۲۰۱۰/۱۱/۰۳
۰۱:۴۵ ب.ظ

سئوالات امتحان میان ترم آبان سال ۸۹

نام:　　　　نام خانوادگی:　　　　مقطع (کارشناسی ارشد/دکتری):

نام دانشگاه:　　　　آدرس ای-میل:

سئوال ۱ اسپین، ایزواسپین و پاریته ی ذرات زیر چیست؟ با توجه به سطر اول جدول را کامل نمایید.

(بارم: یک نمره　دقت: نیم نمره)

	اسپین	ایزواسپین	I_3	Parity
π^0	0	1	0	-1
K^+				
η				
J/ψ				
D^+				

سئوال ۲ کدامیک از فرآیندهای زیر پراکندگی Bhabha است؟ دیاگرام های فاینمن مربوط به این فرآیندها در چارچوب مدل استاندارد رسم کنید. (بارم یک نمره)

الف) $e_1^- e_2^- \to e_3^- e_4^-$ ؛ ب) $e_1^+ e_1^- \to e_2^+ e_2^-$ ؛ ج) $e^+ e^- \to \gamma\gamma$

(از برچسب های اضافی برای پاسخگویی استفاده کنید.)

سئوال ۳ کدام یک از فرآیندهای زیر در چارچوب مدل استاندارد مجاز هستند. در صورتی که ممنوع باشند، علت ممنوعیت چیست؟ در صورت مجاز بودن آیا این فرآیند از طریق برهمکنش قوی و یا الکترومغناطیسی می تواند انجام گیرد و چرا؟ (یک نمره　دقت نیم نمره)

الف) $\pi^0 \to \gamma\gamma$　　　ب) $\pi^0 \to \gamma\gamma\gamma$

سئوال ٤ آیا می توانیم ذره ای داشته باشیم که پاریته ی آن $e^{i\frac{\pi}{3}}$ باشد؟ علت چیست؟ (این سئوال در صورت ارائه جواب کامل یک نمره تشویقی دارد.)

سئوال ۵ $\Delta \equiv \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix}$ میدان فرمیونی چپ-دست است که در نمایش الحاقی (adjoint) گروه $SU(2)$ الکتروضعیف قرار دارد و ابربار (hypercharge) آن برابر Y است.

الف) ماتریس Δ تحت تقارن های $SU(2)$ و $U(1)$ چگونه تبدیل می شوند؟ ماتریس های ۳×۳ مولد گروه $SU(2)$ را در نمایش الحاقی صراحتاً بنویسید.

در پایه ای مسأله را حل کنید که دوتایی ϕ و سه تایی Δ به صورت زیر تبدیل شوند.

$$\phi \to e^{i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}}\phi$$

$$\Delta \to e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}}\Delta$$

(فرم $\vec{T}$ را به دست آورید)

ب) برهمکنش مولفه های مختلف Δ را با فوتون به دست آورید (نیم نمره)

ج) مولفه های Δ را در یک ماتریس ۲×۲ به صورت زیر قرار می دهیم:

$$\Delta' = \Delta^i \tau^i = \begin{bmatrix} n_1 A & n_3 C \\ n_4 D & n_2 B \end{bmatrix}$$

که در آن τ^i ماتریس های پائولی و n_i ضرایب نرمالیزاسیون هستند. A, B, C, D را برحسب Δ^1 ، Δ^2

که در آن τ^i ماتریس های پائولی و n_i ضرایب نرمالیزاسیون هستند. D، C، B و A را برحسب Δ^1، Δ^2 و Δ^3 به دست آورید. (نیم نمره)

د) آیا میدان های A، B، C و D بار الکتریکی مشخص دارند. بار الکتریکی هرکدام از آنها چه قدر است؟ (نیم نمره)

ه) نشان دهید تحت $SU(2)$، Δ' به صورت مقابل تبدیل می شود. $\Delta' \to U \Delta' U^{+}$

ن) آیا ترکیب زیر تحت $SU(2) \times U(1)$ ناوردا است؟ توضیح دهید. چه جواب مثبت باشد و چه منفی، جمله ی جرمی حاصل پس از شکست تقارن الکترو ضعیف را به دست آورید.

$$\phi^{+} \Delta'_i \Delta'_j \phi \, \epsilon_{ij}$$

ϕ در اینجا دوتایی هیگز و i و j اندیس های اسپینوری هستند. (نیم نمره)

Solutions Of Mid-Term Exam

Solution (1):

	S	I	I_3	P
π^0	0	1	0	-1
κ^+	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
η	0	0	0	1
J/ψ	1	0	0	-1
D^+	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1

Note:

$\Pi^0 \quad : \quad I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{-+})$

$\kappa^+ \quad : \quad I^G(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$

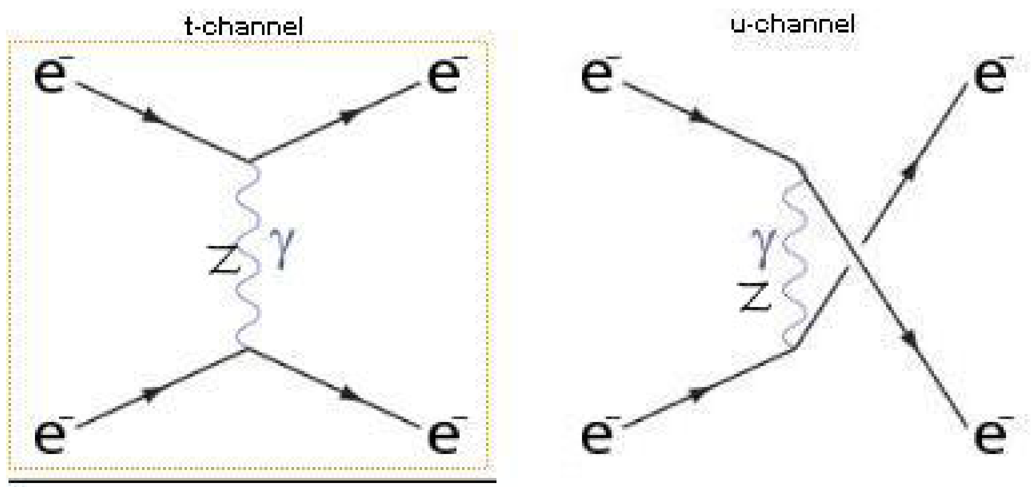
$\eta \quad : \quad I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{-+})$

$J/\psi \quad : \quad I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--})$

$D^+ \quad : \quad I^G(J^{PC}) = \frac{1}{2}(0^-)$

Solution (2):

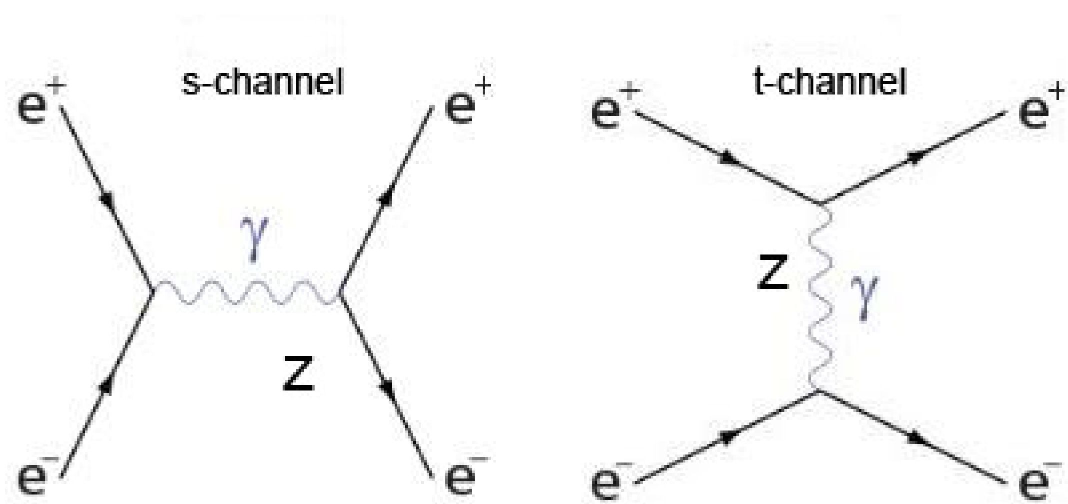
a) $e_1^- e_2^- \longrightarrow e_3^- e_4^-$
In this case we consider electron-electron scattering,$e_1^- e_2^- \longrightarrow e_3^- e_4^-$,known as "Møller"scattering



The two diagrams of "Møller"scattering are topologically different from each other because the two final electrons have different properties.

b) $e_1^+ e_1^- \longrightarrow e_2^+ e_2^-$
In this case we have an example of electron-positron scattering,$e_1^+ e_1^- \longrightarrow e_2^+ e_2^-$,known as "Bhabha"scattering and "Bhabha" scattering Feynman dia-

grams:



Note: Time moves forward from the left side of the diagram to the right. The arrows are simply markers of particle motion, and are not the same as the arrows conventionally written into Feynman diagrams.

b) $e^+e^- \longrightarrow \gamma\gamma$
This is the "Pair Annihilation" case.

Solution (3):

a)$\pi^0 \longrightarrow \gamma\gamma$:
Electromagnetic decay allowed,but forbidden by strong decay as I is not conserved.
b)$\pi^0 \longrightarrow \gamma\gamma\gamma$:
Forbidden as C-parity is not conserved.

Solution (5):

a)
$U(1) \;\; : \;\; \Delta \longrightarrow e^{i\beta}\Delta$
$SU(2) \;\; : \;\; \Delta \longrightarrow e^{i\vec{\alpha}.\vec{T}}\Delta$
In general the infinitesimal generators of SU(N),T,are represented as traceless hermitian matrices i.e.
$tr(T_a) = 0 \quad and \quad T_a = T_a^\dagger$
In the adjoint representation the generators are represented by (n^2-1),$n \times n$ matrices whose elements are defined by the structure constants:
$(T_a)_{jk} = -if_{ajk}$
$[\tau_i, \tau_j] = i\varepsilon_{ijk}\tau_k \Rightarrow \;\; \varepsilon_{ijk} \;\; : structure\ constant$
adjoint representation $\;, \Rightarrow (T_a)_{jk} = -i\varepsilon_{ajk}$

$$\begin{cases} (T_1)_{11} = (T_1)_{12} = (T_1)_{13} = 0, \\ (T_1)_{21} = (T_1)_{22} = 0 \;\; , (T_1)_{23} = -i, \;\; ; \\ (T_1)_{31} = 0 \; (T_1)_{32} = i \;\; , (T_1)_{33} = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (T_2)_{11} = (T_2)_{12} = 0 \;\; , (T_2)_{13} = i, \\ (T_2)_{21} = (T_2)_{22} = (T_2)_{23} = 0, \qquad ; \\ (T_2)_{31} = -i \;\; , (T_2)_{32} = (T_2)_{33} = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (T_3)_{11} = 0 \;\; , (T_3)_{12} = -i \; (T_3)_{13} = 0, \\ (T_3)_{21} = i \;\; , (T_3)_{22} = (T_3)_{23} = 0, \qquad ; \\ (T_3)_{31} = (T_3)_{32} = (T_3)_{33} = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The generators T_1,T_2,T_3 are represented in the adjoint representation.

b)

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\vec{A_\mu}.\vec{T} - i\acute{g}\tfrac{Y}{2}B_\mu$$

$$\ell_f = \bar{\Delta}i\gamma^\mu(\partial_\mu - ig\vec{A_\mu}.\vec{T} - i\acute{g}\tfrac{Y}{2}B_\mu)\Delta$$

$$\ell_f = \bar{\Delta}i\gamma^\mu\partial_\mu + \bar{\Delta}\gamma^\mu(g\vec{A_\mu}.\vec{T} + \acute{g}\tfrac{Y}{2}B_\mu)\Delta$$

$$\ell_f = \bar{\Delta}i\gamma^\mu\partial_\mu + g\bar{\Delta}\gamma^\mu(A^1_\mu T^1 + A^2_\mu T^2)\Delta + \bar{\Delta}\gamma^\mu(gA^3_\mu T^3 + \acute{g}\tfrac{Y}{2}B_\mu)\Delta$$

$$\Longrightarrow \bar{\Delta}\gamma^\mu(gA^3_\mu T^3 + \acute{g}\tfrac{Y}{2}B_\mu)\Delta$$

$$\Longrightarrow \bar{\Delta}\gamma^\mu\{\begin{pmatrix} 0 & -igA^3_\mu & 0 \\ igA^3_\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \acute{g}\tfrac{Y}{2}B_\mu & 0 & 0 \\ 0 & \acute{g}\tfrac{Y}{2}B_\mu & 0 \\ 0 & 0 & \acute{g}\tfrac{Y}{2}B_\mu \end{pmatrix}\}$$

$$\to \begin{cases} A^3_\mu = \cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu \\ B_\mu = \cos\theta_W A_\mu - \sin\theta_W Z_\mu \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \bar{\Delta}\gamma^\mu \begin{pmatrix} \acute{g}\tfrac{Y}{2}B_\mu & -igA^3_\mu & 0 \\ igA^3_\mu & \acute{g}\tfrac{Y}{2}B_\mu & 0 \\ 0 & 0 & \acute{g}\tfrac{Y}{2}B_\mu \end{pmatrix}\Delta$$

$$\Longrightarrow \bar{\Delta}\gamma^\mu \begin{pmatrix} \acute{g}\tfrac{Y}{2}(\cos\theta_W A_\mu - \sin\theta_W Z_\mu) & -ig(\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) & 0 \\ ig(\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) & \acute{g}\tfrac{Y}{2}(\cos\theta_W A_\mu - \sin\theta_W Z_\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \acute{g}\tfrac{Y}{2}(\cos\theta_W A_\mu - \sin\theta_W Z_\mu) \end{pmatrix}\Delta$$

$$\Longrightarrow \bar{\Delta}\gamma^\mu A_\mu \begin{pmatrix} \acute{g}\tfrac{Y}{2}\cos\theta_W & -ig\sin\theta_W & 0 \\ ig\sin\theta_W & \acute{g}\tfrac{Y}{2}\cos\theta_W & 0 \\ 0 & 0 & \acute{g}\tfrac{Y}{2}\cos\theta_W \end{pmatrix}\Delta + \bar{\Delta}\gamma^\mu Z_\mu \begin{pmatrix} -\acute{g}\tfrac{Y}{2}\sin\theta_W & -ig\cos\theta_W & 0 \\ ig\cos\theta_W & -\acute{g}\tfrac{Y}{2}\sin\theta_W & 0 \\ 0 & 0 & -\acute{g}\tfrac{Y}{2}\sin\theta_W \end{pmatrix}\Delta$$

$$g\cos\theta_W = \acute{g}\cos\theta_W = e$$

$$\Rightarrow \bar{\Delta}\gamma^\mu A_\mu \begin{pmatrix} \acute{g}\tfrac{Y}{2}\cos\theta_W & -ig\sin\theta_W & 0 \\ ig\sin\theta_W & \acute{g}\tfrac{Y}{2}\cos\theta_W & 0 \\ 0 & 0 & \acute{g}\tfrac{Y}{2}\cos\theta_W \end{pmatrix}\Delta$$

$$\Rightarrow \bar{\Delta}\gamma^\mu A_\mu \begin{pmatrix} \tfrac{Y}{2} & -i & 0 \\ i & \tfrac{Y}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \tfrac{Y}{2} \end{pmatrix}\Delta$$

c)

$$\acute{\Delta} = \Delta_1\tau_1 + \Delta_2\tau_2 + \Delta_3\tau_3 = \begin{pmatrix} \Delta_3 & \Delta_1 - i\Delta_2 \\ \Delta_1 + i\Delta_2 & -\Delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1A & n_3C \\ n_4D & n_2B \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow A = B = \Delta_3 \mapsto n_1 = -n_2 = 1 \quad , n_3 = n_4 = \sqrt{2}$

d)

$Q = \tau^3 + \frac{Y}{2} \longrightarrow e^{i\alpha Q} \Delta^i \tau^i e^{-i\alpha Q} = ?$

$$\Delta_i \tau_i = \Delta_+ \tau_- + \Delta_- \tau_+ + \Delta_3 \tau_3 = (\Delta_1 + i\Delta_2)\tau_- + (\Delta_1 - i\Delta_2)\tau_+ + \Delta_3 \tau_3$$

$$\Delta_+ \tau_- \quad :\longrightarrow e^{i\alpha Q} \Delta_+ \tau_- e^{-i\alpha Q} = \Delta_+ e^{i\alpha Q} \tau_- e^{-i\alpha Q}$$

$$\Longrightarrow = \Delta_+(\tau_- + [i\alpha Q, \tau_-]) = \Delta_+(\tau_- - i\alpha[\tau_-, \tau_3]) = \Delta_+ \tau_-(1 - i\alpha) \Longrightarrow \tau_- e^{i\alpha} \Delta_+$$

therefore, charge of$C$ is $-1 + \frac{Y}{2}$.

$$\Delta_- \tau_+ \quad :\longrightarrow e^{i\alpha Q} \Delta_- \tau_+ e^{-i\alpha Q} = \Delta_- e^{i\alpha Q} \tau_+ e^{-i\alpha Q}$$

$$\Longrightarrow = \Delta_-(\tau_+ + [i\alpha Q, \tau_+]) = \Delta_-(\tau_+ - i\alpha[\tau_+, \tau_3]) = \Delta_- \tau_+(1 + i\alpha) \Longrightarrow \tau_+ e^{i\alpha} \Delta_-$$

therefore, charge of$D$ is $+1 + \frac{Y}{2}$.

$\Delta_3 \tau_3 \quad :\longrightarrow e^{i\alpha Q} \Delta_3 \tau_3 e^{-i\alpha Q} = \Delta_3 e^{i\alpha Q} \tau_3 e^{-i\alpha Q}$

$$\Longrightarrow = \Delta_3(\tau_3 + [i\alpha Q, \tau_3]) = \Delta_3(\tau_3 - i\alpha[\tau_3, \tau_3]) = \Delta_3 \tau_3(1 + i\alpha) \Longrightarrow \tau_3 \Delta_3$$

therefore, charge ofA, B is $\frac{Y}{2}$.

e)

$$\acute{\Delta} = \Delta_1 \tau_1 + \Delta_2 \tau_2 + \Delta_3 \tau_3 = \begin{pmatrix} \Delta_3 & \Delta_1 - i\Delta_2 \\ \Delta_1 + i\Delta_2 & -\Delta_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta^i \longrightarrow (e^{it^k \alpha^k} \Delta)^i = (1 + it^k \alpha^k)_{ij} \Delta^j$$

$$\Delta^i + \varepsilon^{ijk} \Delta^j \alpha^k$$

$\Delta^i \tau^i \longrightarrow \Delta^i \tau^i + i[\frac{\vec{\alpha}.\vec{\tau}}{2}, \Delta]$

in other hand we have:

$\acute{\Delta} \longrightarrow U \acute{\Delta} U^\dagger = e^{i\vec{\alpha}.\vec{\tau}/2} \acute{\Delta} e^{-i\vec{\alpha}.\vec{\tau}/2} = \acute{\Delta} + i[\frac{\vec{\alpha}.\vec{\tau}}{2}, \acute{\Delta}]$

therefore:

$\acute{\Delta} \longrightarrow U \acute{\Delta} U^\dagger$

f)

$u_Y(1)$: $\begin{cases} \phi \longrightarrow e^{i\beta}\phi \\ \acute{\Delta} \longrightarrow e^{-i\beta Y}\acute{\Delta} \end{cases}$

su(2): $\begin{cases} e^{i\vec{\alpha}.\vec{\tau}/2} & \phi \longrightarrow e^{i\vec{\alpha}.\vec{\tau}/2}\phi \\ & \acute{\Delta} \longrightarrow U\acute{\Delta}U^\dagger \end{cases}$

$\phi^\dagger\acute{\Delta}_i\acute{\Delta}_j\phi\varepsilon_{ij} \longrightarrow \phi^\dagger e^{-i\beta}e^{-i\vec{\alpha}.\vec{\tau}/2}Ue^{-i\beta Y}\acute{\Delta}_iU^\dagger Ue^{-i\beta Y}\acute{\Delta}_jU^\dagger e^{i\vec{\alpha}.\vec{\tau}/2}e^{i\beta}\phi\varepsilon_{ij}$

$\Longrightarrow= e^{-2i\beta Y}\phi^\dagger\acute{\Delta}_i\acute{\Delta}_j\phi\varepsilon_{ij}$

therefore this term isn't invariant under $SU(2)\times U(1)$.

$\ell = \alpha Tr(\bar{\acute{\Delta}}/\partial\acute{\Delta}) + \frac{\lambda}{\Lambda}\phi^\dagger\acute{\Delta}_i\acute{\Delta}_j\phi\varepsilon_{ij}$

$\frac{\lambda}{\Lambda}\phi^\dagger\acute{\Delta}_i\acute{\Delta}_j\phi\varepsilon_{ij} = \frac{\lambda}{2\Lambda}\varepsilon_{ij}\begin{pmatrix} 0 & \phi^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta_i^3 & \Delta_i^1 - i\Delta_i^2 \\ \Delta_i^1\Delta_i^2 & -\Delta_i^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta_j^3 & \Delta_j^1 - i\Delta_j^2 \\ \Delta_j^1\Delta_j^2 & -\Delta_j^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \phi^0 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \frac{\lambda}{\Lambda}\phi^\dagger\acute{\Delta}_i\acute{\Delta}_j\phi\varepsilon_{ij} = \frac{i\lambda}{\Lambda}(\phi^0)^2(\Delta_1^2\Delta_2^1 - \Delta_2^2\Delta_1^1)$

$\begin{cases} \Delta^+ = \Delta^1 + i\Delta^2 \\ \Delta^- = \Delta^1 - i\Delta^2 \end{cases}$

then we have:

$\frac{\lambda}{\Lambda}\phi^\dagger\acute{\Delta}_i\acute{\Delta}_j\phi\varepsilon_{ij} = \frac{-i\lambda}{2\Lambda}(\phi^0)^2(\Delta^-)^T\sigma_2\Delta^+$

$\Longrightarrow \ell = \alpha Tr(\bar{\acute{\Delta}}/\partial\acute{\Delta}) + \frac{-i\lambda}{2\Lambda}(\phi^0)^2(\Delta^-)^T\sigma_2\Delta^+$

$\longrightarrow \ell = \alpha(\Delta^-\sigma^\mu\partial_\mu\Delta^+ - \Delta^+\sigma^\mu\partial_\mu\Delta^-) + \frac{-i\lambda}{2\Lambda}(\phi^0)^2(\Delta^-)^T\sigma_2\Delta^+$

first we define $\beta = \frac{\lambda}{4\Lambda\alpha}$ then obtain the equation of motion for Δ^+:

$\sigma^\mu\partial_\mu\Delta^+ - i\beta(\phi^0)^2\sigma_2\Delta^+ = 0$

$\partial_0\Delta^+ = \sigma^i\partial_i\Delta^+ - i\beta(\phi^0)^2\sigma_2\Delta^+$

$(\partial_0)^2\Delta^+ = -P^2\Delta^+ - \beta^2(\phi^0)^4\Delta^+$

$\Longrightarrow E^2 = P^2 + \beta^2(\phi^0)^4$

therefore we have :

$m_{\Delta^+} = \beta(\phi^0)^2$

and similarly forΔ^- we obtain:
$m_{\Delta^-} = \beta(\phi^0)^2$