این امتحان چهار سوال دارد.

طراح: شیخ جباری

1

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

پژوهشگاه دانشهای بنیادی

(مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات)

خیابان شهید لواسانی بین کامرانیه و دیباجی

نبش کوچه شهید محمد فربین

تهران - صندوق پستی ۵۵۳۱-۱۹۳۹۵

تلفن: ۲۲۲۸۰۶۹۲ - ۲۲۸۲۳۰۸۹ - ۲۲۲۹۰۹۳۴

دورنگار: ۲۲۲۸۰۴۱۵

پژوهشکده ی فیزیک

سوالات امتحان پایان ترم درس نظریه میدانهای کوانتمی I

۱) بررسی میدان اسپین یک تحت تقارن‌های گسسته P, T, C.

الف) کنش میدان برداری A_μ را در نظر بگیرید:

$$S=\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu\right]$$

که در آن $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$.

نشان دهید که تبدیلات زیر تقارن کنش هستند:

$$A_\mu^P(x,t)\equiv PA_\mu P^{-1}=P_\mu{}^\nu A_\nu(-x,t) \qquad : P \text{ (پاریته (وارونی فضا))}$$

$$A_\mu^T(x,t)\equiv TA_\mu T^{-1}=-P_\mu{}^\nu A_\nu(x,-t) \qquad : T \text{ وارونی زمان}$$

$$A_\mu^C(x,t)=C\,A_\mu(x,t)\,C^{-1}=-A_\mu(x,t) \qquad : C \text{ وارونی بار}$$

(1)

که $P_\mu{}^\nu=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

ب) اگر $F_{0i}=E_i$ و $B_i=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}$ را مولفه‌های میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بنامیم، رفتار $\vec{E}$ و $\vec{B}$ تحت تبدیلات C، P، T، CP و CPT چگونه خواهد بود؟

پ) با نوشتن معادلات حرکت میدان و اعمال روابط جابجایی کانونیک میدان، میدان اسپین یک A_μ را کوانتیده کنید و آن را با $\hat{A}_\mu(x,t)$ و مولفه‌های فوریه آن (بردارهای قطبش) را با $\hat{\epsilon}_\mu(P)$ و $\hat{\epsilon}^\dagger_\mu(P)$ (عملگرهای خلق و فنا) نشان دهید. توجه کنید که در حالت کلی قطبش سه تا، از چهار مولفه $\hat{\epsilon}_\mu$ به صورت عملگر ظاهر می‌شوند.

ت) با فرض این که تعاریف (1) برای میدان کوانتمی $\hat{A}_\mu$ نیز برقرار باشد، رفتار بردار عملگر قطبش را تحت C, P, T و CP و CPT به دست آورید.

ث) با فرض این که حالت خلا $|0\rangle$ تحت C, P, T ناوردا است، مقادیر چشم‌داشتی زیر را حساب کنید:

(۲)

این امتحان چهار سوال دارد

طراح: شیخ جباری

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

پژوهشگاه دانشهای بنیادی

(مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات)

خیابان شهید لواسانی بین کامرانیه و دیباجی

نبش کوچه شهید محمد فربین

تهران - صندوق پستی ۵۵۳۱-۱۹۳۹۵

تلفن : ۲۲۲۸۰۶۹۲ - ۲۲۸۲۳۰۸۹ - ۲۲۲۹۰۹۳۴

دورنگار : ۲۲۲۸۰۴۱۵

$$A_{\mu\nu}(x-y) \equiv \langle 0 | \hat{A}_\mu(x)\, \hat{A}_\nu(y) | 0 \rangle$$

فرض: $|x-y|^2>0$ ، $x^0>y^0$.

$$B_{\mu\nu}(x,y) \equiv \langle 0 | \hat{A}^T_\mu(x)\, \hat{A}^T_\nu(y) | 0 \rangle$$

فرض: $|x-y|^2<0$

$$C_{\mu\nu}(x,y) \equiv \langle 0 | \hat{A}^P_\mu(x)\, \hat{A}^{PT}_\nu(y) | 0 \rangle \,;\; |x-y|^2>0,\; y^0>x^0>0$$

فرض:

---

(۲) برای یک میدان آزاد اسکالر حقیقی ϕ و یک میدان دیراک ψ مقادیر چشم‌داشتی زیر را حساب کنید:

$$I_1(x_i) = \langle 0 | T(\phi_1(x)\, \phi(x_2)\, \phi(x_3)) | 0 \rangle$$

الف) فرض این که فاصله x_1, x_2 فضاگونه و تغییر علامت‌ها زمان‌گونه باشند.

$$I_2(x_i) = \langle 0 | T(\phi(x_1)\, \phi(x_2)\, \phi(x_3)\, \phi(x_4)) | 0 \rangle$$

ب) فرض این که فاصله (x_2, x_4) فضاگونه و (x_1, x_3) زمان‌گونه و تغییر علامت‌ها فضاگونه باشند.

$$I_3^\mu(x_i) = \langle 0 | T(\bar{\psi}_1(x_1)\gamma^\mu \psi(x_2)) | 0 \rangle$$

ج) برای سه حالت $|x_1-x_2|^2<0$ ، $|x_1-x_2|^2>0$ ، $|x_1-x_2|=0$.

این امتحان چهار سوال دارد.
طراح: شیخ جباری
(۳)

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
پژوهشکده فیزیک
پژوهشگاه دانشهای بنیادی
(مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات)
خیابان شهید لواسانی بین کامرانیه و دیباجی
نبش کوچه شهید محمد فربین
تهران - صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۵۵۳۱
تلفن: ۲۲۲۸۰۶۹۲ - ۲۲۸۲۳۰۸۹ - ۲۲۲۹۰۹۳۴
دورنگار: ۲۲۲۸۰۴۱۵

(۳) لاگرانژی زیر را که فرم تعمیم یافته ای از لاگرانژی دیراک است در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_1\bar{\psi}\psi - im_2\bar{\psi}\gamma^5\psi \qquad (*)$$

که در آن m_1 و m_2 دو ضریب حقیقی با بعد جرم هستند.

الف) معادله حرکت ψ را بنویسید.

ب) نشان دهید که $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ که α یک عدد حقیقی است تقارن لاگرانژی است. جریان نوتر این تقارن را بدست آورید.

پ) برای حل معادله حرکت و تحلیل این لاگرانژی مسیر زیر را دنبال کنید:

پ-۱) نشان دهید که با تبدیل $\psi = e^{i\beta\gamma^5}\chi$ که β یک عدد مختلط است و با انتخاب مناسب از β، لاگرانژی (*) به صورت معادل

$$\mathcal{L}_\chi = i\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi - M\bar{\chi}\chi$$

تبدیل می شود. مقادیر β و M را برحسب m_1 و m_2 بدست آورید.

پ-۲) جواب عمومی ψ را با استفاده از جواب عمومی χ بدست آورید. مدهای $u_r(p)$ و $v_r(p)$ را برای ψ نوشته و ψ را کوانتیزه کنید.

ت) عملگرهای بقای متناظر با لاگرانژی $\mathcal{L}$ را برحسب عملگرهای خلق و فنا بنویسید.

ث) انتشارگر فاینمن را برای ψ حساب کنید.

$$S_F(x-y) = \langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y))|0\rangle$$

این امتحان چهار سوال دارد (۴)
طراح: شیخ جباری

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
پژوهشکده فیزیک
پژوهشگاه دانشهای بنیادی
(مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات)
خیابان شهید لواسانی بین کامرانیه و دیباجی
نبش کوچه شهید محمد فربین
تهران - صندوق پستی ۵۵۳۱-۱۹۳۹۵
تلفن: ۲۲۲۸۰۶۹۲ - ۲۲۸۲۳۰۸۹ - ۲۲۲۹۰۹۳۴
دورنگار: ۲۲۲۸۰۴۱۵

(۴) ذره اسپین $\frac{3}{2}$ - لاگرانژی Rarita-Schwinger

برای ساختن لاگرانژی ذره اسپین $3/2$ از این که

$$1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$$

استفاده می‌کنیم و چهار اسپینور دیراک را درنظر می‌گیریم: $\psi_\mu(x)$.

همانطور که برای اسپین یک از میدان برداری A_μ استفاده کرده و با انتخاب مناسب لاگرانژی مؤلفه اضافه را حذف نمودیم، در اینجا نیز با انتخاب مناسب لاگرانژی دو اسپینور دیراک اضافه موجود در $\psi_\mu(x)$ را حذف می‌کنیم. بدین منظور لاگرانژی زیر را درنظر بگیرید:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_\mu \left(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^5 \gamma_\nu \partial_\alpha - m \gamma^{\mu\beta} \right) \psi_\beta$$

الف) معادله حرکت $\psi_\mu(x)$ را بنویسید.

ب) تکانه همیوغ متناظر با ψ_μ را بدست آورید.

پ) با قرار دادن $\psi_\mu(x) = \psi_\mu(p) e^{-ip\cdot x}$ معادله حرکت را به صورت معادله جبری $X^\mu(p) \equiv M^{\mu\nu}(p)\psi_\nu(p) = 0$ $\boxtimes$ درآورید که هر عنصر تانسور $M_{\mu\nu}$ خودش یک ماتریس 4x4 است.

ت) معادله $\boxtimes$ را حل کنید. راهنمایی: برای حل از معادلات $p_\mu X^\mu = 0$، $\gamma_\mu X^\mu = 0$ و همچنین از $M^{\alpha\mu}(-p) X_\mu = 0$ استفاده کنید. این جواب $\psi_\mu(p)$ را با $u_r(p)$ نشان دهید که $r=1,2,3,4$ متناظر با چهار حالت فیزیکی یک ذره اسپین $3/2$ است.

ث) جوابهای با انرژی منفی را نیز بیابید. برای این کار از $\psi_\mu(x) = \psi_\mu(p) e^{+ip\cdot x}$ شروع کرده و قسمتهای پ و ت را تکرار نمایید. جواب این حالت را با $v_r(p)$ نشان دهید.

ج) با استفاده از جوابهای قسمتهای ت و ث کلی‌ترین جواب لاگرانژی Rarita-Schwinger را بدست آورید.