 x \qquad , \qquad \eta \equiv \sqrt{2|eB_0|}(x - \frac{p_2}{eB_0})$$

$$\left[\partial_\eta^2 - \frac{\eta^2}{4} + k + \frac{\sigma}{2} sgn(eB_0)\right] F_{k,p_2,\sigma}(\eta) = 0$$

$$E_{p,1} = \frac{(|eB_0|)^{1/4}}{\pi^{1/4}\sqrt{k!}} e^{-ip_0 t + ip_2 y} D_k(\eta),$$

$$E_{p,-1} = \frac{(|eB_0|)^{1/4}}{\pi^{1/4}\sqrt{(k-1)!}} e^{-ip_0 t + ip_2 y} D_{k-1}(\eta)$$

$$D_n(x) = 2^{-n/2} e^{x^2/4} H_n(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

خواص توابع E_p

روابط تعامد و کاملیت E_p

$$\int dz\bar{E}_{p'}(z)E_p(z) = I\delta(p-p'),$$

$$\int dpE_p(z)\bar{E}_p(z') = I\delta(z-z');$$

$$\bar{E}_p(z) = \gamma^0 E_p^*(z)\gamma^0$$

خواص توابع E_p

روابط تعامد و کاملیت E_p

$$\int dz \bar{E}_{p'}(z) E_p(z) = I\delta(p-p'),$$

$$\int dp E_p(z) \bar{E}_p(z') = I\delta(z-z');$$

$$\bar{E}_p(z) = \gamma^0 E_p^*(z) \gamma^0$$

- $\bar{p}_\mu \equiv (p_0, 0, \sqrt{k})$ $\quad$ $\not{\pi} E_p = E_p \not{\bar{p}};$

خواص توابع E_p

روابط تعامد و کاملیت E_p

$$\int dz \bar{E}_{p'}(z) E_p(z) = I\delta(p-p'),$$

$$\int dp E_p(z) \bar{E}_p(z') = I\delta(z-z');$$

$$\bar{E}_p(z) = \gamma^0 E_p^*(z) \gamma^0$$

- $\bar{p}_\mu \equiv (p_0, 0, \sqrt{k})$ $\qquad$ $\not{\pi} E_p = E_p \not{\bar{p}};$
- $\bar{p}^2 = p_0^2 - k = p^2$

انتشارگر در پایه E_p

$$
\begin{aligned}
&(\not{\pi} - m)G(z,z') = \delta(z-z') \\
&G(z,z') = \int dp\, E_p(z) S_F(p) \bar{E}_p(z') \\
&(\not{\pi} - m)G(z,z') = (\not{\pi} - m)\int dp\, E_p(z) S_F(p) \bar{E}_p(z') \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = \int dp\, E_p(z)(\gamma\cdot\bar{p} - m) S_F(p) \bar{E}_p(z') \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = \int dp\, E_p(z) \bar{E}_p(z')
\end{aligned}
$$

انتشارگر در پایه E_p

$$
\begin{aligned}
(\not{\pi} - m) G(z, z') &= \delta(z - z') \\
G(z, z') &= \int dp\, E_p(z) S_F(p) \bar{E}_p(z') \\
(\not{\pi} - m) G(z, z') &= (\not{\pi} - m) \int dp\, E_p(z) S_F(p) \bar{E}_p(z') \\
&= \int dp\, E_p(z) (\gamma \cdot \bar{p} - m) S_F(p) \bar{E}_p(z') \\
&= \int dp\, E_p(z) \bar{E}_p(z')
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow S_F(p) = \frac{1}{\not{\bar{p}} - m}$$

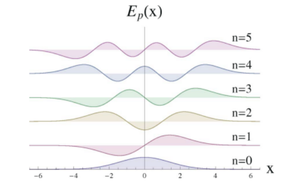

Fig. 2. The $E_p(x)$ functions [Eq. (42a)] in arbitrary units for various Landau levels. The scale is set by $eB_0=1$ and $p_2=0$.

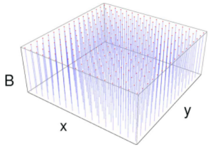

Fig. 1. Sketch of the field lines of a uniform magnetic field.

E_p در ۳+۱ بعد

E_p در ۳+۱ بعد

- $$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = i\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \quad \sigma^{12} = i\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

E_p در ۳+۱ بعد

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = i\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \quad \sigma^{12} = i\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$E_p = diag(E_{p,+1}, E_{p,-1}, E_{p,+1}, E_{p,-1})$$

$$E_p = E_{p,+1}P_+ + E_{p,-1}P_-$$

$$P_+ = diag(1,0,1,0), \qquad P_- = diag(0,1,0,1),$$

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma^1\gamma^2)$$

E_p در ۳+۱ بعد

جواب‌های معادله دیراک

$$E_{p,\pm1}(x) = e^{-i(p_0 t - p_2 x_2 - p_3 x_3)} f_k^{\pm}(x_1)$$

$$f_k^{+}(x_1) = \phi_k\left(x_1 - \ell_B^2 p_2\right), \qquad f_k^{-}(x_1) = f_{k-1}^{+}(x_1),$$

$$\phi_k(x_1) = \sqrt{\frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}\ell_B}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\ell_B^2}\right) H_k\left(\frac{x_1}{\ell_B}\right)$$

بازنویسی E_p

$$E_p(x) = e^{-i(p_0 t - p_2 x_2 - p_3 x_3)} P_k(x_1)$$

$$P_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_k^{+}(x) + f_k^{-}(x)\right) + \frac{i\gamma^1\gamma^2}{2}\left(f_k^{+}(x) - f_k^{-}(x)\right)$$

خواص E_p در ۳+۱ بعد

تعامد و روابط بازگشتی E_p

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\ f_k^{+}(x_1) f_\ell^{+}(x_1) = \delta_{k\ell}$$

$$(qBx - \partial_x) f_k^{+}(x_1) = \sqrt{2(k+1)qB}\ f_{k+1}^{+}(x_1) + p_y f_k^{+}(x_1),$$

$$(qBx + \partial_x) f_k^{+}(x_1) = \sqrt{2(k)qB}\ f_{k-1}^{+}(x_1) + p_y f_k^{+}(x_1)$$

$$(i\not{\partial} - q\not{A} - M) P_k(x) e^{-i(p_0 t - p_y y - p_z z)} =$$

$$P_k(x)[p_0\gamma^0 + sgn(qB)\sqrt{2qBk}\gamma^2 - p_z\gamma^3 - M] e^{-i(p_0 t - p_y y - p_z z)}$$

$$\tilde{p} \equiv (p_0, 0, -sgn(qB)\sqrt{2|qB|k}, p_z)$$

E_p در ۳+۱ بعد

جواب‌های معادله دیراک برای ذرات و پادذرات

$$P_k(x_1)u(\tilde{p},\sigma)e^{-ix\cdot\bar{p}} \qquad , \qquad P_k(x_1)v(\tilde{p},\sigma)e^{ix\cdot\bar{p}}$$

$$\psi_\alpha(x) = \sum_k \int D\bar{p}\,[P_k(x_1)]_{\alpha\rho}[\tilde{\psi}_k(\tilde{p})]_\rho\; e^{-i\bar{p}\cdot x}$$

انتشارگر فرمیونی در ۳+۱ بعد

$$\begin{aligned} S(x,y) &= <\psi(x)\bar{\psi}(y)> \\ &= \sum_{k=0}\int D\bar{p}\; e^{-i(p_0(x_0-y_0)-p_2(x_2-y_2)-p_3(x_3-y_3))} \\ &\quad \times P_k(x_1)\frac{1}{\tilde{\not{p}}-m}P_k(y_1) \end{aligned}$$

خلاصه

الکترون‌های غیرنسبیتی در میدان مغناطیسی

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2M} + 2B\mu_B\sigma$$

انتشارگر الکترون آزاد نسبیتی

$$G(x, x') = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip\cdot x} \frac{1}{\not{p} - m} e^{ip\cdot x'}$$

انتشارگر الکترون در میدان مغناطیسی به روش ریتوس

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int D\bar{p}\, e^{-i(p_0(x_0-y_0)-p_2(x_2-y_2)-p_3(x_3-y_3))} P_k(x_1) \frac{1}{\tilde{\not{p}} - m} P_k(y_1) \\ P_k(x) &= \frac{1}{2}\left(f_k^+(x) + f_k^-(x)\right) + \frac{i\gamma^1\gamma^2}{2}\left(f_k^+(x) - f_k^-(x)\right) \\ \tilde{p} &\equiv (p_0, 0, -\sqrt{2|qB|k}, p_z) \end{aligned}$$

مراجع

- A. Chodos, K. Everding, D. A. Owen, "*QED with a chemical potential: The case of a constant magnetic field*," Phys. Rev. **D42**, 2881-2892 (1990).
- C. Itzykson, J. B. Zuber, "*Quantum field theory*," McGraw-Hill Inc., (1980).
- V. I. Ritus, "*Radiative corrections in quantum electrodynamics with intense field and their analytical properties*," Annals Phys. **69**, 555-582 (1972).
- J. S. Schwinger, "*On gauge invariance and vacuum polarization*," Phys. Rev. **82**, 664-679 (1951).
- A. Raya, E. Reyes, "*Fermion condensate and vacuum current density induced by homogeneous and inhomogeneous magnetic fields in (2+1)-dimensions*," Phys. Rev. **D82**, 016004 (2010). [arXiv:1006.2548 [hep-ph]].

مراجع

- G. Murguia, A. Raya, A. Sanchez *et al.*, "*The electron propagator in external electromagnetic fields in lower dimensions*," Am. J. Phys. **78**, 700-707 (2010). [arXiv:0910.1881 [hep-th]].
- E.D. Reyes,"*Instabilities of vaccum by electromagnetic fields in low dimensions*, mastersthesis National Autonomous University of Mexico (2010).
- K. Fukushima, D. E. Kharzeev, H. J. Warringa, "*Electric-current susceptibility and the chiral magnetic effect*," Nucl. Phys. **A836**, 311-336 (2010). [arXiv:0912.2961 [hep-ph]].
- M. E. Peskin and D. V. Schroeder., "*An inrtoduction to quantum field theory*," Addison -Wesley Publishing Company, (1995).
- L. D. Landau, E. M. Lifshitz, "*Course of theoretical physics vol 3 Quantum Mechanics: non-relativistic theory*," London, (1965). Second Edition.