

مشخصه ای برای فاز سیال لاتینجر اسپینی در زنجیره‌ی هایزنبرگ متناوب

$$S = 1/2$$

جهانفر ابوبی^۱، سعید مهدوی فر

^۱ گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

^۲ مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات

^۳ گروه فیزیک، دانشگاه گیلان

چکیده

رفتار دمای محدود زنجیره‌ی ناهمسانگرد هایزنبرگ اسپین ۱/۲ با تبادل تناوبی فرومغناطیس - پادفرومغناطیس در حضور میدان مغناطیسی عرضی مطالعه شده است. با استفاده از تبدیل جوردن ویگنر، فضای اسپینی به فضای فرمیونهای بدون اسپین که با هم برهم کنش دارند، تصویری می‌شود. یک پارامتر جدید برای تفکیک فاز بدون گاف سیال لاتینجر از سایر فازهای دارای گاف معروفی شده است. همچنین با مطالعه‌ی رفتار ترمودینامیکی مدل فوق نشان داده شده که در منحنی گرمای ویژه در ناحیه‌ی میانی بین دو میدان بحرانی کوانتمومی دو قله وجود دارد. با استفاده از نتایج قطری سازی کامل، وجود ساختار دو قله‌ای در گرمای ویژه تایید شده است.

مطالعه گذارهای فاز پیوسته یکی از مهمترین شاخه‌های فیزیک نظری در دهه‌های اخیر بوده است. هر فازی با پارامتر نظم از سایر فازها تفکیک می‌شود. در بسیاری از فازها، معروفی یک پارامتر نظم بدیهی است اما در بعضی موارد پیداکردن پارامتر مناسب بسیار پیچیده است. فاز سیال اسپینی لاتینجر نمونه‌ای از این فازهای است که هنوز پارامتر نظم مناسبی تعریف نشده است. این فاز در بسیاری از سیستم‌های مغناطیسی در اثر تغییر یک پارامتر کنترل غیر گرمایی (مانند میدان مغناطیسی) به وجود می‌آید. فاز سیال اسپینی بدون گاف بوده و توابع همبستگی اسپینی در این فاز به صورت توانی افت می‌کنند^[۱].

سیستم‌های اسپینی کوانتمومی در بعد پایین کاندیدای خوبی برای مطالعه فاز سیال اسپینی اند. مخصوصاً خواص بحرانی زنجیره‌های اسپینی با برهم کنش $F - AF$ با اسپین ۱/۲ در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی بسیار مورد توجه قرار گرفته اند. اندازه گیریهای تجربی نشان می‌دهند که $(CH_3)_2 NH_2 Cu Cl_3$ در واقع یک زنجیره‌ی تناوبی $F - AF$ با اسپین ۱/۲ است^[۲]. مدل فوق به ازای کلیه‌ی مقادیر ثابت تبادلی فرومغناطیس و پاد فرومغناطیس دارای گاف می‌باشد^[۳]. حالت پایه‌ی مدل فوق دارای نظم بلند برد پنهان است که مشخصه‌ی فاز هالدین می‌باشد. نمودار فاز حالت پایه‌ی این سیستم در حضور میدان مغناطیسی با استفاده از روش قطری سازی دقیق لنکشوز و نظریه‌ی میدان بررسی شده است^[۴]. دیده شده است که در مقادیری از میدان، حالت مغناطیسی سیستم بدون گاف و در فاز سیال لاتینجر است. ناهمسانگردی در برهم کنش تبادلی فرومغناطیس باعث بروز رفتار متفاوتی (نسبت به حالت همسانگرد) در سیستم می‌شود. این اثرات بسیار کم مطالعه قرار گرفته است. ما در این مقاله می‌خواهیم اثر میدان مغناطیس عرضی همگن روی نمودار فاز حالت پایه‌ی سیستم فوق با جفتیدگی فرومغناطیسی ناهمسانگرد را مطالعه کنیم. هامیلتونی مدل فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H = -J_F \sum_{j=1}^{N/2} (s_{2j}^x s_{2j+1}^x + \Delta s_{2j}^y s_{2j+1}^y + s_{2j}^z s_{2j+1}^z) + J_{AF} \sum_{j=1}^{N/2} \overline{s_{2j-1}} \cdot \overline{s_{2j}} + h \sum_{j=1}^N s_j^z \quad (1)$$

$s_j^{x,y,z}$ عملکر اسپین ۱/۲ روی زامین جایگاه می‌باشد. J_F و J_{AF} جفتیدگی‌های فرومغناطیسی و پاد فرومغناطیسی را به ترتیب معرفی می‌کنند و Δ پارامتر ناهمسانگردی و h میدان مغناطیس عرضی است.

در حالت همسانگرد $\Delta = 1$ و برای مقادیر $J_{AF} > J_F$ دو گذار فاز کوانتومی وجود دارد [۵ و ۶]. گذار فاز اول از فاز هالدین به فاز سیال لاتینجر و دومی از فاز سیال لاتینجر به فاز پادفرومغناطیس اشباع می‌باشد. برای حالت ناهمسانگرد $\Delta \neq 1$ نشان داده شده که یک فاز دارای گاف در ناحیه‌ای از میدان‌های عرضی $h_{c1} < h < h_{c2}$ به وجود می‌آید. نظم فاز فوق به صورت نوع جالبی از فاز پادفرومغناطیس راه راه (stripe - antiferromagnet) تشخیص داده شده است [۵].

حال در این قسمت سعی می‌کنیم که رفتار دمای محدود و پایین سیستم فوق را بررسی کنیم. به این منظور با معرفی دو نوع فرمیون a و b با استفاده از تبدیلات جوردن - ویگنر مدل فوق را فرمیونی می‌کنیم [۷]. با استفاده از پارامترهای کمکی $\langle b_{n+1}^\dagger a_n \rangle$, $p_F = \langle a_{n+1}^\dagger b_n \rangle$, $d_b = \langle b_n^\dagger b_n \rangle$ و $d_a = \langle a_n^\dagger a_n \rangle$ در تقریب هار تری فوک همیلتونی فرمیونی برهمکنشی را به شکل زیر می‌شود:

$$H_{HF} = E_0 + \sum_k \frac{A}{2} a_k^\dagger a_k + \frac{B}{2} b_k^\dagger b_k + \gamma_k a_k^\dagger b_k + h.c \quad (2)$$

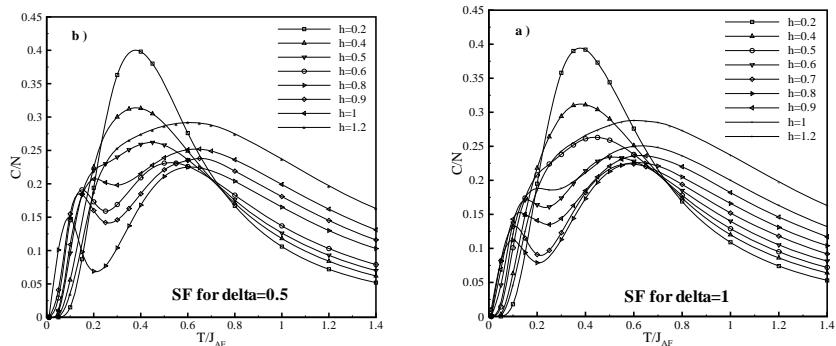
که در این رابطه ضرایب به پارامترهای کمکی تعریف شده بستگی دارند. d_b و d_a به مغناطش مربوط می‌شوند در حالی که p_F و p_{AF} پارامتر نظم تبادلی پادفرومغناطیس و فرومغناطیس هستند. به سادگی دیده می‌شود که، (Rp_{AF}) (قسمت حقیقی (p_F)) در فضای هیلبرت همان پارامتر نظم دایمی شدگی پادفرومغناطیس (فرومغناطیس) است. علامت $(.....)$ متوسط گرمایی روی ویژه حالت‌های هارتی فوک است. با استفاده از تبدیلات یکانی و قطعی کردن هامیلتونی می‌توان مغناطش، انرژی داخلی و گرمایی ویژه سیستم بر حسب پارامترهای نظم سیستم به دست می‌آیند. پارامترهای نظم با حل یکسری معادلات خود سازگار به دست می‌آیند [۸]. این پارامترها در بخش‌های مختلف نمودار فاز حالت پایه سیستم همسانگرد و ناهمسانگرد وابستگی‌های متفاوت نسبت به دما دارند که در ادامه آنها را بررسی می‌کنیم.

در حالت همسانگرد $\Delta = 1$ در رژیم هالدین پارامترهای نظم دایمی پادفرومغناطیس (فرومغناطیس) در $T = 0$ بسیار نزدیک به مقادیر کلاسیکی شان $(0/5 - 0/5)$ می‌باشند. در این رژیم افزایش دما افت و خیزهای گرمایی نظم هالدین را از بین برده و باعث کاهش Rp_{AF} می‌شوند. اما جفتیدگی J_F باعث افزایش Rp_F تا دمای T_F می‌شود. با افزایش بیشتر دما افت و خیزهای گرمایی به اندازه‌ی کافی بزرگ شده و Rp_F را تا مقدار صفر کاهش می‌دهد. با افزایش میدان مغناطیسی h مقدار T_F کاهش یافته تا در میدان بحرانی h_{c1} به کمترین مقدار خود می‌رسد. در ناحیه‌ی میانی T_F همان کمترین مقدار را دارد و Rp_F به طور یکنوا با افزایش دما کاهش می‌یابد. با افزایش بیشتر میدان مغناطیسی و برای ناحیه‌ی $T_F, h > h_{c2}$ مجدداً بستر شده و با افزایش میدان افزایش می‌یابد. نتایج تحلیلی ما همچنین نشان می‌دهند که مقدار T_F به طور کیفی متناسب با گاف انرژی است. نکته بسیار جالب محاسبات این است که در ناحیه‌ی سیال لاتینجر رفتار دمایی پارامتر نظم دایمی شدگی فرومغناطیس (Rp_F) کاملاً متفاوت از فازهای دارای گاف است.

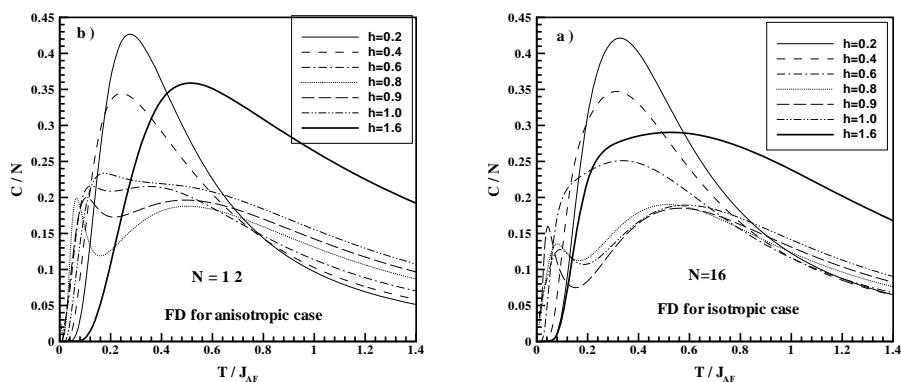
برای بررسی خواص مدل ناهمسانگرد، مقدار $\Delta = 0.5$ را بر می‌گزینیم. در این سیستم، فاز دارای گاف پادفرومغناطیس راه راه به جای فاز بدون گاف سیال اسپینی ظاهر می‌شود. در این وضعیت وابستگی گرمایی Rp_F را کاملاً متفاوت از فاز بدون گاف سیال اسپینی پیدا کردیم. در این ناحیه به مشابه سایر فازهای دارای گاف، $T_F \neq 0$ است و با افزایش h از h_{c1} افزایش می‌یابد تا به یک مقدار ماکزیمم برسد و سپس کاهش می‌یابد و فقط در دو مقدار میدان مغناطیسی (h_{c1}) و (h_{c2}) کمترین مقدار را دارد که تقریباً معادل رفتار گاف انرژی در

مدل فوق است [۶]. این نوع رفتار Rp_F همچنین تایید می کند که ناحیه‌ی میانی دارای گاف است. در نتیجه ما پیشنهاد می کنیم که می توان با تقریب خوبی پارامتر Rp_F را به عنوان یک پارامتر نظم برای تشخیص فاز بدون گاف سیال لاتینجر از فاز دارای گاف پادفرومغناطیس راه راه دانست.

یکتابع پاسخ مناسب برای بررسی رفتار دمایی سیستم گرمایی ویژه است. به این منظور ما وابستگی به دمای گرمایی ویژه سیستم را در رژیم‌های کوانتومی مختلف با استفاده از روش تحلیلی و روش عددی قطری سازی کامل مطالعه می کنیم.



شکل ۱. گرمایی ویژه بر حسب دما. نمودار فوق با استفاده از نتایج تحلیلی رسم شده است.



شکل ۲. گرمایی ویژه بر حسب دما. نمودار فوق با استفاده از نتایج عددی رسم شده است.

در شکل ۱. گرمایی ویژه را برای حالت همسانگرد $\Delta = 1$ و ناهمسانگرد $\Delta = 0.5$ و مقادیر مختلف میدان مغناطیس نسبت به T رسم کرده ایم. نتایج فوق با استفاده از روش تحلیلی به دست آمده اند. همچنانکه دیده می شود در رژیم‌های هالدین و پارامغناطیس ($h < h_{c1}, h > h_{c2}$) فقط یک قله در منحنی گرمایی ویژه وجود دارد. اما در ناحیه‌ی میانی ($h_{c1} < h < h_{c2}$) قله‌ی دوگانه مشاهده می شود. در غیاب میدان ($h = 0$), قله‌ی شبیه شاتکی در نمودار گرمایی ویژه دیده می شود که این از مشخصات فازها لدین است. با افزایش h , پهنای قله باریکتر می شود و به سمت دماهای پایین تر می رود. افزایش بیشتر h , باعث پیدا شدن شانه در طرف راست منحنی می شود. برای میدان‌های $h > h_{c1}$, با افزایش h فله دوم نیز ظاهر می شود که نشانه‌ای از فاز پارامغناطیس کاملاً پلاریزه است. به طور کلی دو مقیاس انرژی می توانند ساختار قله دوتایی در گرمایی ویژه را ایجاد کنند. بنابراین در ناحیه میانی دو مقیاس انرژی هم در حالت همسانگرد و هم در حالت ناهمسانگرد وجود دارد.

در شکل. ۲ گرمای ویژه مدل با استفاده از روش عددی قطری سازی کامل رسم شده است. کلیه ویژه مقادیر سیستم برای مقادیر مختلف میدان h و ناهمسانگردی Δ محاسبه شده اند. با استفاده از ویژه مقادیر انرژی فوق گرمای ویژه به صورت تابعی از دما محاسبه شده است. نمودار فوق برای مقادیر $J_{AF} = 1, J_F = 0.5, (a) \Delta = 1, (b) \Delta = 0.5$ و پارامغناطیس فقط یک قله در منحنی وجود دارد و جالب تر این است که نتایج عددی نیز وجود پیک دوم در ناحیه‌ی میانی $h_{c1} < h < h_{c2}$ را تایید می‌کنند.

نتیجه گیری

به طور کلی ما یک پارامتر نظم میدان متوسط را تعریف کرده ایم که قادر است فاز بدون گاف سیال لاتینجر را از سایر فازهای دارای گاف تشخیص دهد. این پارامتر نظم در زبان اسپینی پارامتر نظم دائمی‌شدگی فرومغناطیس است. اولین نکته جالب توجه این است که پارامتر نظم فوق همیشه در فاز دارای گاف دارای مقدار بیشینه‌ای در T_F است. به هر حال فقط در فاز سیال لاتینجر بدون گاف به طور یکنواخت رفتار می‌کند. دومین نکته‌ی جالب توجه در مورد گرمای ویژه است. ما یک ساختار قله‌ی دوگانه در رفتار دمایی گرمای ویژه پیدا کرده ایم که نشان دهنده‌ی بوجود آمدن دو نوع فاز در محدوده‌ی مختلفی از پارامترهای خارجی است.

مرجع‌ها

1. M. Tkahashi: Thermodynamics of one-dimensional solvable models, (Cambridge University Press: Cambridge, 1999).
2. M. B. Stone, et. al, Phys. Rev. Lett. **99**, 087204 (2007).
3. M. Bosquet, T. Jolicoeur, Eur. Phys. J. B **14**, 47, (2000).
4. T. Sakai, J. Phys. Soc. Jpn. **64**, 251 (1995).
5. S. Mahdavifar and A. Akbari, J. Phys. Soc. Jpn. **77**, 62756 (2008).
6. S. Mahdavifar and A. Akbari, Accepted to J. Phys.:Condens. Matter.
7. S. Yamamoto et al.; Fiz. Nizk. Temp. **31**, 974 (2005).
8. J. Abouie and S. Mahdavifar, Preprint for submission.

حل روش مسیر برای سه میدان اسکالر جفت شده تغییر شکل یافته

علیرضا امانی^۱، جعفر صادقی^۲

^۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد آیت الله آملی

^۲ دانشگاه مازندران

چکیده

در این مقاله، حل های تغییر شکل یافته از یک سیستم سه میدانی جفت شده با ابر پتانسیل $W(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ توسط روش مسیر انجام شد. ابتدا ابر پتانسیل را تغییر شکل داده و حل های ناآرستی را به دست آوردیم و نشان داده ایم که چگونه مدل جدید همراه با حل های ناآرستی اش بر حسب مدل غیر تغییر شکل یافته ایجاد می شود. بنابراین نمودارهای ابر پتانسیل و سه میدان های اسکالار را رسم کرده ایم و مشاهده می کنیم نمودارهای دو حالت تغییر شکل یافته و نیافته فقط در مقیاس شان تغییر می کنند.

همان طوری که می دانیم ساختارهای ناآرستی در شاخه های مختلف فیزیک از قبیل دیواره حوزه، تک قطبی ها، ماده چگال و تئوری ریسمان وجود دارند. در ابعاد بالاتر فضا-زمان، ساختارهای ناآرستی با میدان های اسکالار حقیقی ایجاد می شوند که با استفاده از دو و سه میدان های اسکالار شبکه شش گوشی عادی و مدل هیگز [1-5] و غشای خمیده [6] را در پنج بعدی توصیف کند. در این مقاله از روش تغییر شکل با سه میدان اسکالار برای حل های ناآرستی استفاده شده است که اولین بار با یک و دو میدان اسکالار توسط Bazeia و همکاران انجام شده است [7-9]. این تغییر شکل پذیری نقش مهمی جهت بررسی انرژی سیستم و حالت های پایدار که از حل های استاتیکی معادلات حرکت سیستم ناشی می شود، بازی می کند.

برای توصیف سیستم سه میدانی با استفاده از دانسیته لاغرانژی داریم

$$\ell = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi_1 \partial^{\mu} \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi_2 \partial^{\mu} \phi_2 + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi_3 \partial^{\mu} \phi_3 - U(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \quad (1)$$

که U پتانسیل و تابعی غیر خطی است. با استفاده از معادلات اویلر-لاغرانژ، معادلات حرکت به صورت زیر است.

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = \frac{dU}{d\phi_i}, \quad i=1,2,3. \quad (2)$$

برای اینکه بتوانیم معادله (2) را حل کنیم با تعریف ابر پتانسیل $W=W(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ می توانیم پتانسیل را به صورت زیر بنویسیم.

$$U(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{2} W_{\phi_1}^2 + \frac{1}{2} W_{\phi_2}^2 + \frac{1}{2} W_{\phi_3}^2 \quad (3)$$

که داریم

$$W_{\phi_i} = \frac{\partial W}{\partial \phi_i}, \quad i=1,2,3. \quad (4)$$

در این صورت می توانیم معادلات حرکت درجه دو را به درجه یک تقلیل دهیم.

به عنوان یک مثال، یک سیستم سه میدان اسکالار جفت شده که شبکه های شش گوشی را توصیف می کند با ابر پتانسیل زیر در نظر می گیریم

$$W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \phi_1 - \frac{\phi_1^3}{3} - r\phi_1(\phi_2^2 + \phi_3^2) \quad (5)$$

معادلات حرکت درجه اول است به صورت

$$\frac{d\phi_1}{dx} = 1 - \phi_1 - r(\phi_2^2 + \phi_3^2), \quad \frac{d\phi_2}{dx} = -2r\phi_1\phi_2, \quad \frac{d\phi_3}{dx} = -2r\phi_1\phi_3 \quad (6)$$

برای حل این مسئله از روش مسیر بیضی وار زیر استفاده می کنیم

$$\frac{\phi_1^2}{r} + \frac{\phi_2^2}{1-2} + \frac{\phi_3^2}{r-2} = 1 \quad (7)$$

حل استاتیکی میدان ها به صورت زیر به دست می آیند

$$\phi_1 = \pm \tanh(2rx), \quad \phi_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2} \cos(\theta) \sec h(2rx), \quad \phi_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2} \sin(\theta) \sec h(2rx) \quad (8)$$

که θ پارامتر فاز است.

ابرپتانسیل و پتانسیل بر حسب X به صورت زیر بدست می آید:

$$W(x) = \frac{2}{3} \tanh(2rx)[1 + (3r-1) \sec h^2(2rx)], \quad (9)$$

$$U(x) = 2r \sec h^2(2rx)[(3r-1) \sec h^2(2rx) + 1 - 2r]$$

حال به توصیف روش تغییر شکل برای سه میدان اسکالر می پردازیم. برای شروع سه میدان اسکالر اولیه ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 را به ترتیب به $\chi_1(x), \chi_2(x), \chi_3(x)$ با کمک تابع تغییر شکل زیر تغییر می دهیم:

$$\phi_i(x) = f_i(\chi_i), \quad i=1,2,3, \quad (10)$$

که $(x)\phi_i$ تابع تغییر شکل نیافته و $(x)\chi_i$ تابع تغییر شکل یافته و هر دو مشتق پذیر و وارون پذیرند. برای سادگی تابع تغییر شکل را فقط تابعی از یک تک میدان در نظر گرفته و با استفاده از روش مسیر شرط زیر را برای تابع تغییر شکل به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\frac{df_1(\chi_1)}{d\chi_1} = \frac{df_2(\chi_2)}{d\chi_2} = \frac{df_3(\chi_3)}{d\chi_3} \quad (11)$$

ابرپتانسیل تغییر شکل یافته و پتانسیل تغییر شکل یافته به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\bar{W} = \int \frac{W_{\phi_i}}{df_i(\chi_i)} d\chi_i, \quad \bar{U} = \frac{U}{\left(\frac{df_i(\chi_i)}{d\chi_i} \right)^2} \quad (12)$$

حال با بکارگیری روش تغییر شکل برای ابرپتانسیل (5) اولین تابع تغییر شکل یافته به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\phi_1 = f_1(\chi_1) = \tan(\chi_1) \Rightarrow \chi_1 = \arctan(\phi_1) \quad (13)$$

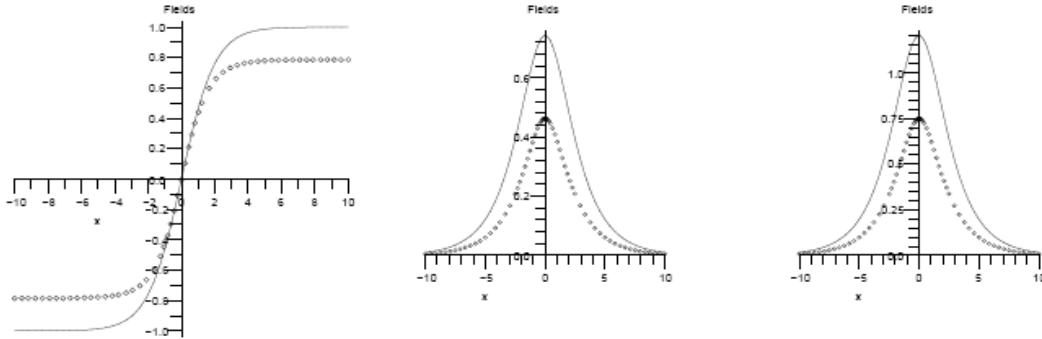
با استفاده از معادلات (7) و (11) دو میدان تغییر یافته دیگر به صورت زیر بدست می آیند:

$$\chi_2 = \sqrt{\frac{1}{2r}-1} \cos(\theta) \arctanh\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sec h(2rx)\right), \quad \chi_3 = \sqrt{\frac{1}{2r}-1} \sin(\theta) \arctanh\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sec h(2rx)\right) \quad (14)$$

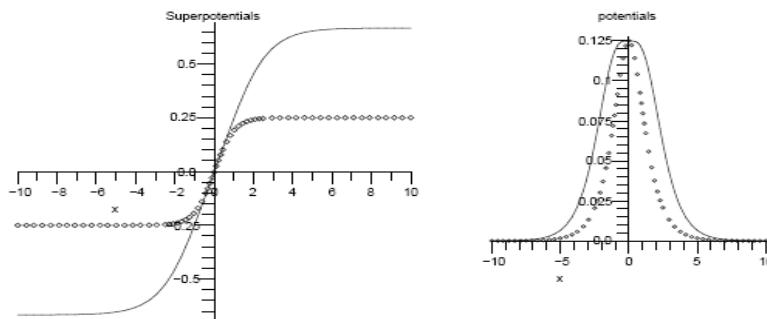
ابرپتانسیل و پتانسیل تغییر شکل یافته از معادله (12) به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\bar{W} = r \tanh(4rx), \quad \bar{U} = \frac{2r \sec h^2(2rx)[(3r-1) \sec h^2(2rx) + 1 - 2r]}{(1 + \tanh^2(2rx))^2} \quad (15)$$

مقایسه حل های توبولوژیکی معادلات تغییر شکل یافته و نیافته در شکل های (۱) و (۲) رسم شده اند و نشان می دهند که فرم سه میدان و ابر پتانسیل و پتانسیل در اثر تغییر شکل یکسان هستند و در مقایسه با حل های تغییر شکل نیافته فقط با یک مقیاسی تغییر می کنند.



شکل (۱): سه میدان تغییر شکل نیافته (خط پر) و سه میدان تغییر شکل یافته (نقطه چین).



شکل (۲): ابرپتانسیل و پتانسیل تغییر شکل نیافته (خط پر) و ابرپتانسیل و پتانسیل تغییر شکل یافته (نقطه چین).

نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا سه میدان اسکالر جفت شده ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 معرفی شده و با استفاده از روش مسیر حل شده است. سپس این سه میدان را به صورت χ_1, χ_2, χ_3 تغییر شکل داده ایم و به کمک روش مسیر آنها را حل نموده ایم. از مقایسه حل های میدان ها و پتانسیل های تغییر شکل یافته و نیافته مطابق شکل های (۱) و (۲) مشاهده می کنیم فقط تغییرات در مقیاس آنها می باشد.

مرجع ها

- [1] R. Rajaraman and E. Weinberg, Phys. Rev. D 11 (1975) 2950.
- [2] R. Rajaraman, Phys. Rev. Lett. 42(1979) 200 .
- [3] G. W. Gibbons and P. K. Townsend, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 1725 .
- [4] D. Bazeia, M. J. dos Santos, and R. F. Ribeiro, Phys. Lett. A 208 (1995) 84 .
- [5] Z. Surujon, Phys. Rev. D 73 (2006) 016008.
- [6] J. Sadeghi and A. Mohammadi, Eur. Phys. J. C 49 (2007) 859-8647.
- [7] D. Bazeia , L. Losano and J. M.C. Malbouisson, Phys. Rev. D 66(2002)101701(R).
- [8] D. Bazeia, L. Losano, C. Wotzasek, Phys. Rev. D 66 (2002) 105025.
- [9] V. I. Afonso, D. Bazeia, M. A. Gonzalez Leon, L. Losano and J. Mateos Guilarte, Phys.Rev. D (2007) 76 025010.

اثر تصحیحات جملات مربعی تانسور انحنای بر نیروی مقاوم وارد بر کوارک سنگین در حال حرکت در پلاسمای ابرتقارنی یانگ-میلز

کاظم بی تقصیر فدافن

گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

چکیده

در این تحقیق اثر تصحیحات جملات مربعی تانسور انحنای بر نیروی کششی وارد بر کوارک سنگین در حال حرکت در پلاسمای ابرتقارنی یانگ-میلز مطالعه شده است. نتیجه باست آمده با مورد پلاسمای $N=4$ مقایسه شده و نشان داده می شود که این تصحیحات بر نیروی کششی اثر می گذارند و آن را بزرگتر یا کوچکتر می کنند. ضریب پخش کوارکهای غیر نسبیتی در پلاسمای یانگ-میلز نیز محاسبه می شود. همچنین نیروی کششی در مورد متريک $Guss-Bonnet$ محاسبه شده است.

در این تحقیق حرکت کوارک در پلاسمای کوارک-گلوئون بررسی می شود. می دانیم که برای افزودن دما به نظریه میدان همدیس می بايستی در هندسه حجم یک سیاهچاله را در نظر گرفت [۱]. به این ترتیب برای انجام محاسبات از AdS/CFT استفاده می شود [۲]. به این معنی که کوارک در حال حرکت در پلاسمای ابرتقارنی در واقع انتهای ریسمانی است که در هندسه حجم امتداد یافته و به دنبال کوارک کشیده می شود و انتهای ریسمان به سیاهچاله می رسد. کوارکی که در پلاسمای کوارک گلوئونی در حال حرکت است، نیروی مقاومی را حس می کند که می توان آن را به کمک کنش کلاسیکی ریسمان به دست آورد. اولین محاسبه در این مورد در منابع [۳ و ۴] آمده است. در محاسبه ای که دنبال می شود، تصحیحات جملات مربعی تانسور انحنای به فضای AdS در نظر گرفته شده و هدف این است که اثر آنها بر نیروی مقاومی که کوارک در حال حرکت حس می کند، محاسبه شود [۷].

حل سیاهچاله فضای AdS با در نظر گرفتن تصحیحات جملات مربعی تانسور انحنای عبارتست از:

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{L^2}\right)f(r)dt^2 + \left(\frac{r^2}{L^2}\right)d\bar{x}^2 + \frac{1}{\left(\frac{r^2}{L^2}\right)f(r)}dr^2 \quad (1)$$

$$f(r) = 1 - \frac{r_0^4}{r^4} + \alpha + \gamma \frac{r_0^8}{r^8} \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{4\kappa}{3L^2}(2(5c_1 + c_2) + c_3), \quad \gamma = \frac{4\kappa}{3L^2}c_3 \quad (3)$$

راستای شعاعی در جهت هندسه سیاهچاله با τ نشان داده می شود و \bar{x} و t ابعاد مکان و زمان در مرز هستند که مرز در $r = \infty$ واقع شده است. مکان افق سیاهچاله با r_h نشان داده می شود و می توان آن را با حل $f(r_h) = 0$ یافت.

کنش کلاسیکی ریسمان کنش نامبو-گوتو است و معادلات حرکت با استفاده از (۱) به دست می آیند.

فرض می کنیم که کوارک در جهت x_1 حرکت می کند و ریسمان به دنبال آن کشیده می شود:

$$x_1(r, t) = vt + \xi, \quad x_2 = 0 = x_3 \quad (5)$$

می بايستی که معادله حرکت را برای ξ به دست آورد. کنش ریسمان با این جوابها به این ترتیب است:

$$L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{f(r)} + \frac{r^4}{L^4} f(r) \xi'^2} \quad (6)$$

ثابت حرکت را $\dot{\Pi}_\xi$ می نامیم و از کنش فوق می توان رابطه زیر را یافت:

$$\dot{\xi}'^2 = \frac{\Pi_\xi^2 (1 - \frac{v^2}{f(r)})}{\frac{r^4}{L^4} f(r) (\frac{r^4}{L^4} f(r) - \Pi_\xi^2)} \quad (7)$$

به دنبال جوابهایی هستیم که ریسمان از مرز شروع شده و تا سیاهچاله ادامه یابد. بنابراین می بایستی در طول ریسمان ξ^2 مثبت باشد. با این شرط می توان ثابت حرکت و نیروی مقاومی را که به کوارک وارد می شود به دست آورد. با انجام این محاسبات نیروی مقاومی که به کوارک وارد می شود، به دست می آید:

$$(F_{drag})_{R^2} = -\frac{\pi T^2 \sqrt{g_{YM}^2 N}}{2} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{1 + \sqrt{1-4\gamma(1+\alpha-v^2)}}{2(1+\frac{\alpha}{4}-\frac{5\gamma}{4})^4 (1+\frac{\alpha}{1-v^2})} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

در این روابط g_{YM} شدت جفت شدگی است و T دمای پلاسماست. عبارت $\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$ همان

نیروی مقاومی است که به کوارک در حال حرکت در پلاسمای ابرتقارنی $N=4$ وارد می شود. با توجه به کوچک بودن ضرایب α و γ می توان نیروی مقاوم $(F_{drag})_{R^2}$ را بسط داد و جملات اولیه بسط را بررسی کرد:

$$(F_{drag})_{R^2} = -\frac{\pi T^2 \sqrt{g_{YM}^2 N}}{2} \left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2-v^2}{1-v^2} \right) + \frac{\gamma}{2} (4+v^2) + \dots \right) \quad (9)$$

علامتهای جملات اولیه بسط نشان می دهند که این امکان وجود دارد که آنها صفر شوند و به همان نتیجه $N=4$ رسید! حتی ممکن است که نیروی مقاوم کوچکتر یا بزرگتر شود.

با استفاده از نیروی مقاوم می توان ثابت پخش را برای کوارک غیر نسبیتی محاسبه کرد. در این وضعیت از جملات توان دوم سرعت در (8) صرفنظر می شود و رابطه کلی زیر به دست می آید:

$$D = \frac{2\sqrt{2}(1+\frac{\alpha}{4}-\frac{5\gamma}{4})^2}{\pi T \sqrt{g_{YM}^2 N}} \left(\frac{1+\alpha}{1+\sqrt{1-4\gamma(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

از آنجا که به دنبال مطالعه تصحیحات مربعی تانسور انحنای فضا زمان بر سیاهچاله ها در فضای AdS می باشیم مناسب است تا عمومی ترین وضعیت را در گرانش Gauss-Bonnet مطالعه کنیم. جوابهای سیاهچاله در گرانش Gauss-Bonnet و در فضای AdS در مرجع [5] آمده است. با دنبال کردن روشی که ذکر شد، می توان نیروی مقاوم را بر کوارک در حال حرکت در این فضا نیز محاسبه کرد. نسبت نیروی مقاوم در گرانش Gauss-Bonnet و پلاسمای $N=4$ عبارتست از:

$$\frac{(F_{drag})_{GB}}{(F_{drag})_{N=4}} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{1-4\lambda_{GB}} - 2\lambda_{GB}(1+v^2)} \quad (11)$$

نتیجه به دست آمده به طور همزمان در مرجع [7] نیز محاسبه شده است که تاییدی بر صحبت محاسبات نیز می باشد.

نتیجه گیری

در نظر گرفتن جملات مربعی تانسور انحنا بر نیروی مقاومی که کوارک حس می کند اثر می کند.

مرجع ها

References

1. E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* (1998) 505 [arXiv:hep-th/9803131].
2. J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231,(1998),
Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 –arXiv:hep-th/9711200
3. C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz and L. G. Yaffe,
JHEP 0607 (2006) 013 [arXiv:hep-th/0605158].
4. S. S. Gubser, *Phys.Rev. D* (2006) 126005 [arXiv:hep-th/0605182].
5. R. G. Cai, *Phys.Rev. D* **65** (2002) 084014
6. Justin F. Vasquez-Poritz [arXiv:hep-th/0803.2890].
7. K. Bitaghsir Fadafan, [arXiv:hep-th/0803.2777], Priprint for submission.

تولید کوارک تاپ از تبخیر سیاهچاله در LHC

سعید پاک طینت مهدی آبادی، مجتبی محمدی نجف آبادی

پژوهشکده ذرات و شتابگرها، پژوهشگاه دانشگاهی بنیادی تهران

چکیده

در نظریه های با بعد اضافی بزرگ و مقیاس گرانش نزدیک T_{eV} توقع می رود تعداد زیادی سیاهچاله در برخورد دهنده LHC بوجود آید که در اثر تشعشع هاوکینگ به ذرات مدل استاندارد واپاشی می کنند. در این گزارش کوارک تاپ عنوان یک ذره سنگین با خصوصیات منحصر بفردش عنوان نشانه تولید سیاهچاله در نظر گرفته می شود.

۱- مقدمه:

یکی از هیجان انگیز ترین نشانه های فیزیک جدید در شتابدهنده LHC سیاهچاله هایی می باشد که در نظریه های با بعد اضافی بزرگ پیش بینی می شوند. از آنجا که این سیاهچاله ها جرم کم و دمای بالا دارند خیلی زود از طریق تابش هاوکینگ به ذرات مدل استاندارد تلاشی می کنند. در نتیجه این تلاشی تعداد زیادی ذرات بوجود می آیند که نشانه منحصر بفرد وجود سیاهچاله می باشند. این فرآیند محل تلاقی نظریه میدانهای کوانتمی و گرانش کوانتمی می باشد و مشاهده و اندازه گیری آن می تواند پنجره ای باشد بسوی فیزیک مقیاس پلانک [۱].

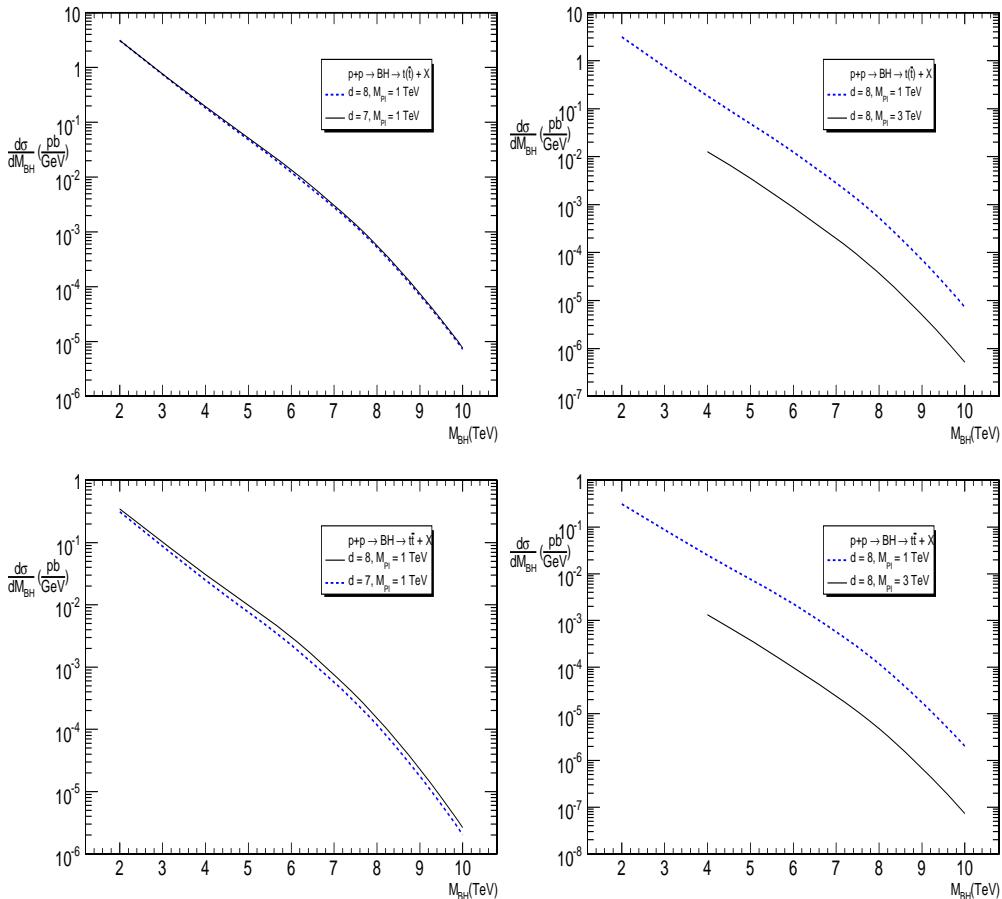
از سوی دیگر کوارک تاپ به علت جرم بالایش نقش مهمی در شکست خودبخودی تقارن الکتروضعیف دارد. در این مطالعه سیاهچاله عنوان منشاء متمایزی برای تولید کوارک تاپ در نظر گرفته شده و خصوصیات آن با کوارکهای حاصل از مدل استاندارد مقایسه می شود.

۲- تولید کوارک تاپ از تبخیر سیاهچاله

برای شبیه سازی تولید و تلاشی سیاهچاله ها در LHC از برنامه Charybdis1.003 [۲] استفاده شده است. کار هادرон سازی را HERWIG6.510 [۳] انجام می دهد هر چند در این مطالعه ما فقط به تولید کوارک تاپ علاقه مندیم. مطالعه تلاشی آن نیازمند در نظر گرفتن یک آشکارساز خاص می باشد که فراتر از حوصله این مطالعه می باشد. برای تابع توزیع پارتون ها در پروتون از $MRSD$ [۴] استفاده می کنیم. مقیاس Q برابر با جرم سیاهچاله فرض می شود. بستگی سطح مقطع به انتخاب تابع توزیع پارتون ها در حد ۱۰٪ می باشد. برای دیگر پارامترها از مقادیر پیش تعریف برنامه استفاده شده است. جرم کوارک تاپ در این برنامه 174.3 GeV می باشد. برای مقایسه مقدار 175 GeV نیز استفاده گردید. بزرگترین تغییر برای تولید زوج $t\bar{t}$ ملاحظه شد که ۱۰٪ بود. در این مطالعه تنها تولید یک کوارک تاپ یا یک زوج $t\bar{t}$ در نظر گرفته شده و رویدادهای با تعداد بیشتری کوارک تاپ مورد بررسی قرار نگرفته اند. اینگونه رویدادها می توانند عنوان رویدادهایی با دو لپتون هم باشد. برای قرار گیرند.

شکل ۱ توزیع (سطح مقطع جزئی) را بر حسب جرم سیاهچاله نشان می دهد. ردیف بالا برای تولید یک کوارک تاپ و ردیف پایین برای تولید زوج $t\bar{t}$ می باشد. خطوط مختلف مربوط به مقادیر مختلف جرم پلانک و مجموع تعداد ابعاد (d) برابر است با $4 + \text{تعداد ابعاد اضافه}$ می باشند. دیده می شود که سطح مقطع تولید کوارک تاپ بیشتر به جرم

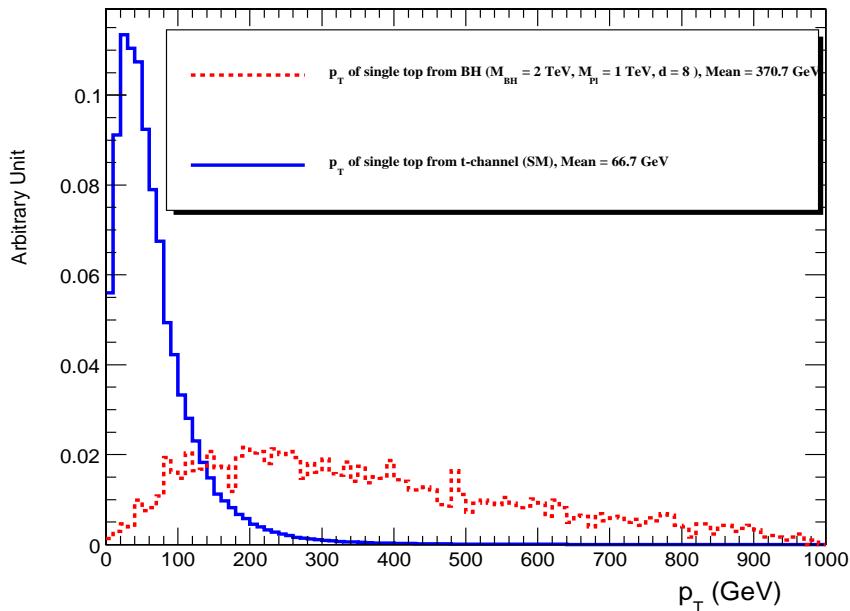
پلانک حساس است تا تعداد ابعاد اضافی. بویژه برای تولید یک کوارک تاپ تغییر تعداد ابعاد اضافی تاثیری بر نتایج ندارد.



شکل ۱- سطح مقطع جزئی ضربدر نسبت شاخه ای بر حسب جرم سیاهچاله برای تولید کوارک تاپ تنها (ردیف بالا) و زوج $t\bar{t}$ (ردیف پایین) در LHC

همچنین می توان دید که با افزایش جرم سیاهچاله یا مقیاس پلانک سطح مقطع تولید کوارک تاپ بشدت کاهش می یابد. اگر مقیاس پلانک ۱ TeV فرض شود سطح مقطع تولید کوارک تاپ بطور مفرد و زوج $t\bar{t}$ بترتیب $10^{-10} nb$ و $1 nb$ می شود که در مقایسه با مقادیر پیش بینی شده توسط مدل استاندارد ($247 pb$ و $830 pb$) بسیار بیشترند. از آنجا که این مقادیر در LHC بدقت اندازه گیری می باشند حضور یک منشاء قوی مانند سیاهچاله براحتی قابل تشخیص می باشد.

شکل ۲ توزیع تکانه عرضی کوارکهای تاپ با منشاء مدل استاندارد و سیاهچاله را با هم مقایسه می کند. خصوصیات سیاهچاله در شکل نوشته شده است. سطح زیر نمودارها به ۱ بهنگار شده است تا شکل نمودارها با هم مقایسه شود. به وضوح می توان دید که کوارکهای تاپ که از تبخر سیاهچاله تولید می شوند بسیار پر انرژی تر از کوارکهای تاپ با منشاء مدل استاندارد می باشند. میانگین تکانه عرضی کوارکهای تاپ با منشاء مدل استاندارد $66.7 GeV$ در حالی که میانگین تکانه عرضی کوارکهای تاپ که از تبخر سیاهچاله ای با جرم $2 TeV$ و $4 TeV$ بعد اضافی تولید می شوند $370.7 GeV$ می باشد. این خصوصیت کار کشف سیاهچاله و تمایز کوارکهای تاپ با منشاءهای گوناگون را خیلی راحت تر می کند.



شکل ۲- مقایسه تکانه عرضی کوارکهای تاپ منفرد با منشاء مدل استاندارد و تلاشی سیاهچاله ها.

۳- نتیجه گیری

در این مطالعه تولید کوارک تاپ از طریق تلاشی سیاهچاله برای مقادیر مختلف پارامترهای آزاد مورد بررسی قرار گرفته است. این بررسی نشان می دهد که در صورت تولید سیاهچاله در LHC افزایش تولید کوارکهای تاپ در مقایسه با مقدار بیش بینی شده توسط مدل استاندارد چشمگیر خواهد بود. در صورت زیاد بودن مقیاس پلانک سطح مقطع تولید کوارک تاپ بشدت کم می شود ولی پر انرژی بودن کوارکهای تاپ تولیدی می تواند بعنوان وسیله ای برای کشف این تولید سیاهچاله بکار رود.

۴- مراجع

- [۱] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G.R. Dvali, *Phys. Lett.* **B429**, 263 (1998); I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G.R. Dvali, *Phys. Lett.* **B436**, 257 (1998); L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999); S. Dimopoulos and G. Landsberg, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 161602 (2001); G.C. Nayak, J. Smith, *Phys. Rev.* **D74**, 014007 (2006).
- [۲] C.M. Harris, P. Richardson and B.R. Webber, *JHEP* **0308**, 033 (2003), hep-ph/0307305; C.M. Harris, P. Kanti, *JHEP* **0310**, 014 (2003), [hep-ph/0309054].
- [۳] G. Corcella, I.G. Knowles, G. Marchesini, S. Moretti, K. Odagiri, P. Richardson, M.H. Seymour, B.R. Webber, [hep-ph/0210213] and references therein.
- [۴] A. D. Martin, W. J. Stirling and R. G. Roberts, *Phys. Lett.* **B306**, 145 (1993).

رسانش غیر خطی در نانولوله های تک دیواره دسته مبلی با طول محدود در حضور یک تک ناخالصی

پویا پرتوی آذر^۱, افшин نمیرانیان^{۲و۱}

^۱دانشکده فیزیک دانشگاه علم و صنعت

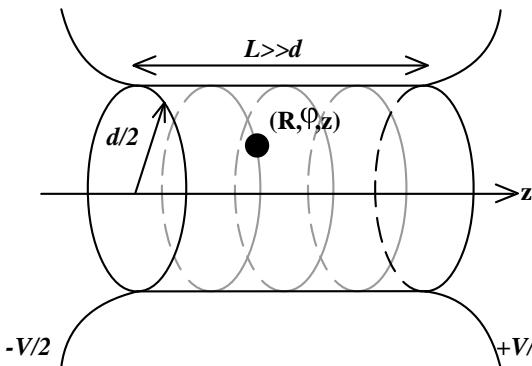
^۲لابراتوار فیزیک محاسباتی، دپارتمان علوم نانو، پژوهشکده دانشجویی بنیادی (IPM)

چکیده

در این رساله رسانش غیر خطی در نانولوله های تک دیواره دسته مبلی با طول محدود در حضور یک تک ناخالصی مورد بررسی قرار گرفته است. برای بررسی تاثیرات طول محدود در نانولوله ها و در عین حال حفظ تناوب دوره ای در راستای محور نانولوله، از مدل ذره در جعبه استفاده شده است. وابستگی رسانش دیفرانسیلی به ولتاژ دو سر نانولوله دو سر نانولوله، همچنین وابستگی شدید آن به مکان ناخالصی در طول لوله مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده روش قابل قبولی را برای اسپکتروسکوپی تراز های انرژی در این نانولوله ها معرفی میکنند.

روش و مدل

نانولوله کربنی را به شکل یک استوانه طویل ولی محدود در نظر میگیریم که از دو سر به دو الکترود فلزی متصل است. الکترودها با فرض $eV \square E_F$ در ولتاژ های متفاوت V قرار دارند. همچنین فرض میکنیم که یک تک ناخالصی (یا نقص) روی سطح استوانه و بر روی یک لایه اتمی قرار گرفته است.



شکل ۱. مدل یک نانولوله کربنی تک دیواره بشکل یک سطح استوانه ای بلند با قطر d ، که به نرمی بدو منبع فلزی بزرگ متصل است. ناخالصی یا نقص روی سطح استوانه نشان داده شده است.

از باز پراکنده شدن (بازتاب تابع موج) الکترون ها از روی الکترودها صرفنظر خواهیم نمود. هامیلتونی برای الکترون ها، H ، دارای جملات $H=H_0+H_1+H_{int}$ خواهد بود که $H_0=\sum_k \epsilon_k c_k^\dagger c_k$ هامیلتونی الکترون های بلوخ است که شبکه بی نقص نانولوله تک دیواره را احساس میکنند و $H_1=\frac{eV}{2} \sum_k sign(v_z) c_k^\dagger c_k$ بر هم کنش بین الکترون ها و میدان الکتریکی را نشان میدهد. در اینجا عملگر $(c_k^\dagger)^*$ یک الکtron رسانش با تابع موج Ψ_k و انرژی ϵ_k تولید (نابود) میکند.

k مجموعه کامل اعداد کوانتومی الکترون است. از درجه آزادی اسپینی صرفنظر میکنیم. v_z سرعت الکترون ها در راستای محور لوله است. در نهایت $H_{int}=\sum_{k,k'} \mathbf{J}_{k,k'} c_k^\dagger c_{k'}$ هامیلتونی بر هم کنش بین الکترون های رسانش و ناخالصی است. در حالت کلی این بر هم کنش به شکل $\int d\mathbf{r} J(\mathbf{r}) \Psi_k(\mathbf{r}) \Psi_{k'}^*(\mathbf{r})$ است. قدرت بر هم کنش کوچک فرض میشود. رسانش سیستم توسط فرمول لانداوئر توضیح داده میشود [1]. برای بررسی اثر نقص در شبکه میتوان از رهیافت اختلالی همراه با استفاده از نمایش کوانتش ثانویه برای هامیلتونی بهره جست [2]. تمامی عملگر ها در تصویر برهم کنش نوشته می شوند. فرض میکنیم که بر هم کنش بین الکترون های رسانش و

ناخالصی/نقص نقطه ای $J(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r})$ باشد و در دمای صفر مطلق کار می کنیم. در نتیجه تغییر در رسانش الکتریکی ناشی از حضور ناخالصی را میتوان به این شکل نمایش داد [2, 3]:

$$G_1 = G_0 \left(\frac{g\pi}{2} \right)^2 \sum_{m,n} [sign(v_{z_m}) sign(v_{z_n}) - 1] \times \delta(E_F - \varepsilon_n - \frac{eV}{2} sign v_{z_n}) \times \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_m) [\Psi_m^2(\mathbf{r}) \Psi_n^2(\mathbf{r})] \quad (1)$$

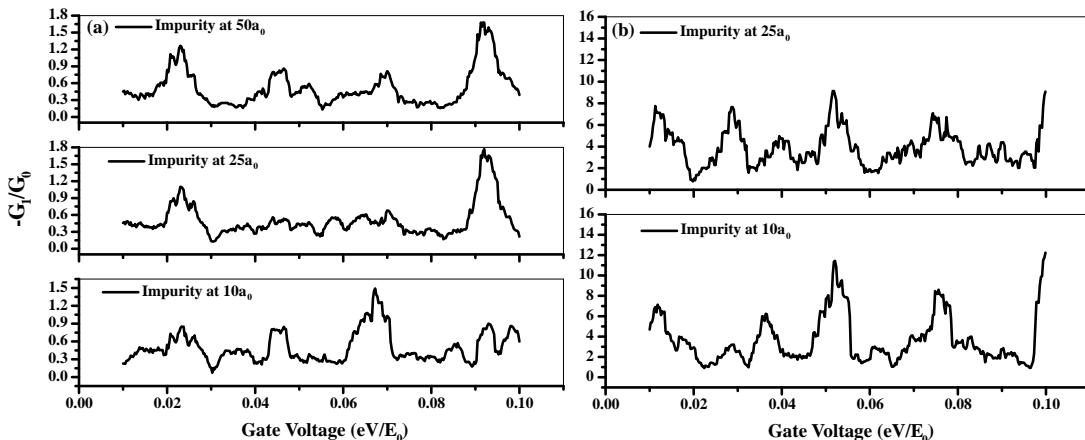
برای بدست آوردن طیف انرژی و توابع موج الکترون های بلوخ، فرض میکنیم که با مسئله ذره در جعبه سروکار داریم که طول جعبه بسیار بزرگ ولی محدود است. فرض میکنیم که الکترون هایی که در راستای محور لوله حرکت

میکنند، هامیلتونی $H_0 = \frac{P^2}{2m} + U$ را دارند. در اینجا اثر هر لایه

اتمی با یک پتانسیل دلتای جاذب نشان داده شده است. C قدرت تابع دلتا را مشخص می نماید. Z در راستای محور لوله و T تناوب انتقالی نanolوله در راستای محور لوله است. L طول لوله را بر حسب واحد تناوب انتقالی در راستای محور لوله T نشان میدهد. طول لوله به این ترتیب برابر است با $L = 150a_0$.

نتایج و بحث در مورد آنها

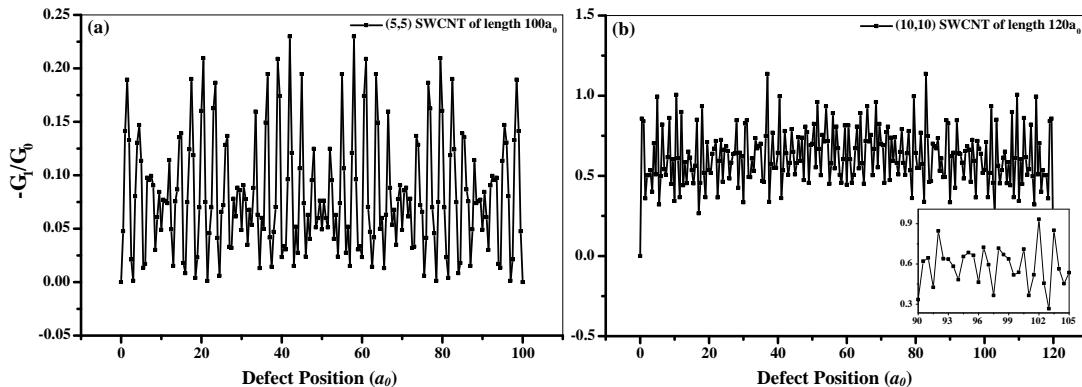
در شکل ۲ تغییرات رسانش ناشی از حضور تک ناخالصی/نقص بر حسب ولتاژ دو سر نanolوله رسم شده است. ولتاژ دو سر نanolوله از $0.01E_F$ تا $0.1E_F$ تغییر میکند. شکل ۲(a)، G_1 را برای یک نanolوله کربنی تک دیواره (۱۰) و (۱۰) با طول $150a_0$ نشان میدهد.



شکل ۲. تصحیح مرتبه اول برای رسانش بر حسب ولتاژ دو سر نanolوله برای یک نanolوله (۱۰) و (۱۰) با طول $150a_0$ و $50a_0$.

در هر دو شکل، G_1 به شکل حساسی به ولتاژ دو سر نanolوله وابسته است. اندیس و طول در نanolوله نمایش داده شده در شکل ۲(a) ثابت است. پس در این گرافها طیف انرژی دست نخورده باقی میماند. مشاهده یک قله در نمودار G_1 ، مثلا نزدیک به $0.025E_F$ در تمامی منحنی های شکل ۲(a) نشان میدهد که تعداد حالات با اختلاف انرژی $0.025E_F$ با انرژی فرمی در مقایسه با مثلا حالات با اختلاف انرژی حدود $0.03E_F$ با E_F بیشتر است. این میتواند بعنوان نوعی اسپکتروسکوپی ترازهای انرژی در نظر گرفته شود. این موضوع در شکل ۲(b) واضح تر است. رویه مرتفعه مقدار G_1 در شکل ۲(a) از شکل ۲(b) بسیار کمتر است. دلیل این امر آنست که برای مورد نanolوله با

طول کمتر، حضور ناخالصی/نقص برای الکترون‌ها قابل درک تر خواهد بود. بنابراین G_1 برای لوله‌های کوتاه‌تر بیشتر است. بعلاوه، الگوی گراف در شکل ۲(a) نسبت به شکل ۲(b) بسیار پیچیده‌تر است. برای نanolوله‌های کوتاه‌تر، فاصله بین ترازهای نزدیک به انرژی فرمی در مقایسه با فاصله بین ترازهای نزدیک انرژی فرمی در nanolوله‌های بلندتر، بیشتر است که این به نوبه خود باعث وجود تعداد کمتری حالت الکترونی نزدیک انرژی فرمی و کمتر شدن پیچیدگی الگوی G_1 در nanolوله‌های کوتاه‌تر می‌شود.



شکل ۳. تصحیح مرتبه اول انرژی برحسب مکان ناخالصی یا نقص در راستای طول لوله برای (a) (۵،۵) و (b) (۱۰،۱۰) به ترتیب با طول های $100a_0$ و $120a_0$. ولتاژ دو سر nanolوله روی $0.01E_F$ تنظیم شده است.

در شکل ۳، G_1 برحسب مکان ناخالصی/نقص رسم شده است. اشکال نشان میدهند که رسانش غیر خطی به مکان ناخالصی/نقص روی nanolوله‌ها وابسته بوده و دارای الگویی نوسانی است. از رابطه (۱) مشخص است که مقدار G_1 در نقطه ناخالصی/نقص در شکل ۳ در حقیقت جمع محدود تمامی توابع موج نزدیک انرژی فرمی است. وابستگی حساس G_1 به مکان ناخالصی را میتوان به این شکل درک نمود. همچنین میتوان دید که تصحیح مرتبه اول در شکل ۳(b) مشخصاً بیشتر از شکل ۳(a) است. در شکل ۳(b)، G_1 برای یک nanolوله تک دیواره (۱۰،۱۰) با طول $120a_0$ و برحسب مکان ناخالصی/نقص رسم شده است. این nanolوله خاص از نظر قطر و طول (طول 300nm و قطر 1.4nm) مشابه با nanolوله‌ای است که موضوع تحقیقات تجربی Venema و دیگران قرار گرفته است [۴]. مقایسه بین شکل ۳(b) و نتایج بدست آمده توسط Venema منطقی است زیرا تغییر دادن مکان ناخالصی/نقص و محاسبه رسانش دیفرانسیلی با استفاده از رابطه (۱)، بطور کیفی مشابه تصویربرداری STM از توابع موج الکترونی نزدیک انرژی فرمی است. طول موج تجربی گزارش شده تقریباً $3a_0$ است. این در حالی است که محاسبات ما نیز تقریباً همین مقدار را پیشنهاد مینماید. ویژگی مشترک در شکل ۳ این است که با افزایش قطر nanolوله، تصحیح اول در رسانش افزایش می‌یابد. این پدیده به آن دلیل اتفاق میافتد که در nanolوله‌های با قطر بلندتر (ولی با طول یکسان) تعداد مدهای مجاز قابل دسترس برای الکtron‌ها رسانش جهت حرکت در راستای محور nanolوله بیشتر است. بنابراین، بر هم کش بین الکtron‌ها رسانش و ناخالصی/نقص با افزایش قطر nanolوله بیشتر میگردد و این امر باعث بزرگتر شدن مقدار تصحیح در رسانش میگردد.

مرجع‌ها

- Landauer R 1970 *Phil. Mag.* **21** 863
- Kulik I O, Omelyanchouk A N and Tuluzov I G 1988 *Sov. J. Low Temp. Phys.* **14** 149
- Namiranian A, Kolesnichenko Yu A and Omelyanchouk A N 2000 *Phys. Rev. B* **61** 16796
- Venema L C, Wildoer J W G, Janssen J W, Tans S J, Temminck Tuinstra H L J, Kouwenhoven L P and Dekker C 1999 *Science* **283** 52

مطالعه‌ی قطبش کوارک‌های ظرفیتی در مدل ولون

فاطمه تقی شهیری^۱، فیروز آرش^۲

^۱دانشکده فیزیک- دانشگاه علم و صنعت ایران ، ^۲دانشکده فیزیک - دانشگاه تهران

چکیده

در این مقاله تلاش شده است که در چارچوب مدل پادیاده شناختی ولون، قطبش کوارک‌های ظرفیتی مورد مطالعه قرار گیرد. این اندازه‌گیری اطلاعاتی مربوط به رفتار توابع توزیع در X های بزرگ ($X > 10^7$) به ما می‌دهد. علاوه بر این، میزان قطبش کوارک‌های دریا و مقدار جریان محوری a^8 را بهتر تعیین خواهد کرد. ما نتایجی را که از قطبش کوارک‌های ظرفیتی در مدل ولون داریم با نتایج جدید COMPASS در سال ۲۰۰۷ مقایسه می‌کنیم تا نشان دهیم که پیش‌بینی‌های مدل ولون در مطالعه‌ی توابع ساختار قطبیده‌ی هادرونی تا جه اندازه دقیق‌اند.

مدل ولون قطبیده

کوارک ظرفیتی بعلاوه کوارک‌های دریا و گلوئونهای وابسته به آن را یک ولون می‌نامیم. با الهام از مدل ولون ناقطبیده، تابع ساختار قطبیده‌ی یک هادرон از جمله پروتون و تابع توزیع قطبیده‌ی پارتونی در آن بصورت زیراند [۱، ۲، ۳]:

$$g_v^p(x, Q^*) = \sum_v \int_x^\infty \frac{dy}{y} \delta G_{\frac{v}{p}}(y) g_v^{valon}(z = \frac{x}{y}, Q^*) \quad (1)$$

$$\delta q_{\frac{i}{p}}(x, Q^*) = \sum_v \int_x^\infty \frac{dy}{y} \delta G_{\frac{v}{p}}(y) \delta q_{\frac{i}{v}}(z, Q^*)$$

$\delta G_{\frac{v}{h}}(y)$ ، تابع توزیع قطبیده‌ی یک ولون و $g_v^{valon}(z = \frac{x}{y}, Q^*)$ تابع ساختار قطبیده‌ی ولون است. تابع توزیع قطبیده‌ی پارتونی، $(\delta q_{\frac{i}{v}}(z, Q^*))$ ، از حل معادله‌های DGLAP با شرایط اولیه‌ی مناسب بدست می‌آید و گشتاور نخست این تابع سهم هر نوع پارتون را در اسپین ولون نشان می‌دهد. با تعریف تبدیل ملین به صورت $f^n(Q^*) = \int dxdx^{n-1}f(x, Q^*)$ معادله‌های DGLAP در فضای گشتاورهای ملین توسط معادله‌های زیرداده می‌شوند [۴]:

$$\delta q_{NS}^n(Q^*) = \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(Q^*) - \alpha_s(Q_*)}{2\pi} \left(\frac{-\gamma}{\beta} \right) \times (\delta P_{NS}^{(1)n} - \frac{\beta_1}{\beta} \delta P_{qq}^{(1)n}) \right\} L^{\frac{-\gamma}{\beta} \delta P_{qq}^{(1)n}} \delta q_{NS}^n(Q_*) \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \delta \Sigma^n(Q^*) \\ \delta g^n(Q^*) \end{pmatrix} = \left\{ L^{\frac{-\gamma}{\beta} \delta P^{(1)n}} + \frac{\alpha_s(Q^*)}{2\pi} \hat{U} L^{\frac{-\gamma}{\beta} \delta P^{(1)n}} - \frac{\alpha_s(Q_*)}{2\pi} L^{\frac{-\gamma}{\beta} \delta P^{(1)n}} \hat{U} \right\} \begin{pmatrix} \delta \Sigma^n(Q_*) \\ \delta g^n(Q_*) \end{pmatrix}$$

$$\delta\Sigma = \sum_q (\delta q + \overline{\delta q}) \quad \text{علاوه بر کوارک ظرفیتی است و} \quad \delta q_{\text{NS}} \approx \delta q - \overline{\delta q} \approx \delta q_{\text{Valence}}$$

کوارک‌های دریا را هم در خود دارد. در مدل ولون فرض می‌شود که در مقیاس اولیه Q^* فوتون پروتون را به صورت حالت پیوندی از سه کوارک ظرفیتی می‌بینند. یعنی در این مقیاس ساختار درونی یک ولون غیر از کوارک‌های ظرفیتی آن قابل شناسایی نیست و تمامی اسپین و تکانه‌ی ولون توسط کوارک‌های ظرفیتی حمل می‌شود و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \delta q_{\text{NS}}(z, Q^*) &= \delta\Sigma(z, Q^*) = \delta(z-1) & , \delta g(z, Q^*) &= 0 \\ \delta q_{\text{NS}}^n(Q^*) &= \delta\Sigma^n(Q^*) = \int dz z^{n-1} \delta(z-1) = 1 & , \delta g^n(Q^*) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

در مدل ما $Q^* = 0.22 \text{ GeV}$ و $\Lambda_{\text{QCD}} = 0.283 \text{ GeV}$ انتخاب شده است [۵]. توابع توزیع ولون‌های قطبیده، $\delta G^{U(D)}(y)$ در مرجع [۳] تعیین شده‌اند. از آنجا که در تئوری QCD اختلالی یک گلوبن با جرم صفر تنها می‌تواند کوارک‌های دریا را با اسپین مخالف هم تولید کند، ما در محاسبات خود از قطبش کوارک‌های دریا صرف نظر کرده‌ایم. این موضوع توسط داده‌های HERMES نیز تایید می‌شود [۶].

قطبش کوارک‌های ظرفیتی در مدل ولون

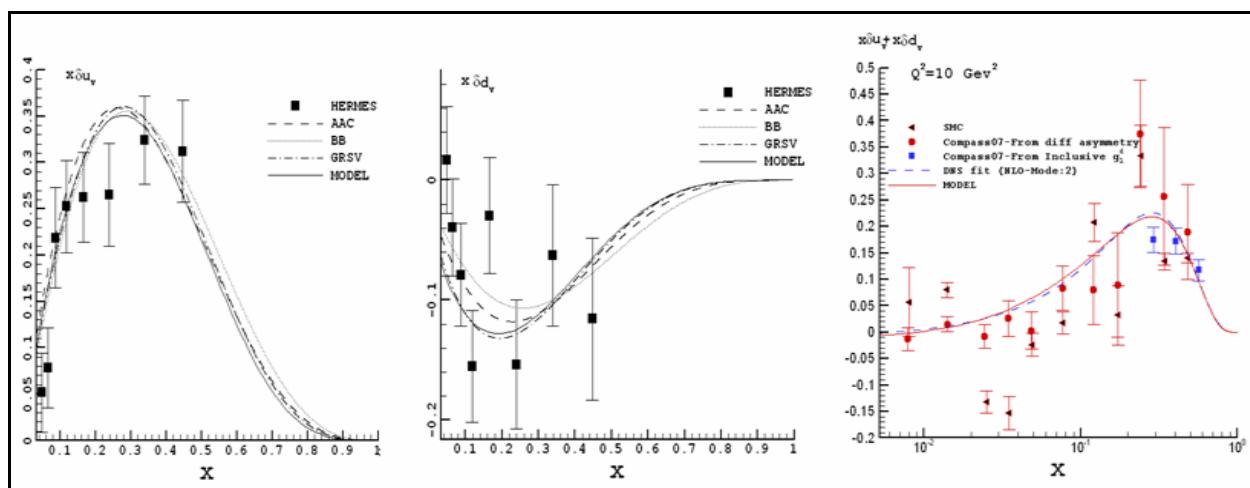
با استفاده از رابطه‌های ۱-۳، می‌توان توابع توزیع قطبیده‌ی پارتونی را در پروتون محاسبه کرد [۳]. اگر گشتاور نخست

توابع توزیع قطبیده‌ی ظرفیتی را با $\Gamma_v \equiv \int (\delta u_v + \delta d_v) dx$ نشان دهیم، اندازه‌گیری COMPASS سازگاری خوبی با

$$\Gamma_v^{\text{COMPASS}} = 0.40 \pm 0.07 \pm 0.05$$

$$\Gamma_v^{\text{MODEL}} = 0.41 - 0.42$$

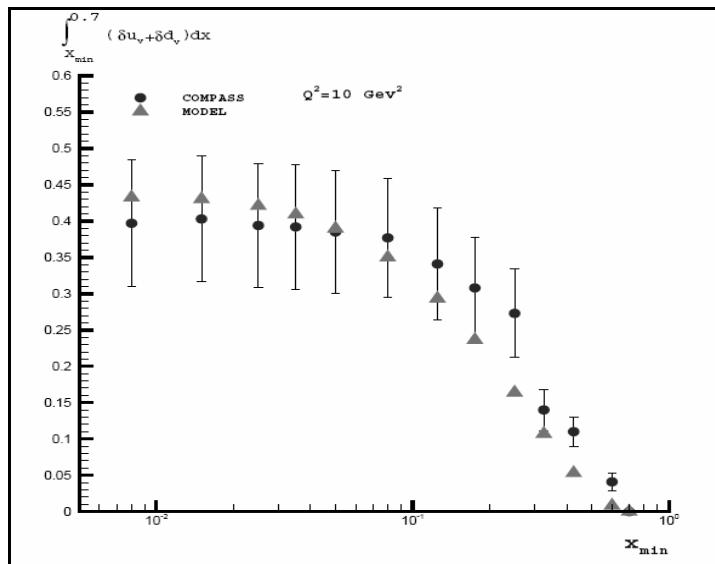
نتایج مدل ولون در بازه $Q^*(\text{GeV}) = [2, 10]$ دارد.



شکل ۱ قطبش کوارک‌های ظرفیتی در پروتون

نتیجه گیری

در این مقاله قطبش کوارک‌های طرفیتی در مدل ولون مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایجی که از قطبش کوارک‌های طرفیتی در مدل ولون داریم با نتایج جدید COMPASS در سال ۲۰۰۷ مقایسه شده، نشان داده شده است که سازگاری خوبی بین داده‌های تجربی و نتایج بدست آمده توسط این مدل وجود دارد.



شکل ۲ مقایسه نتایج انگرال $\delta u_v + \delta d_v$ در بازه‌ی $x \in [10^{-2}, 10^{-1}]$ در مدل ولون با نتایج آزمایش‌های اخیر

بر حسب حد پایین COMPASS

مرجع‌ها

- [۱] R.C. Hwa, M.S. Zahir, Phys. Rev. D **23**(1981)11
- [۲] Ali N. Khorramian, A. Mirjalili, S. Atashbar Tehrani, JHEP 0410,**062** (2004)
- [۳] Firooz Arash and Fatemeh Taghavi-Shahri, JHEP **07** (2007)071.
- [۴] B.Lampe, E.Reya.PhysRep.**332** (2000) 1;
- [۵] F.Arash, A.N.Khorramian, Phys. Rev.C**67** (2003)045201;
- [۶] A.Airapetian,et al (HERMESS Coll) .Phys Rev.Lett **92**:012005,2004;A.Airapetian,et al(HERMESS Coll) .Phys RevD**71**:012003;2005;
- [۷] COMPASS Collab. V. Yu. Alexakhin et al., Phys. Lett. B **647** (2007) 8 ;COMPASS collaboration. Yu. Alexakhin et al., arXiv: 0704, 3600

فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون

همزوی مجید^{۱*}; رجبی علی اکبر^۱

گروه فیزیک دانشگاه صنعتی شاهزاد

چکیده

همانطور که می‌دانیم پروتون دارای ساختار گسترشده می‌باشد. در این مقاله با در نظر گرفتن پروتون بعنوان یک ساختار گسترشده، فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی را استخراج نموده و ارتباط آنها را با تابع موج پروتون مورد بحث قرار داده ایم. سپس معادله دیراک را برای پروتون در حضور پتانسیل های نگاهدارنده فوق مرکزی، با استفاده از مختصات ژاکوبی، بطور تحلیلی و دقیق حل نموده ایم. سپس از آنجا فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون را در حضور پتانسیل خاص مورد نظر بدست آورده ایم. روابط میان فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی و شعاع باری و گستاور مغناطیسی پروتون نیز بحث خواهد شد.

فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی

می‌دانیم که فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی با تابع موج دارای ارتباطی به شکل زیر هستند [۱, ۲, ۳]. ابتدا از فرم فاکتور الکتریکی شروع می‌کنیم؛

$$\begin{aligned} G_E(q^2) &= \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(r) d^3 r \\ &= \int e^{iqr\cos\theta} \rho(r) r^2 d(\cos\theta) d\varphi dr \\ &= \int dr [g^2(r) + f^2(r)] \frac{\sin qr}{qr} \\ &= \int_0^\infty dr r^2 j_0(qr) [g^2(r) + f^2(r)] \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن از $\rho(r) = |\psi|^2 = g^2(r) + f^2(r)$ استفاده کرده ایم. $j_0(qr)$ مولفه های بالا و پایین تابع موج دیراک هستند. برای $q^2 = 0$ خواهیم داشت؛

$$G_E(0) = \int d^3 r \psi^\dagger \psi = 1 \quad (2)$$

در \vec{q} های کوچک خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} G_E(q^2) &= \int d^3 r \left(1 + i\vec{q}\cdot\vec{r} - \frac{1}{2} q^2 r^2 (\hat{q}\cdot\hat{r})^2 + \dots \right) \rho(r) \\ &= 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle + \dots \\ \langle r^2 \rangle &= -6 \left(\frac{dG_E(q^2)}{dq^2} \right)_{q^2=0} \end{aligned} \quad (3)$$

و سپس فرم فاکتور مغناطیسی [۲, ۴]؛

$$G_M(q^2) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \mu(r) d^3 r$$

$$\mu(r) = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{j}) \quad (4)$$

$$\vec{j} = e_q \bar{\psi} \gamma \psi$$

با توجه به رابطه $\int j_0(qr) \cos \theta d(\cos \theta) = j_1(qr)$ بدست خواهیم آورد؛

$$G_M(q^2) = -\frac{4M}{|\vec{q}|} \int_0^\infty dr r^2 j_1(qr) f(r) g(r) \quad (5)$$

و برای ممان مغناطیسی بدست می آوریم؛

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{e}{2M} G_M(q^2 = 0) = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \times \vec{j}) d^3 r \\ &= -\frac{2}{3} e \int_0^\infty dr r f(r) g(r) \end{aligned} \quad (6)$$

حل معادله دیراک با پتانسیل های فوق مرکزی

معادله دیراک را برای ذره ای به جرم m که دارای انرژی ϵ است، در حضور پتانسیل برداری $V_0(x)$ و پتانسیل اسکالار $U_0(x)$ به صورت زیر می نویسیم [2,3]؛

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(m + U_0(x))] \psi(x) = (\epsilon - V_0(x)) \psi(x) \quad (7)$$

تابع موج ذره را به صورت $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ نمایش می دهیم. پتانسیل های مختلفی را برای برهم کنش کوارک ها می

توان در نظر گرفت. از جمله می توانیم پتانسیل $\frac{c}{x}$ -، که این از برهم کنش یک کوارک و پادکوارک ناشی می شود و

منشأ آن بار رنگ است. پتانسیل دیگر ax^2 است که ناشی از نوسانات یک کوارک نسبت به یک کوارک دیگر در

فاصله x از آن است. پتانسیل سومی را که در نظر گرفته ایم bx می باشد و از آنجا که وقتی $x \rightarrow \infty$ میل می کند

پتانسیل بایستی بی نهایت شود تا سه کوارک درون پروتون را در کنار هم نگه دارد برمی آید [5,6,7]. در نتیجه

پتانسیل برهم کنشی را به صورت زیر در نظر می گیریم؛

$$U_0(x) = ax^2 + bx - \frac{c}{x} \quad (8)$$

که پس از حل معادله (7) در پتانسیل فوق، برای حالت پایه خواهیم داشت [5,6,7]؛

$$\psi = \frac{N}{4\pi} \left(\frac{i\vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{\epsilon + m} \left(\frac{1}{1.732x + 0.401} \right) \right) \times \exp(-0.866x^2 - 0.401x) \quad (9)$$

که در رابطه (۹) ثابت بهنجارش $N = 2.788$ می باشد.

نتیجه گیری

در اینجا با استفاده ازتابع موج بدست آمده فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون را محاسبه می کنیم [4]:

$$\begin{aligned} G_E(q^2) &= \int_0^\infty dx x^2 j_0(qx) [\chi^2(x) + \phi^2(x)] \\ &= \exp(-0.1443 q^2) (1 + 0.01 q^2) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} G_M(q^2) &= -\frac{4M}{|\vec{q}|} \int_0^\infty dx x^2 j_1(qx) \chi(x) \phi(x) \\ &= 2.19 \sqrt{1 + \frac{q^2}{56.34}} \exp(-0.1443 q^2) \end{aligned} \quad (11)$$

و برای شعاع باری و گشتاور مغناطیسی پروتون خواهیم داشت [2,4]:

$$\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(-6 \frac{dG_E}{dq^2} \Big|_{q^2=0} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.897 \text{ fm} \quad (12)$$

$$\mu = \frac{e}{2M} G_M(q^2 = 0) = -\frac{2}{3} e \int_0^\infty dx x \chi(x) \phi(x) = 3.089 \text{ n.m} \quad (13)$$

همان طور که مشاهده می شود، در این روش محاسبه شعاع باری و گشتاور مغناطیسی پروتون با استفاده از فرم

فاکتورهای الکترومغناطیسی، به مقادیر تجربی آنها یعنی $\mu_p = 2.79 \text{ n.m}$ و $\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.88 \text{ fm}$ نزدیک بوده و

این صحت محاسبات ما را نشان می دهد [5,6,7].

مراجع

1. F.E. Close; "An Introduction to Quarks and Partons". 1979.
2. F. Halzen, Alen D.Martin;"Quarks and Leptons: An Introductory course in modern particle physics."
3. Gross;"Relativistic to Quantum Mechanic". 1994.
4. Tegen, R. Brockmann, R. Weise, W: Z.Phys.A **307**,339 (1982).
5. A.A.Rajabi; Few-Body Systems **37**,197-213 (2005).
6. A.A.Rajabi, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, Vol, **28**. No.A2 (2004).
7. A.A.Rajabi, Indian Journal of pure and applied phys vol **141**, pp 89-94 Feb (2003).

مطالعه‌ی سهم‌های سبک و سنگین تابع ساختار طولی غیریکتا

علی خرمیان^۱; شاهین آتشبار تهرانی^۲; مریم سلیمانی‌نیا^۱; ساغر باطیبی^۱

^۱ گروه فیزیک دانشگاه سمنان

^۲ پژوهشکده فیزیک ذرات و شتابگرهای مرکز دانش‌های بنیادی

چکیده

هدف اصلی در این مقاله محاسبه‌ی تابع ساختار طولی غیریکتا ($F_{L,NS}(x, Q^2)$) تا مرتبه $NNLO$ در نظریه‌ی QCD است. بدین منظور محاسبه‌ی تابع توزیع غیریکتا و همچنین استفاده از ضرایب ویلسون مربوط به طعم‌های پارتونهای سبک و سنگین در فضای ملین ضروری است. پس از محاسبه تابع ساختار طولی غیریکتا در فضای ملین ($F_{L,NS}(N, Q^2)$) با استفاده از روش بسط چنان‌جمله‌ای‌های زاکوبی تابع ساختار ($F_{L,NS}(x, Q^2)$) در فضای x ببورکن و برای Q ‌های مختلف قابل محاسبه است.

مقدمه

فرم کلی تابع ساختار طولی ($F_L(x, Q^2)$ به صورت زیراست.)

$$F_L(x, Q^2) = \sum_j C_L^j(x, a_s, \frac{Q^2}{\mu^2}) \otimes f_j(x, \mu^2) \quad (1)$$

در این رابطه ($C_L^j(x, a_s, \frac{Q^2}{\mu^2})$ ضرایب ویلسون، $f_j(x, \mu^2)$ چگالی پارتونها در $O(\alpha_s^j)$ و $a_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{(4\pi)}$ ثابت جفت شدگی قوی و μ^2 مقیاس factorization است.

تابع ساختارکلی ($F_L(x, Q^2)$) شامل سه قسمت غیریکتا، یکتا و گلثون است و هر قسمت خود، سهم کوارک‌های سبک و سنگین را در بر داردند [1].

$$\begin{aligned} F_L(x, Q^2) &= F_L^{light}(x, Q^2) + F_L^{heavy}(x, Q^2) \\ &= C_L^{NS}(x, a_s, \frac{Q^2}{\mu^2}) \otimes q_{NS}(x, \mu^2) + C_L^S(x, a_s, \frac{Q^2}{\mu^2}) \otimes q_S(x, \mu^2) \\ &\quad + C_L^g(x, a_s, \frac{Q^2}{\mu^2}) \otimes g(x, \mu^2) \end{aligned} \quad (2)$$

باید توجه داشت اثرات طعم سنگین فقط در ضرایب ویلسون لحاظ می‌شود و توابع توزیع برای کوارک‌های سبک و سنگین یکسان هستند. بنابراین ضرایب ویلسون شامل سهم کوارک‌های سبک و سنگین می‌باشند.

با در نظر گرفتن $\mu^2 = Q^2$ داریم

$$C_{L,NS}(x, a_s) = C_{L,NS}^{light}(x, a_s) + H_{L,NS}^{heavy}(x, a_s) \quad (3)$$

تحلیل QCD

در نظریه‌ی QCD ضرایب ویلسون سبک و سنگین را می‌توان به صورت اختلالی بسط داد [۲و۳]

$$\begin{aligned} C_{L,NS}(x, a_s) &= \sum_{l=1}^{\infty} a_s^l C^{(l)}_{L,NS}(x) \\ H_{L,NS}(x, a_s) &= \sum_{l=2}^{\infty} a_s^l H^{(l)}_{L,NS}(x) \end{aligned} \quad (4)$$

به دلیل اینکه استفاده از نتایج حل معادلات DGLAP در فضای ملین ساده تراز فضای x است، ضرایب ویلسون سبک و سنگین NNLO,NLO در فضای ملین مورد نیاز هستند [۴]

$$H^{(2)}_{L,NS}(N, f, a_s) = a_s^2 \hat{C}_{L,NS}^{(2)}(N, f) \quad (5)$$

که در این رابطه

$$\hat{C}_{L,NS}^{(2)}(N, f) = C_{L,NS}^{(2)}(N, NL + NH) - C_{L,NS}^{(2)}(N, NL) \quad (6)$$

و f تعداد طعم‌های کوارک‌های فعال و NL و NH به ترتیب معرف تعداد طعم‌های سبک و تعداد طعم‌های سنگین است.
در نهایت بسط تابع ساختار طولی در حالت غیریکتا در فضای ملین به صورت زیر بیان می‌شود [۵]:

$$F_{L,NS}(N, Q^2) = [a_s(Q^2) C_L^{(1)}(N) + a_s^2(Q^2) C_L^{(2)}(N) + \dots] f_L(N, Q^2) \quad (7)$$

در این رابطه $f_k(N, Q^2)$ چگالی پارتونها را بیان می‌کند.
به منظور محاسبه تابع توزیع غیریکتا نیاز به معرفی فرم پارامتری آن به ازاء یک Q_0 خاص است. فرم پارامتری تابع توزیع غیریکتا در $Q_0^2 = 30 GeV^2$ عبارت است از [۲]

$$x q_{NS}(x, Q_0^2) = x^{0.5} (1-x)^3 \quad (8)$$

که با فرض چنین تابع توزیعی می‌توان ممنت آن را در فضای ملین به سادگی از انتگرال زیر به دست آورد

$$M_{q_{NS}}(N, Q_0^2) = \int_0^1 x q_{NS}(x, Q_0^2) x^{N-2} dx \quad (9)$$

تحول توزیع پارتون‌ها برای Q^2 ‌های دیگر با استفاده از نتایج حاصل از حل معادلات DGLAP امکان پذیر است.

$$M_{F_L}(N, Q^2) = M_{F_L}(N, Q_0^2) M^{NS}(N, Q^2) \quad (10)$$

$M^{NS}(N, Q^2)$ ممنت غیریکتا است که با استفاده از بسته نرم افزاری PEGASUS قابل محاسبه است. فرم نهایی $F_{L,NS}(N, Q^2)$ برای مرتبه NLO عبارت است از:

$$M_{F_{L,NS}^{NLO}(N, Q^2)} = a_s C_{L,NS}^{(1)}(N) M_{q,NS}(N, Q_0^2) M^{NS}(N, Q^2) \quad (11)$$

سهم کوارک‌های سنگین از مرتبه NNLO در تابع ساختار طولی ظاهر می‌شود.

$$\begin{aligned} M_{F_{L,NS}^{NNLO}}(N, Q^2) &= [a_s C_{L,NS}^{(1)}(N) + a_s^2 C_{L,NS}^{(2)}(N) + H^{(2)}_{L,NS}(N)] \\ &\times M_{q,NS}(N, Q_0^2) M^{NS}(N, Q^2) \end{aligned} \quad (12)$$

در نهایت با استفاده از خواص چندجمله‌ای‌های ژاکوبی تابع ساختار طولی غیریکتا $F_{L,NS}(N, Q^2)$ را تا مرتبه NNLO می‌توان استخراج کرد.

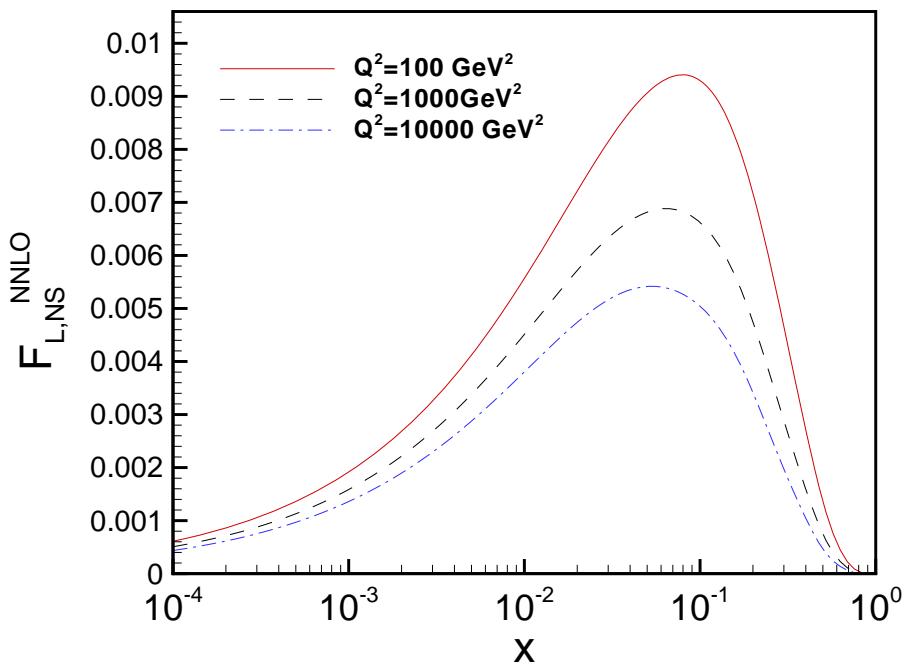
$$F_L(x, Q^2) = x^\beta (1-x)^\alpha \sum_{n=0}^{N \max} \theta_n^{(\alpha, \beta)}(x) \sum_{j=0}^n c_{n,j}^{(\alpha, \beta)} M_{F_L}(j+2, Q^2) \quad (13)$$

نتایج عددی

در تحلیل‌های فعلی از تابع توزیع غیریکتا در مقیاس اولیه استفاده شده است. پس از به دست آوردن ضرایب ویلسون و در نهایت محاسبه‌ی تابع ساختار طولی تا مرتبه NNLO نتایج $F_L(x, Q^2)$ در Q^2 ‌های مختلف قابل دسترس خواهد بود. در شکل (1) نتایج محاسبات ما برای تابع ساختار طولی و برای سه مقدار $Q^2 = 100, 1000, 10000 GeV^2$ نشان داده شده است.

نتیجه‌گیری

محاسبات ما نشان می‌دهد با داشتن ضرایب ویلسون در مراتب مختلف و استفاده از ممنت توزیع می‌توان تابع ساختار طولی در فضای ملین را بدست آورد و سپس با استفاده از چند جمله‌ای‌های ژاکوبی آن را به فضای X تبدیل کرده و بدین ترتیب می‌توان تابع ساختار طولی را در فضای x و برای Q ‌های متفاوت بدست آورد.



شکل (۱) - نتایج تابع ساختار طولی $F_L(x, Q^2)$ در Q^2 های مختلف.

مراجع ها

- [1] J. Blumlein, A. De Freitas, W.L. Van Neerven and S. Klein; "The Longitudinal Heavy Quark Structure $F_L^{Q\bar{Q}}$ in The Region $Q^2 >> m^2 \text{at} O(\alpha_s^3)$ ", 2006,[hep-ph/0608024](#).
- [2] J. A. M. Vermaseren, A. Vogt and S. Moch ;"The third-order QCD corrections to deep-inelastic scattering by photon exchange", 2005,[hep-ph/0504242](#).
- [3] I. Bierenbaum, J. Blumlein, S . Klein; "Two-Loop massive Operator matrix elements and unpolarized heavy flavor production at asymptotic values $Q^2 >> m^2$ ", 2007,[hep-ph/0703285](#).
- [4] W.L. Van Neerven, A. Vogt ;"NNLO evolution of deep-inelastic structure functions: the non-singlet case", *Nuclear Physics B* **568** (2000) **263-286**.
- [5] J. Blumlein, H. Bottcher, A. Guffanti ; "Non-singlet QCD analysis of deep inelastic world data at $O(\alpha_s^3)$ ", 2006, [hep-ph/0607200](#).

مطالعه‌ی زبری سطح تومر با استفاده از معادله مولینز- هرینگ

عصمت درویش^۱؛ امیر علی مسعودی^{۲*}

^۱دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال

^۲گروه فیزیک دانشگاه الزهرا

چکیده

در این مقاله به حل دقیق معادله $M-H$ به عنوان معادله رشد تومر پرداخته شده است.تابع مریع میانگین پهنه‌ی مرز، همچنین تابع همبستگی ارتفاع برای آن محاسبه شده است.

در طبیعت، سیستم‌های بسیاری وجود دارند که در آن‌ها یک مرز ناهموار در داخل یک محیط پیشروی می‌کند. بسیاری از این فرآیندهای رشد تصادفی، با استفاده از ابزار هندسه‌ی فرکتال‌ها، شناخته می‌شوند و با استفاده از هندسه فرکتال و روش مقیاس- بندی، نماهای رشد بررسی می‌شود. همچنین روش دیگر، یعنی مدل‌سازی برای معادله‌های دیفرانسیل جزئی رشد تصادفی (SPDE)، ابزاری برای شناسایی فرآیند رشد محسوب می‌شود [۱]. اگر چه این مفاهیم یک قالب‌کاری نظری منحصر به فردی را برای سطوح در جهان فیزیک تشکیل نمی‌دهد، ولی همین مفاهیم می‌تواند برای کسب درک عمیق‌تر، در بسیاری از فرآیندهای رشد در زیست‌شناسی کاربرد داشته باشد. به خاطر اهمیت بسیار زیاد این موضوع در علم پزشکی، بررسی رشد تومور یکی از جالب‌ترین موضوعات مورد مطالعه‌ی محققین را تشکیل می‌دهد. برای بررسی رشد تومور، روش مقیاس‌بندی و تحلیل شکل رشد تومور بوسیله‌ی این روش، کاربرد داشته است [۲، ۳].

در واقع تحقیقات مهم بسیاری در ارتباط با رشد تومور، در سالهای اخیر صورت گرفته است. شواهد آزمایشگاهی بسیار محکمی وجود دارد که رشد تعداد قابل ملاحظه‌ای از انواع تومورها، متعلق به یک کلاس جهانی یکسان است و آن کلاس جهانی (MBE) Molecular Beam Epitaxy می‌باشد [۴، ۵]. این نوع رشد، با فشار سلول‌های تکثیر شده‌ی مرز تومور و انتشار سطح سلول‌ها در گوشه‌های رشد، توصیف می‌شود. دینامیک MBE با نرخ رشد خطی توصیف می‌شود.

ساده‌ترین معادله‌ی پیوسته‌ای که کلاس جهانی MBE را توصیف می‌کند به عنوان معادله‌ی (Mullins – Herring) شناخته می‌شود [۶]، و به صورت زیر است:

$$\partial_t h = -\kappa \nabla^4 h + F + \eta(\vec{x}, t) \quad (1)$$

که در آن h و κ به ترتیب ارتفاع مرز و ضریب انتشار سطح می‌باشند و (x, t) یک نویز گوسی است که میانگین آن صفر است و همبستگی آن، با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$\langle \eta(\vec{x}, t) \eta(\vec{x}', t') \rangle = 2D \delta(t - t') \delta^d(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2)$$

D شدت نویز می‌باشد. جمله F , دیمانسیون سرعت را دارد و در این جا می‌تواند به صورت حاصلضرب شعاع میانگین سلول، در نرخ تقسیم سلول، تفسیر شود. نماهای بحرانی α , β , γ از روش مقیاس‌بندی و شمارش نماها استخراج می‌شود. که در این روش فرض می‌شود که مرز ناهموار به صورت فرکتال (self-affine) باشد. یعنی

$$h \rightarrow b^\alpha h, t \rightarrow b^z t, x \rightarrow bx$$

که با توجه به ناوردایی معادله (۱) تحت باز مقیاس‌بندی فوق، نماهای مورد نظر به سادگی محاسبه می‌شود و به صورت زیر خواهد بود [۷].

$$\beta = \frac{4-d}{8}, \quad \alpha = \frac{4-d}{2}, \quad z = 4 \quad (3)$$

حال به حل دقیق معادله می‌پردازیم.

اگر برای یک لحظه سرعت F را یک مقدار ثابت فرض کنیم به معادله لانژون خطی زیر خواهیم رسید:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\kappa \nabla^4 h + \eta(\bar{x}, t) \quad (4)$$

معادله فوق یک معادله خطی نسبت به h است و با استفاده از فضای شبکه معکوس و تبدیل فوریه قابل حل می‌باشد. توابع $h(\bar{x}, t)$ و $\eta(\bar{x}, t)$ را به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم [۸]:

$$h(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int d^d \bar{k} \, d\omega \, e^{i(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t)} h(\bar{k}, \omega)$$

$$\eta(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int d^d \bar{k} \, d\omega \, e^{i(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t)} \eta(\bar{k}, \omega)$$

با استفاده از روابط فوق تابع h در فضای معکوس صورت زیر بدست می‌آید:

$$h(\bar{k}, \omega) = \frac{\eta(\bar{k}, \omega)}{(\kappa k^4 - i\omega)} \quad (5)$$

که در رابطه‌ی فوق $k = |\bar{k}|$ است، حال فرآیند رشد، از زمان $t = 0$ در مبدأ زمان شروع می‌شود و در آغاز یک سطح صاف داریم، لذا برای زمان‌های $t > 0$ تابع نویز را صفر فرض می‌کنیم. با ادامه محاسبات برای تابع مربع میانگین پهنه‌ای مرز خواهیم داشت

$$w^2(L, t) = \langle (h - \bar{h}^2) \rangle = \langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2 \quad (6)$$

به طور خلاصه، $w^2(L, t)$ برابر است با:

$$w^2(L, t) = A + O(e^{-2\kappa \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 t}) + \frac{D}{\kappa} f_d \left(\frac{\kappa t}{L^4} \right) L^{4-d} \quad (7)$$

که در آن A به صورت زیر وابسته به d و شعاع سلولهای تومر و شدت نویز می‌باشد.

$$A = \frac{K_d}{d-4} \left(\frac{D}{\kappa} \right) \left(\frac{\pi}{a} \right)^{d-4} \quad (8)$$

رابطه‌ی فوق شکل کلی تابع w را برای همه ابعاد به جز $d=4$ مشخص می‌کند، که در آن f برای همه ابعاد غیر از چهار بعد، از شکل تابع مقیاس بندی fv پیروی می‌کند. در چهار بعد، تابع مقیاس بندی f به شکل لگاریتمی می‌باشد. کمیت دیگری که شکل آن برای ما اهمیت دارد تابع همبستگی می‌باشد. این تابع برای دو ارتفاع متفاوت، که یکی در مبدأ و یکی در جایگاه \vec{r} باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(\vec{r}, t) = \langle |h(\vec{r}, t) - h(\vec{0}, t)|^2 \rangle \quad (9)$$

با محاسبه این تابع در حد r های بزرگ و L (سایز سیستم) بزرگ، میتوان آن را به شکل کلی زیر نوشت

$$C(\vec{r}, t) = \frac{D}{\kappa} r^{4-d} \hat{f}_1 \left(\frac{\kappa t}{r^4} \right) + O(1) \quad (10)$$

که در آن f تابع مقیاس بندی است و محاسبات نشان میدهد که برای یک سه و پنج، رفتار تابع مقیاس بندی fv را از خود نشان می‌دهد. به عنوان نمونه برای یک بعد $C(r, t)$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$C(\vec{r}, t) \sim \begin{cases} -\frac{D}{\kappa} \frac{r^3}{6} - \frac{2D}{3\kappa} \frac{a^3}{\pi^4} & \text{for } a \ll r \ll (\kappa t)^{\frac{1}{4}} \\ -\Gamma\left(-\frac{3}{4}\right) 2^{\frac{-1}{4}} \frac{D}{\pi\kappa} (\kappa t)^{\frac{3}{4}} - \frac{2D}{3\kappa} \frac{a^3}{\pi^4} & \text{for } a \ll (\kappa t)^{\frac{1}{4}} \ll r \end{cases} \quad (11)$$

نماهای بحرانی که از رابطه فوق بدست می‌آید نشان می‌دهد سطح **super rough** است و با نتایجی که از روش مقیاس بندی بدست می‌آید سازگار است. با انجام محاسبات در چهار بعد، تابع مقیاس بندی به شکل لگاریتمی بدست می‌آید و در این بعد مشابه آنچه در تابع مریع میانگین پهناهی مرز مشاهده شد، گزار فاز خواهیم داشت. ولی در دو بعد رفتار حدی تابع مقیاس بندی بسیار نهایت می‌شود و در بازه‌های ذکر شده تابع همبستگی بی نهایت است و تابع باید در حدود و بازه‌های دیگری بررسی شود.

مراجع ها

- [1] A. L. Barabasi and H. E. Stanly, ``Fractal concepts in surface growth'' (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
- [2] A. Br'u, J. M. Pastor, I. Fernaud, I. Bru, S. Melle, and C. Berenguer, Phys. Rev. Lett. 81, 4008 (1998).
- [3] A. Br'u, S. Albertos, J. L. Subiza, J. L. Garc'ia-Asenjo, and I. Br'u, Biophys. J. 85, 2948 (2003).
- [4] C. Escudero, Phys. Rev. E 73, 020902 (R) (2006).
- [5] C. Escudero, Phys. Rev. E 74, 021901 (2006).
- [6] W. W. Mullins, J. Appl. Phys. 28, 333 (1957); C. Herring, J. Appl. Phys. 21, 301 (1950).
- [7] J. M. L'opez, M. A. Rodr'iguez, and R. Cureno, Physica A 246, 329 (1997).
- [8] T. Natterman, L.-H. Tang, Phys. Rev. A 45, 7156 (1991).

میدان گرانش خطی در فضا-زمان دوسيته

دهقاني، محسن^۱; تکوك، محمدوحيد^۲

^۱ دانشکاه علوم دانشگاه ايلام، ايلام

^۲ دانشکاه علوم دانشگاه رازى، كرمانشاه

چكیده

در اين مقاله معادله معادله خطی میدان را بر حسب عملگرهای کازیمیر گروه دوسيته نوشته و نشان می دهيم که اين معادله تحت تبدیلات پیمانه ای ناوردار است؛ بدلیل اين ناورداری پیمانه ای پارامتر پیمانه ای C در معادله اضافه شده است. با حل معادله به دست آمده در حالت مینیمال، جوابهای معادله به صورت حاصل ضرب یک تansور متقارن مرتبه دوم و یک میدان اسکالر با جفت شدگی مینیمم نوشته شده است. با استفاده از کوانتش کرین تابع دو- نقطه میدان گرانش خطی در فضای آمیان محاسبه و به فضای ذاتی انتقال داده شده است. این تابع ناورداری دوسيته بوده و هیچگونه واگرایی ندارد.

۱- مقدمه

فضا-زمان دوسيته يك جواب (با بيشينه تقارن) معادله انيشتين در خلائی با ثابت کيهانشناسي $\Lambda = 3H^2$ است:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0. \quad (1)$$

برای توضیحات بیشتر در مورداين فضا-زمان مراجع [1,2] را ببینيد. داده های تجربی اخیر حاکی از آن است که در تقریب اول ما در فضا-زمانی شبیه به فضا-زمان دوسيته زندگی می کنیم. بر این اساس کوانتش میدان گرانش در این فضا-زمان از اهمیت خاصی برخوردار است. در بخش دوم معادله خطی میدان با استفاده از دانسیته لاگرانژین به دست آمده و ناورداری پیمانه ای آن بررسی شده است. سپس با توصیف مختصی از فضای آمیان و معرفی عملگرهای کازیمیر گروه دوسيته، معادله میدان به صورت معادله ویژه مقدار اين عملگرهای کازیمیر نوشته و نشان داده شده است که اين معادله نيز تحت تبدیلات پیمانه ای ناوردار است. در بخش سوم با استفاده از يك جواب عمومی معادله میدان حل شده است. در بخش چهارم با استفاده از کوانتش کرین در فضای آمیان، تابع دو- نقطه میدان گرانش محاسبه و به فضای ذاتی دوسيته منتقل شده است. اين تابع ناورداری دوسيته بوده و هیچگونه واگرایی ندارد. در بخش پنجم به مرتفع شدن مشکلات تابع دو- نقطه گراویتون به عنوان يك نتیجه قابل توجه اشاره شده است. در اين مقاله علامت عناصر قطری متريک به صورت $(+,-,-,+)$ و $\hbar = c = 16\pi G = 1$ فرض می شود.

۲- معادله میدان در فضا-زمان دوسيته

با استفاده از تقریب خطی $g_{ab}^{(ds)} = g_{ab} + h_{ab}$ متریک دوسيته است) در معادله (1) یا با استفاده از دانسیته

$$\begin{aligned} L = \sqrt{-g^{(ds)}} & \left[\frac{1}{2} \nabla_a h^{ac} \nabla^b h_{bc} - \frac{1}{4} \nabla_a h_{bc} \nabla^a h^{bc} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} (\nabla^a h - 2\nabla^b h^a_b) \nabla_a h + \frac{1}{2} H^2 (h_{ab} h^{ab} + \frac{1}{2} h^2) \right], \end{aligned} \quad \text{لاگرانژین [3]:}$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 h_{ab} - \nabla_a \nabla_c h_b^c - \nabla_b \nabla_c h_a^c + \nabla_a \nabla_b h) & \quad \text{و به کمک معادلات اویلر-لاگرانژ به دست می آيد:} \\ + g_{ab}^{(ds)} (\nabla_c \nabla_d h^{cd} - \nabla^2 h) + H^2 (2h_{ab} + g_{ab}^{(ds)} h) & = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

معادله (2) تحت تبدیلات پیمانه ای $A_a \rightarrow h_{ab} + \nabla_a A_b + \nabla_b A_a$ یک بردار دلخواه است.

اینک یک تانسور متقارن $(x)K_{\alpha\beta}$ به صورت تابعی از متغیرهای x^α در فضای تخت R^5 در نظر می‌گیریم که در

$$x.K = x^\alpha K_{\alpha\beta} = x^\beta K_{\alpha\beta} = 0. \quad \text{شرط عرضی بودن نیز صدق کند یعنی:}$$

$$K_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial X^a}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^b}{\partial x^\beta} h_{ab}(X). \quad h_{ab}(X) \text{ از طریق رابطه مقابل به } (x)K_{\alpha\beta} \text{ مرتبه می‌شود}.$$

مشتق هموردا در مختصات آمیان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_\beta T_{\alpha 1..ai..an} = \bar{\partial}_\beta T_{\alpha 1..ai..an} - H^2 \sum_{i=1}^n x_{\alpha i} T_{\alpha 1..i..an}, \quad (3)$$

که در آن $\theta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + H^2 x_\alpha x_\beta$ و $\bar{\partial}_\beta = \theta_{\alpha\beta} \partial^\alpha$ یک تصویرگر عرضی متقارن است.

گروه دوسیته یک گروه ده پارامتری $SO_0(1,4)$ است که دارای دو عملگر کازیمیر به صورت زیر می‌باشد [4]:

$$Q_s^{(1)} = -\frac{1}{2} L_{\alpha\beta} L^{\alpha\beta}, \quad Q_s^{(2)} = -W_\alpha W^\alpha,$$

$$L_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}, \quad W_\alpha = -\frac{1}{8} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\eta} L^{\beta\gamma} L^{\delta\eta}, \quad \text{که در آن:}$$

$$M_{\alpha\beta} = -i(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha), \quad S_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} = -i(\eta_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} - \eta_{\beta\gamma} K_{\alpha\delta} + \eta_{\alpha\delta} K_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\delta} K_{\alpha\gamma}).$$

زیرنویس S در $Q_s^{(2)}$ و $Q_s^{(1)}$ نشان دهنده مرتبه تانسورهایی است که فضا را پوشش می‌دهند.

$$Q_1^{(1)} \Lambda = (Q_0^{(1)} - 2) \Lambda + 2x \partial_\cdot \Lambda - 2 \partial x \cdot \Lambda, \quad \text{با استفاده از روابط بالا می‌توان نشان داد:}$$

$$Q_2^{(1)} K = (Q_0^{(1)} - 6) K + 2\eta K' + 2S x(\partial_\cdot K) - 2S \partial(x \cdot K),$$

$$Q_0^{(1)} = -\frac{1}{2} M_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} = -H^{-2} \bar{\partial}^2, \quad K' = K_\alpha^\alpha, \quad \text{که در آن:}$$

$$S(\xi_\alpha \omega_\beta) = \xi_\alpha \omega_\beta + \xi_\beta \omega_\alpha, \quad \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1).$$

با استفاده از معادله (3) و اعمال شرط معادله (2) به صورت زیر در می‌آید:

$$(Q_2^{(1)} + 6) K + D_2 \partial_2 \cdot K = 0, \quad (4)$$

$$\partial_2 \cdot K = \partial \cdot K - H^2 x K' - \frac{1}{2} \bar{\partial} K', \quad D_2 \Lambda = H^{-2} S(\bar{\partial} - H^2 x) \Lambda. \quad \text{که در آن:}$$

معادله (4) تحت تبدیلات پیمانه ای، $K_{\alpha\beta} \rightarrow K_{\alpha\beta} + D_2 \Lambda$ ناورده است (یک میدان برداری دلخواه است). به

دلیل این ناوردهایی پیمانه ای می‌توان آن را با استفاده از پارامتر پیمانه ای c به صورت زیر نوشت

$$(Q_2^{(1)} + 6) K + c D_2 \partial_2 \cdot K = 0. \quad (5)$$

- حل معادله میدان

جواب کلی معادله میدان (5) را می‌توان به صورت زیر نوشت [4,5,6]:

$$K = \theta \phi_1 + S \bar{Z}_1 K_1 + D_2 K_g, \quad (6)$$

که در آن ϕ_1 یک میدان اسکالر، Z_1 یک پنج بردار ثابت، K_1 و K_g دو میدان برداری دلخواه هستند. با استفاده

از معادله (6) در معادله (5) داریم

$$(Q_0^{(1)} + 6) \phi_1 = -4 Z_1 \cdot K_1, \quad (Q_1^{(1)} + 2) K_1 = 0, \quad (7)$$

$$(Q_1^{(1)} + 6) K_g = -\frac{1}{3} H^2 D_1 (\phi_1 + Z_1 \cdot K_1) + \frac{2}{3} (H^2 x Z_1 \cdot K_1 - Z_1 \cdot \bar{\partial} K_1), \quad D_1 = H^{-2} \bar{\partial},$$

که در آن از شرایط استفاده شده است. از حل معادلات (۷) داریم [6]

$$c = \frac{2}{2s+1} = \frac{2}{5}, \quad x.K_1 = \bar{\partial}.K_1 = 0.$$

$$\phi_1 = -\frac{2}{3}Z_1.K_1, \quad K_1 = [Z_2 - \frac{1}{2}D_1(Z_2.\bar{\partial} + 2H^2x.Z_2)]\phi_2,$$

$$K_g = \frac{1}{9}[\frac{2}{3}H^2D_1(Z_1.K_1) + H^2xZ_1.K_1 - Z_1.\bar{\partial}K_1].$$

با استفاده از معادلات (۸) در معادله (۶) می‌توان نشان داد

$$K_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(x, Z_1, Z_2, \xi)\phi_2, \quad \phi_2 = (Hx.\xi)^\sigma, \quad \sigma = 0, -3, \quad \xi^2 = 0,$$

که در آن ϕ_2 جواب معادله میدان اسکالر با جفت شدگی مینیمم و $\varepsilon_{\alpha\beta}$ یک تانسور متقارن مرتبه دوم است

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = S[A\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + B\frac{xZ_2}{x.\xi}\bar{Z}_1\xi + C\frac{xZ_1}{x.\xi}\bar{Z}_2\xi + D\frac{\bar{\xi}\xi}{(x.\xi)^2} + E\theta],$$

$$A = \frac{\sigma}{27}(\sigma - 15), \quad B = \frac{\sigma}{27}(\sigma^2 - 12\sigma - 27), \quad C = \frac{\sigma^2}{27}(\sigma - 3),$$

$$D = \frac{\sigma(\sigma-1)}{54}[H^{-2}(\sigma+6)Z_1.Z_2 + \sigma^2(x.Z_1)(x.Z_2)],$$

$$E = \frac{\sigma}{54}[(\sigma+15)Z_1.Z_2 + (\sigma+3)(\sigma+8)H^2(x.Z_1)(x.Z_2)].$$

پنج-بردارهای Z_1, Z_2 در شرایط $Z_1.\xi = Z_2.\xi = 0$ صدق می‌کنند، به این ترتیب تعداد درجات آزادی آنها از پنج به چهار کاهش می‌یابد.

۴- تابع دو- نقطه

شکل کلی تابع دو- نقطه را مشابه معادله (۶) می‌توان بر حسب توابع دو- نقطه برداری و اسکالر نوشت [6]

$$W(x, x') = \theta\theta'W_0 + SS'\theta.\theta'W_1 + D_2D'_2 W_g. \quad (9)$$

از قراردادن این تابع در معادله میدان (۵) نسبت به x در حالت مینیمال (۵) داریم

$$\theta'W_0(x, x') = -\frac{2}{3}S'\theta'.W_1(x, x'),$$

$$D'_2 W_g(x, x') = \frac{1}{9}H^2 S'[\frac{2}{3}D_1\theta' + x\theta' - H^{-2}\theta'.\bar{\partial}]W_1(x, x'),$$

$$W_1(x, x') = [\theta.\theta' - \frac{1}{2}D_1(\theta'.\bar{\partial} + 2H^2x.\theta')]W_{m.c.}(x, x'),$$

که در آن $W_{m.c.}$ تابع دو- نقطه میدان اسکالر با جفت شدگی مینیمم است [7]

$$W_{m.c.}(x, x') = \frac{iH^2}{8\pi^2}\varepsilon(x^0 - x'^0)[\delta(1-Z) + \theta(Z-1)],$$

$$\varepsilon(x^0 - x'^0) = \begin{cases} 1 & x^0 > x'^0, \\ 0 & x^0 = x'^0, \\ -1 & x^0 < x'^0. \end{cases}$$

با استفاده از معادلات فوق در (۹) می توان نشان داد

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(x, x') = & \frac{2Z}{27(1-Z^2)^2} SS'[(1-Z^2)(4-3Z^2)\theta_{\alpha\beta}\theta'_{\alpha'\beta'} \\
 & + 3(3-Z^2)H^2\theta'_{\alpha'\beta'}(x'.\theta_\alpha)(x'.\theta_\beta) + 3(3-Z^2)H^2\theta_{\alpha\beta}(x.\theta'_{\alpha'}) (x.\theta'_{\beta'}) \\
 & + \frac{3}{1-Z^2}(3+10Z^2+3Z^4)H^4(x'.\theta_\alpha)(x'.\theta_\beta)(x.\theta'_{\alpha'}) (x.\theta'_{\beta'}) \\
 & + \frac{2}{Z}(10-13Z^2-9Z^4)H^2(\theta_\alpha.\theta'_{\alpha'}) (x.\theta'_{\beta'}) (x'.\theta_\beta) \\
 & + (1-Z^2)(9Z^2-7)(\theta_\alpha.\theta'_{\alpha'}) (\theta_\beta.\theta'_{\beta'})] \frac{d}{dZ} W_{m.c.}(Z), \\
 \frac{d}{dZ} W_{m.c.}(Z) = & \frac{iH^2}{8\pi^2} \frac{Z-2}{Z-1} \varepsilon(x^0-x'^0) \delta(Z-1).
 \end{aligned}$$

تابع دو- نقطه فوق را می توان بر حسب مختصات ذاتی به صورت زیر نوشت [4]

$$\begin{aligned}
 Q_{aba'b'}(X, X') = & \frac{2}{27(1-Z^2)} SS'[Z(4-3Z^2)g_{ab}g'_{a'b'} + 3Z(3-Z^2)(g'_{a'b'}n_an_b + g_{ab}n_an_{b'}) \\
 & + Z(9Z^2-7)g_{aa'}g_{bb'} + 2(-10+11Z+20Z^2+3Z^3)n_an_bn_an_{b'} \\
 & + 2(10+7Z-20Z^2-9Z^3)g_{aa'}g_{bb'}] \frac{d}{dZ} W_{m.c.}.
 \end{aligned}$$

تابع دو- نقطه فوق ناوردای دوسیته بوده و هیچگونه واگرایی ندارند.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از نوشتار فضای آمیان معادله خطی شده میدان گرانش در حالت مینیمال حل شده و نشان داده شده است که جواب معادله را می توان به صورت حاصلضرب یک تانسور قطبش متقارن مرتبه دوم و یک میدان اسکالار با جفت شدگی مینیمم نوشت. با استفاده از کوانتش کرین تابع دو- نقطه میدان گرانش در فضای آمیان محاسبه شده و به فضای ذاتی انتقال داده شده است. این تابع ناوردای دوسیته بوده و هیچگونه واگرایی ندارد. به عبارت دیگر با استفاده از کوانتش کرین دو مشکل اساسی شکست تقارن دوسیته و واگرایی مادون قرمز در تابع دو- نقطه گراویتون مرتفع شده است. از نتیجه این کار می توان برای محاسبه اثرات کوانتومی گرانش در میدانهای برهمکنشی استفاده کرد.

مرجع ها

- [1] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, "The large- scale structure of space-time"(Cambridge,1973).
- [2] B. Allen and A. Folacci Phys. Rev. D, 35(1987)3771.
- [3] A. Higuchi and S.S. Kouris, Class. Quant. Grav. 17(2000)3077.
- [4] T. Garidi, J.P. Gazeau and M.V. Takook, J. Math. Phys. 44(2003)3838.
- [5] j.p. Gazeau, S. Rouhani and M.V.Takook, "Linear covariant quantum gravity in de Sitter space" in submission.
- [6] M. Dehghani, S. Rouhani, M.V. Takook and M.R. Tanhayi, Phys. Rev. D, 77(2008)64028.
- [7] M.V. Takook, Mod. Phys. Lett. A, 16(2001)1691.

اثر گشتاور خارجی بر دینامیک نوکلئوزوم

رأفت‌نیا شروین^۱، ملازاده‌بیدختی لاله^۱، محمد رفیعی فرشید^۱

^۱دانشگاه علوم پایه، زنجان، ایران

چکیده

در این مقاله ابتدا حرکت پخشی نوکلئوزوم را در غیاب نیروی خارجی بر اساس مدل "نقیصه‌ی پیچشی" شبیه‌سازی می‌کنیم. ضریب پخش باست آمده به خوبی با آنچه از تئوری به دست می‌آید سازگاری دارد. سپس حالتی را در نظر می‌گیریم که از یک سو به DNA متصل به نوکلئوزوم گشتاور وارد می‌شود. در نتیجه، انرژی پیچشی ایجاد شده در طول رشته‌ی DNA باعث جهت‌دار شدن حرکت می‌گردد.

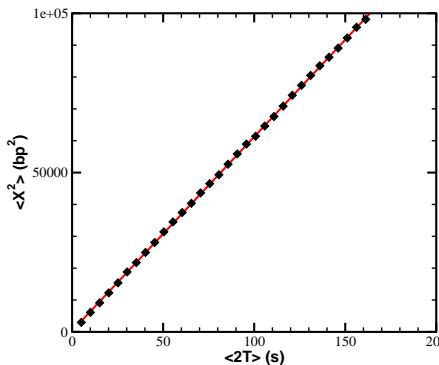
نوکلئوزوم که واحد اصلی کروماتین در سلولهای یوکاریوتیک است، شامل قسمتی از DNA به طول ۱۴۷ جفت-باز با طول هر جفت-باز 0.34 نانومتر ، می‌باشد که ۱/۷ دور گرد هسته‌ای از پروتئینهای هیستون پیچیده است. ابعاد یک نوکلئوزوم $10 \times 5 \times 6 \text{ نانومتر}$ می‌باشد و در آن DNA در ۱۴ نقطه به هسته‌ی هیستونی متصل است. بسیاری از فرآیندهای حیاتی مانند بیان ژنها نیاز به دسترسی مستقیم به رشته DNA دارند و لازم است که DNA به طریقی از هسته‌ی هیستونی جدا شود. انرژی گرمایی می‌تواند این امکان را مهیا نماید. نوکلئوزوم در اثر افت و خیزهای گرمایی در طول رشته‌ی DNA حرکت پخشی می‌کند. برای توجیه این حرکت مدل‌های مختلفی ارائه شده‌اند، اما هنوز مشخص نشده که کدامیک غالب است. دو سازوکار مطرح عبارتند از مدل "نقیصه‌ی پیچشی" [۱] و سازوکار "تورم ۱۰" [۲]. در این مقاله سعی می‌کنیم حرکت نوکلئوزوم در حضور گشتاور خارجی را با استفاده از سازوکار نقیصه‌ی پیچشی بررسی نماییم. آزمایش مطرح شده در این مقاله می‌تواند راهی باشد برای یافتن مکانیزم غالب.

در مدل نقیصه‌ی پیچشی، انرژی گرمایی باعث بازپیچش (جفت-باز اضافی) یا واپیچش (جفت-باز کم) یکی از دو سر آزاد DNA می‌شود. اگر این پیچش وارد نوکلئوزوم شده و از سر دیگر آن خارج شود، باعث حرکت نوکلئوزوم نسبت به DNA به اندازه‌ی طول نقیصه‌ی وارد شده، می‌گردد. از لحاظ انرژی، نقیصه‌هایی با طول بیش از یک جفت-باز به صرفه نیستند، در نتیجه نوکلئوزوم حرکت پخشی با طول قدم یک جفت-باز می‌کند. به طور کلی مشخصه‌ی اصلی یک حرکت پخشی، ضریب پخش آن است که در حالت یک بعدی به صورت

$$D = \frac{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}{2T}$$

نوشته می‌شود. در این رابطه X مکان ذره و T زمان بوده و متوسط‌گیریها آنسامبلی می‌باشند. برای حرکت پخشی نوکلئوزوم در مدل نقیصه‌ی پیچشی، برای DNA با توالی کاملاً تصادفی، به کمک نظریه‌ی "زمان اولین عبور" [۳] ضریب پخش $580 \text{ bp}^2/\text{s}$ بدست می‌آید. برای شبیه‌سازی این حرکت، یک شبکه ۱۴ سایتی متناظر با ۱۴ نقطه‌ی اتصال DNA به هسته درنظر می‌گیریم. دو نوع نقیصه‌ی ممکن را با دو نوع ذره مدل می‌نماییم؛ برای راحتی آنها را + (جفت-باز اضافی) و - (جفت-باز کم) می‌نامیم. دو ذره‌ی همنوع بدلیل خرج انرژی بالا نمی‌توانند هم‌زمان در یک سایت قرار گیرند. همچنین چنانچه دو ذره‌ی متفاوت در یک خانه باشند، یکدیگر را خنثی خواهند کرد. ذرات از خانه‌های انتهایی تزریق شده و با در نظر گرفتن این برهمکنش‌ها، میان ۱۴ خانه‌ی شبکه حرکت پخشی می‌کنند. اگر ذره‌ی مثبت/منفی

تزریق شده از چپ راست، از سمت مخالف خارج شود، نوکلئوزوم یک قدم به راست(چپ)/چپ(راست) خواهد رفت. در این شبیه‌سازی، از الگوریتم "جیلیسپی" [۳] استفاده می‌کنیم. اتفاقات مختلفی ممکن است در سیستم رخ دهن، مانند تزریق ذره و یا به چپ یا راست رفتن ذرات موجود. هر رویداد احتمال مشخصی دارد. در هر قدم، یک رخداد به طور تصادفی اتفاق می‌افتد. در نهایت، برای آنسامبل‌های مختلف مکان نوکلئوزوم را بر حسب زمان به دست می‌آوریم. حرکت نوکلئوزوم بر روی DNA تصادفی و در غیاب نیروی خارجی، کاملاً تصادفی است. در نتیجه، $\langle X \rangle$ صفر می‌شود. بنابراین، اگر $\langle X^2 \rangle$ را بر حسب زمان رسم کنیم، نمودار حاصل خط راستی خواهد بود که شیب آن ضریب پخش سیستم را می‌دهد، شکل (۱).

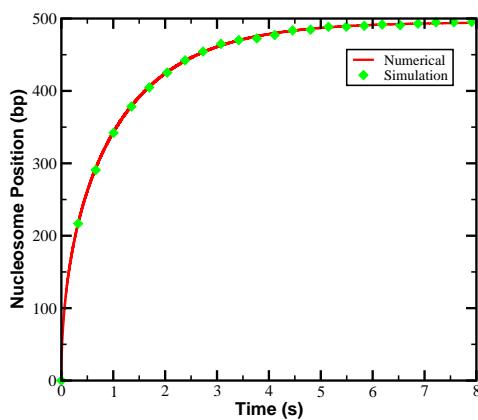


شکل (۱): میانگین مجذور جابجایی نوکلئوزوم در راستای DNA تصادفی بر حسب زمان. از این نمودار ضریب پخش (شیب خط) تقریباً $600 \text{ bp}^2/\text{s}$ بدست می‌آید که با نتایج نظری سازگاری دارد.

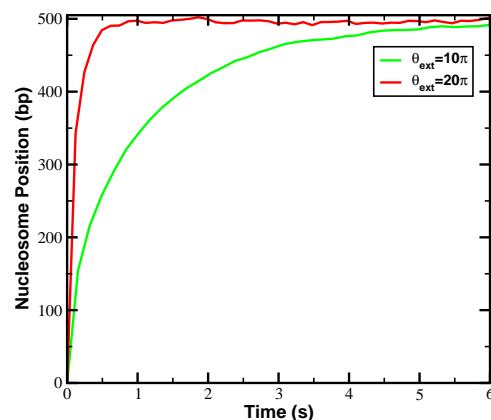
اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن از یک سو به DNA متصل به نوکلئوزوم گشتاور وارد کرده و آن را به اندازه‌ی θ_{ext} می‌چرخانیم. سمت دیگر DNA را ثابت نگه می‌داریم به‌گونه‌ای که پیچش از آن خارج نشود. به این ترتیب انرژی پیچشی ایجاد شده در سیستم باعث جهت‌دار شدن حرکت پخشی نوکلئوزوم می‌گردد. نوکلئوزوم از قسمتی که انرژی بیشتری دارد دور شده، پس از مدتی در وسط DNA به تعادل می‌رسد. حل این مسأله به صورت تحلیلی امکان‌پذیر نیست. به‌همین دلیل آن را به کمک شبیه‌سازی و همچنین به روش عددی بررسی می‌نماییم. برای شبیه‌سازی، سیستم مانند پیش در نظر گرفته می‌شود. گشتاورهای وارد بر نوکلئوزوم از دو طرف همواره با هم برابرند (شرط تعادل جزیی). آهنگ ورود و خروج ذرات با ضریب $\exp(\Delta E / 2k_B T)$ تغییر می‌کند که در آن $k_B T$ انرژی گرمایی و ΔE DNA در اثر ایجاد نقطه‌ی پیچشی مورد نظر است. انرژی پیچشی را می‌توان به شکل

$$\frac{\Delta E}{k_B T} = C \frac{(\Delta \theta)^2}{L} \quad \text{نوشت؛ } C \text{ ثابت کشسانی مؤثر پیچشی DNA (} C \approx 70 \text{ nm} \text{)، } L \text{ طول رشته، و } \Delta \theta \text{ میزان تغییر}$$

پیچش DNA در اثر ایجاد نقطه‌ی پیچشی است. با توجه به این رابطه، انرژی به طول وابسته است. چنانچه طولهای اولیه در دو طرف نابرابر در نظر گرفته شوند، آهنگ ورود و خروج ذرات در چپ و راست نوکلئوزوم با یکدیگر متفاوت خواهند بود؛ نوکلئوزوم از سمت کوتاه‌تر (انرژی بالاتر) دور شده تا جایی که طولها (انرژیها) در دو سو برابر شوند، سپس حول نقطه‌ی تعادلی افت و خیز می‌کند. هرچه انرژی بیشتر باشد، زمان رسیدن به تعادل کمتر است. در شکل (۲)، مکان نوکلئوزوم بر حسب زمان برای دو حالت مختلف با طولهای اولیه یکسان و θ_{ext} ‌های متفاوت رسم شده است. زمان رسیدن به تعادل برای $\theta_{\text{ext}}=20\pi$ در حدود $5/0$ ثانیه و برای $\theta_{\text{ext}}=10\pi$ در حدود 5 ثانیه است.



شکل (۳): نتایج عددی و شبیه‌سازی مکان نوکلئوزوم بر حسب زمان برای $\theta_{ext} = 10\pi$.



شکل (۲): مکان نوکلئوزوم بر حسب زمان در حضور گشتاور خارجی. طول DNA در سمت چپ ۱۰ bp و در سمت راست ۱۰۰ bp است.

سرعت حرکت نیز با نزدیک شدن نوکلئوزوم به وسط DNA کاهش یافته، و در وسط به طور متوسط به صفر می‌رسد. می‌توان آنرا بر حسب زمان بسط داد. این بسط تا مرتبه اول به شکل $V \approx V_0(1-t/\tau)$ می‌باشد که V_0 سرعت اولیه، t زمان، و τ زمان به تعادل رسیدن است. از این رابطه می‌توان زمان به تعادل رسیدن نوکلئوزوم را برای θ_{ext} های مختلف بدست آورد. برای محاسبه V به صورت عددی، از این نکته استفاده می‌کنیم که سرعت نوکلئوزوم ناشی از تفاوت آهنگ تزریق نقيصه از چپ و راست است. پس سرعت را به-

$$\text{صورت } [V = \frac{1(bp)}{2t_{inj}} [\exp(\beta E_{k,r}/2) - \exp(\beta E_{k,l}/2)] \text{ می‌نویسیم؛ } E_{k,r} \text{ و } E_{k,l} \text{ به ترتیب انرژی لازم برای ایجاد نقيصه در راست و چپ است. به این ترتیب، با توجه به اینکه } dX = V \times dt, \text{ می‌توانیم سرعت و در نتیجه مکان نوکلئوزوم را در زمان‌های مختلف بدست آورده و با نتایج شبیه‌سازی مقایسه نماییم، شکل (۳).]$$

نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج ارائه شده در اینجا، می‌توان در آزمایشها با استفاده از انبرک مغناطیسی گشتاور خارجی مناسبی به دو سر DNA وارد کرد و با توجه به حرکت نوکلئوزوم در راستای DNA. درستی سازوکار نقيصه‌ی پیچشی را محک زد. ضمناً نتایج این کار برای توصیف فاصله‌ی تعادلی بین چند نوکلئوزوم مفید است که این کار در دست بررسی می‌باشد.

مرجع‌ها

- [۱] I. M. Kulic and H. Schiessel, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 148103 (2003).
- [۲] H. Schiessel, J. Widom, R. F. Bruinsma, and W. M. Gelbart, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 129902 (2001).
- [۳] N.G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [۴] Daniel T. Gillespie, *J. Phys. Chem.* **81**, 2340 (1977).

دینامیک حرکت سره برای کلوئیدهای کروی شکل باردار

سید نادر رسولی^۱ و رامین گلستانیان^{۲*}

^۱پژوهشکده فیزیک، مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات، تهران

^۲دانشگاه شفیلند، شفیلند، انگلستان

چکیده: حرکت سره (حرکت در اثر وجود گرادیان دما در محیط) برای یک کلوئید کروی شکل باردار بررسی شده است. سعی شده است بر مبنای بررسی دینامیک سیال و یونهای باردار موجود در مجاورت کلوئید مدلی دینامیکی برای رانش کلوئید در حضور گرادیان دما طرح شود. در مرحله بعدی نتایج باست آمده با داده های تجربی موجود مقایسه شده و در مورد تطابق یا عدم تطابق احتمالی بحث شده است.

اعمال گرادیان دما در محلولی که شامل مواد کلوئیدی باردار است، موجب بالارفتمن چگالی کلوئید در ناحیه سرده است یا گرمتر محلول می شود. برای درک این پدیده، دو رویکرد متفاوت ارائه شده است. رویکرد اول بر مبنای مفهوم ترمودینامیکی آتابلی شکل گرفته است (1-3). اما رویکرد دوم به شکلی دینامیکی به مسئله می-پردازد و با حل همزمان معادلات دینامیک سیال، چگالی یونها، و میدان الکتریکی، در پیرامون کلوئید باردار، مکانیسمی تعیینی (deterministic) برای رانش آن در اثر اعمال گرادیان دما (حرکت سره) پیشنهاد میکند (4-7). اخیرا پیشنهادی ارائه شده است که رویکرد اول را به ولگشت تصادفی (stochastic) کلوئید در حضور گرادیان دما مربوط می سازد (8). در صورت پذیرش این پیشنهاد، تصویر کامل تری از حرکت کلوئید با درنظر گرفتن همزمان ولگشت تصادفی و دینامیک تعیینی کلوئید در دسترس خواهد بود. حتی در صورت اثبات نشدن پیشنهاد مذبور، این انتظار که برای توصیف ترمودینامیکی توجیه دینامیکی پیدا شود، انتظار عجیبی نمی باشد.

در این پژوهش، ما با حل همزمان معادلات دینامیکی، سعی در گسترش رویکرد دوم (رویکرد تعیینی) به حرکت سره یک کلوئید کروی شکل باردار داریم. محلول ما از آب و دو نوع یون مثبت و منفی (مربوط به نمک حل شده در آب) تشکیل شده است. بر همین مبنای پتانسیل الکتریکی از معادله پواسون بدست می آید:

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -(4\pi/\epsilon) \sum_i q_i C_i$$

که ϕ پتانسیل الکتریکی، ϵ ضریب دی الکتریک محیط، q_i بار یون نوع i ، و C_i نیز چگالی این یون هستند. برای بررسی حرکت سیال، معادله نویر استوکس و شرط تراکم-تاپذیری سیال ($0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$) را بکار می بریم. از آنجا که ما در جستجوی مکانیسمی دائمی (پایا) برای رانش کلوئید در میدان دما هستیم، و نیز عدد رینولدز برای ذرات کلوئیدی (نانو یا میکرومتری) کوچک است، معادله نویر استوکس به معادله استوکس ساده می شود:

$$(2) \quad 0 = -\vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{V} - \sum_i q_i C_i \vec{\nabla} \phi + \vec{f}_{DE}$$

که p فشار سیال و η وشکسانی آن هستند. \vec{f}_{DE} نیز نیروی دی الکتروفورسیز (Dielectrophoresis) است. این نیرو بخارط قرار گرفتن ملکولهای دوقطبی آب در میدان الکتریکی وابسته به مکان به هر کدام از ملکولها و از آنجا به سیال وارد می شود. بخش تاثیر گذار این نیرو در محاسبات ما جمله ای بصورت $\vec{f}_{DE} = \alpha \frac{\epsilon}{8\pi} |\vec{E}|^2 \vec{\nabla} T / T$ هست

که $\alpha = -\frac{\partial \ln(\varepsilon)}{\partial \ln(T)}$ ، برای آب حدود ۱.۳۵ می‌باشد. دست آخر، برای یافتن چگالی یونها نه از وزن بولتمن، که از معادله پخش (در حالت پایا یعنی $\vec{J}_i = 0$) استفاده می‌کنیم. در اینجا \vec{J}_i , جریان یون نوع i است:

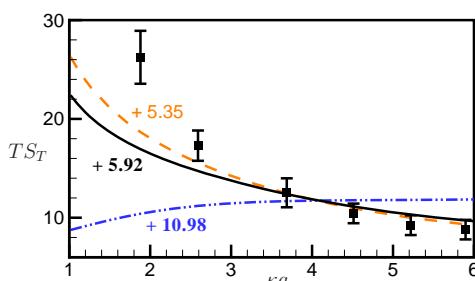
$$\vec{J}_i = -D_i \vec{\nabla} C_i - \mu_i C_i q_i \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} C_i - C_i D_i S_T^{ion} \vec{\nabla} T \quad (3)$$

می‌باشد. D_i و μ_i بترتیب ضرایب پخش و تحرک پذیری (mobility) یون نوع i هستند که با رابطه اینشتین $(D_i = \mu_i K_B T(\vec{x}))$ بهم مربوط می‌شوند. جمله $-C_i D_i S_T^{ion} \vec{\nabla} T$ نیز عاملی است که بر مبنای داده‌های تجربی بصورت پدیده شناختی به معادله جریان اضافه کرده ایم تا معادله جریان را به حالتی با دمای وابسته به مکان $S_T^{ion} \neq 0$ (گسترش دهیم. متغیر S_T^{ion} در این تصحیح به ضریب سره مشهور است) دارای بعد عکس دما بوده و معیاری از حرکت یونها (و در حالت کلی هر ذره دیگر) در حضور گرادیان دما را بدست می‌دهد. حل معادلات بالا مستلزم دانستن پتانسیل الکتریکی در پیرامون کلوئید در غیاب گرادیان دما می‌باشد. اما متساقنه حل تحلیلی برای این پتانسیل، تنها برای کلوئیدهای کم بار موجود است. برای چنین کلوئیدهایی، دستگاه معادلات بالا، در تقریب پاسخ خطی، قابل حل بوده و سرعت رانش کلوئید در گرادیان دما بصورت زیر بدست می‌آید (۷):

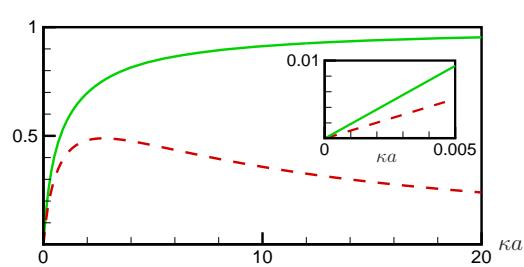
$$\vec{V}_{drift} = -\frac{\varepsilon \varphi_S^2}{48 \pi \eta} \frac{\vec{\nabla} T}{T} [F(\kappa a)(1 + TS_T^{ion} - \alpha) - G(\kappa a) + 2\alpha] \quad (4)$$

که در آن φ_S پتانسیل الکتریکی روی سطح کلوئید، a شعاع کلوئید و $\kappa = \sqrt{8\pi q^2 C / \varepsilon k_B T}$ (عکس طول دیبای-هوکل $\kappa = 1/\lambda_{DH}$) معیاری از چگالی نمک موجود در محلول، C ، می‌باشد. $F(\kappa a)$ و $G(\kappa a)$ نیز بطور دقیق قابل محاسبه هستند. این دوتابع در شکل ۱ رسم شده‌اند.

رابطه بالا را می‌توان با نتایج تجربی مربوط به کلوئیدهای کم بار (۲,۳) مقایسه کرد. متساقنه پیش‌بینی ما حدوداً ۵۰-۶۰ بار کوچکتر از داده‌های آزمایشگاهی است. شاید در نظر گرفتن حرکات کاتوره ای به تطابق بهتری منجر گردد.



شکل ۲- مقایسه پیش‌بینی نظری ما خط پر (مشکی) با داده‌های تجربی (۹). نمودار نقطه-خط چین(آبی) داده‌های ما را بدون اعمال نیروی دی الکتروفورسیز و خط چین(قرمز) بدون در نظر گرفتن اثر سیال بر چگالی یونها نشان می‌دهند.



شکل ۱- $F(\kappa a)$ خط پر (سبز) و $G(\kappa a)$ خط چین (قرمز). شکل داخلی همان دوتابع را برای مقادیر کوچک κa نشان می‌دهد.

برای بررسی بیشتر، برخاگ آزمایش‌های مربوط به کلوبیدهای با بارزیاد می‌رویم^(۹). اما از آنجایی که حل تحلیلی برای چنین کلوبیدهایی امکان پذیر نیست، دستگاه معادلات خود را بصورت عددی حل کرده و نتایج آن را با داده‌های تجربی مقایسه می‌کنیم (شکل ۲). برای بخشی هایی از داده‌های موجود، تطابق قابل قبولی میان داده‌های ما و تجربه وجود دارد. اما هنوز نقاطی وجود دارند که دور از پیش‌بینی های نظری قرار گرفته اند (نقاط مربوط به $\kappa a < 3$) و سعی ما برای اضافه کردن تصحیحات جدیدتر به محاسبات خود (مثلًا، اثرات ناشی از اختلاف ضریب رسانش گرمایی کلوبید با محیط پیرامون آن، و یا اثرات مربوط به لغزش ملکولهای آب بر روی سطح کلوبید) به تطابق بهتر میان نتایج ما و داده‌های آزمایشگاهی منجر نمی‌شود.

برای بدست آوردن درک عمیق‌تری از مکانیسم رانش کلوبید، حل عددی را در دو حالت دیگر نیز تکرار می‌کنیم. در حالت اول، از نیروی دیکتروفورسیز در محاسبات خود صرفنظر می‌کنیم. نتیجه بدست آمده در شکل ۲ نقطه-خط چین (آبی) نشان داده شده است. بنظر می‌آید حتی، رفتار کلی منحنی نیز تغییر می‌کند. این یعنی برغم بعضی کارهای قبلی که در آنها از دیکتروفورسیز صرفنظر شده بود، این عامل غیر قابل صرفنظر کردن می‌باشد. در گام بعدی محاسبات عددی را بدون در نظر گرفتن تاثیر جریان آب بر چگالی یونها تکرار می‌کنیم. نمودار بدست آمده تطابق بهتری با داده‌های تجربی نشان می‌دهد. بنظر می‌رسد، جریان آب یونها را می‌شوید و عملاً موجب تضعیف پدیده می‌شود و بهمین دلیل صرفنظر کردن از آن موجب بدست آوردن نتایج قویتری می‌شود.

نتیجه گیری

هرچند مدل دینامیکی ما در توجیح برخی از داده‌های تجربی تا حدودی موفق است، اما در توجیح برخی دیگر از داده‌ها ضعیف عمل می‌کند. بنظرمی‌رسد، برای یافتن تطابق بهتر باید تصحیح های جدیدی را به این مدل افزود و ممکن است مهمترین این تصحیحات در نظر گرفتن ولگشت تصادفی کلوبید در کنار معادلات تعیینی باشد. این بدان معناست که در تمام معادلات دینامیکی مربوط به حرکت سیال و نیز چگالی یونها عاملی تصادفی را لحاظ کنیم و سپس به حل دوباره دستگاه معادلات پردازیم. کاری که ابدا آسان بنظر نمی‌رسد.

مرجع‌ها

1. B V Derjaguin *et.al.*, Surface Forces (Consultants Bureau (Plenum), New York, 1987)
2. S Duhr and D Braun, *PNAS* **103**, 19678 (2006)
3. Stefan Duhr and Dieter Braun, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 168301 (2006)
4. Eli Ruckenstein, *Jour. Colloid. Interface. Sci.* **83**, 77 (1981)
5. Seyyed Nader Rasuli and R Golestanian, unpublished
6. Seyyed Nader Rasuli and R Golestanian, accepted for 8th international meeting on thermophoresis (2008)
7. Seyyed Nader Rasuli and R Golestanian, submitted to *Phys. Rev. Lett.*
8. R.D. Astumian, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **104**, 3 (2007)
9. Roberto Piazza and R Guarino, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 208302 (2002)

اثر ناکامی بر توپولوژی منظره انرژی شیشه‌های اسپینی

حمید سیدعلائی^۱, حامد سیدعلائی^{۲,۳}, محمد رضا اجتهادی^{۱,۳}

^۱دانشگاه صنعتی شریف

^۲نام دانشگاه شهید بهشتی

^۳نام پژوهشگاه دانشیاری بنیادی

چکیده

یکی از بزارهایی که اخیراً برای مطالعه منظره انرژی سیستمهای فیزیکی توسعه یافته، گراف اتصالات است. این گراف همسایگی کمینه‌های منظره انرژی را به نشان می‌دهد. این روش برای مطالعه سیستمهای مختلفی مانند یک خوشه ذرات با برهمنکش لنارد-جونز یا زنجیره‌های کوتاه پروتئینی به کار رفته است و نشان داده شده است که تابع توزیع درجات گراف حاصل از این سیستمهای یک تابع توزیع توانی است. در این مقاله، ما شیشه‌های اسپینی را از این زاویه مطالعه می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که تابع توزیع درجات در این حالت توانی نیست و رفتاری لوگ-سنرمال دارد. سپس نشان می‌دهیم که علت این تفاوت وجود ناکامی در شیشه‌های اسپینی است و با حذف آن از مدل شیشه‌های اسپینی، تابع توزیع درجات توانی خواهد بود.

مرجع‌ها

1. Phys. Rev. E **77**, 031105 (2008)

پلاسمای غبارآلود دو بعدی در حضور میدان مغناطیسی خارجی

بیژن فرخی، مهران شاهمنصوری

گروه فیزیک دانشگاه اراک

چکیده

تأثیر یک میدان مغناطیسی ثابت بر روی انتشار امواج شبکه غبار در یک بلور پلاسمای غبارآلود قویاً جفت شده شش گوشی، در دو بعد مورد مطالعه قرار گرفته است. در بیانی که برای رابطه پاشندگی بسته آمده دو شاخه فرکانس بالا و فرکانس پایین وجود دارد. نتیجه جفت شادگی مدهای طولی و عرضی در اثر نیروی لورنتسی که روی ذرات غبار تأثیر می‌گذارد، ظهور همین دور شاخه فرکانس بالا و فرکانس پایین است. میدان مغناطیسی خارجی موجب افزایش آهنگ میرایی برای شاخه فرکانس بالا و کاهش آهنگ میرایی شاخه فرکانس پایین می‌شود.

در سالهای اخیر بلورهای پلاسما بطور گسترده‌ای چه از لحاظ نظری و چه تجربی، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.^{۱-۵} ذرات غبار با ابعادی در حدود میکرون، با قرار گرفتن در محیط پلاسما در اثر بمباران الکترونی، تا مقادیر بالایی دارای بار منفی می‌شوند. در صورتی که ذرات غبار بواسطه برهمکنش بین آنها، قویاً با هم جفت شوند امکان پیدایش پیکربندی (حالت) های جدید پلاسما، شامل ساختارهای پلاسمایی غبارآلود شبیه بلوری، وجود خواهد داشت. در آزمایشات تخلیه پلاسما، هنگامی که ذرات غبار در ناحیه غلاف بین دو الکترود به دام می‌افتد امکان ایجاد یک چنین ساختاری وجود دارد. این بلورها از لحاظ ساختار هندسی شامل زنجیرهای یک بعدی، تک لایه های شش گوشی دو بعدی و شبکه های مکعبی سه بعدی می‌باشد. مدهای خطی زیادی تا کنون در شبکه های غبارآلود شناسایی شده است.^{۶-۱۰} فرخی و همکارانش رفتار امواج طولی و عرضی شبکه-غبار را در یک ساختار دو بعدی شش گوشی مورد مطالعه قرار داده اند.^{۱۱} همچنین یوچیدا و همکارانش تأثیر میدان مغناطیسی را بر رابطه پاشندگی موج یک بلور پلاسمای غبارآلود شش گوشی را مورد مطالعه قرار داده اند، که مطالعه شان را برای انتشار در جهت بردار اصلی شبکه محدود کرده اند.^{۱۲} در این مقاله روابط برای یک جهت انتشار کلی نوشته شده و عامل میرایی نیز به حساب آورده شده است. و بطور تحلیلی رابطه پاشندگی در یک بلور پلاسمای غبارآلود دو بعدی، در حضور میدان مغناطیسی خارجی بدست آورده شده است. برای سادگی یک توزیع تک لایه ای از ذرات با ساختار شبکه ای شش گوشی کامل، در نظر گرفته شده است. همچنین در این مدل فرض شده ذرات سرد هستند.

میدان مغناطیسی در یک جهت اختیاری (θ_o, ϕ_o) در نظر گرفته شده است، بنابراین برای آن خواهیم داشت: $B_o = B_o[\hat{x}(\sin \theta_o \cos \phi_o) + \hat{y}(\sin \theta_o \sin \phi_o) + \hat{z}(\cos \theta_o)]$. برای این ساختار از مدل موسوم به مدل ذره-فنر استفاده شده است، که حرکت دو بعدی ذرات را در جهت طولی (امتداد محور x ها، که سمتگیری مربوط به آن با اندیس n نمایش داده می‌شود) و عرضی (امتداد محور y ها، که سمتگیری مربوط به آن با اندیس m نمایش داده می‌شود) میسر می‌کند. شکل ۱ نشان دهنده نزدیکترین شش ذره به هم می‌باشد، که به این طریق با نماد گذاری زیر از هم متمایز می‌شوند $(n-1, m)$, $(n+1, m)$, $(n-1/2, m+\sqrt{3}/2)$, $(n+1/2, m+\sqrt{3}/2)$, $(n-1/2, m-\sqrt{3}/2)$, $(n+1/2, m-\sqrt{3}/2)$. ذره واقع در موقعیت (n, m) را به عنوان ذره مرکزی در نظر می‌گیریم. در این حالت موقعیت ذرات غبار در حالت تعادل عبارت خواهد بود از $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(a/2, \sqrt{3}a/2)$, $(-a/2, -\sqrt{3}a/2)$, $(a/2, -\sqrt{3}a/2)$, $(-a/2, \sqrt{3}a/2)$.

جابجایی ذرات از موقعیت تعادلشان، در جهت x و y را با v_i و u_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) نمایش داده و به این شکل

تعريف می شوند: $\Delta u_4 = u_{n,m} - u_{n-1/2, m+\sqrt{3}/2}$ $\Delta u_3 = u_{n+1/2, m+\sqrt{3}/2} - u_{n,m}$ $\Delta u_2 = u_{n,m} - u_{n-1,m}$ $\Delta u_1 = u_{n+1,m} - u_{n,m}$

$$\Delta v_2 = v_{n,m} - v_{n-1,m} \quad \Delta v_1 = v_{n+1,m} - v_{n,m} \quad \Delta u_6 = u_{n,m} - u_{n-1/2, m+\sqrt{3}/2} \quad \Delta u_5 = u_{n+1/2, m-\sqrt{3}/2} - u_{n,m}$$

$\cdot \Delta v_6 = v_{n,m} - v_{n-1/2, m+\sqrt{3}/2} \quad \Delta v_5 = v_{n,m} - v_{n+1/2, m-\sqrt{3}/2} \quad \Delta v_4 = v_{n-1/2, m+\sqrt{3}/2} - v_{n,m} \quad \Delta v_3 = v_{n+1/2, m+\sqrt{3}/2} - v_{n,m}$ نیروی برهمنکش بین دو ذره واقع شده در فاصله r از هم، از تابع پتانسیل $U(r)$ ، از طریق رابطه $F(r) = -\partial U / \partial r$ بدست می آید.

با بسط انرژی پتانسیل حول موضع تعادلی a ، خواهیم داشت: $U(r) \approx \frac{1}{2} G(r-a)^2$ ، که در آن

$$G = 2 \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o \lambda_D^3} \frac{1 + \kappa + \kappa^2}{\kappa^3} \exp(-\kappa)$$

است. برای انرژی پتانسیل از نوع یوکاوا داریم: $G = (\partial^2 U / \partial r^2)|_{r=a}$ که در آن

$\Delta u_i = a / \lambda_D$ پارامتر شبکه است. بنابراین معادلات خطی شده حرکت با استفاده از تعاریف ارائه شده برای v_i و Δv_i به شکل زیر نوشته می شوند:

$$\left(\frac{\partial^2 u_{nm}}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial u_{nm}}{\partial t} \right) = \bar{G} \omega_o^2 [u_{n+1,m} + u_{n-1,m} - 2u_{n,m} + (u_{n+1/2, m+\sqrt{3}/2} + u_{n-1/2, m+\sqrt{3}/2} \right. \\ \left. + u_{n+1/2, m-\sqrt{3}/2} - u_{n-1/2, m-\sqrt{3}/2} - 4u_{n,m})/4 + \sqrt{3}(v_{n+1/2, m+\sqrt{3}/2} - v_{n-1/2, m+\sqrt{3}/2} \right. \\ \left. + v_{n+1/2, m-\sqrt{3}/2} - v_{n-1/2, m-\sqrt{3}/2})/4] - \omega_c \frac{\partial v_{nm}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 v_{nm}}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial v_{nm}}{\partial t} \right) = \bar{G} \omega_o^2 [\frac{3}{4}(v_{n+1/2, m+\sqrt{3}/2} + v_{n-1/2, m+\sqrt{3}/2} + v_{n+1/2, m-\sqrt{3}/2} \right. \\ \left. + v_{n-1/2, m-\sqrt{3}/2} - 4v_{n,m}) + \frac{\sqrt{3}}{4}(u_{n+1/2, m+\sqrt{3}/2} - u_{n-1/2, m+\sqrt{3}/2} - u_{n+1/2, m-\sqrt{3}/2} \right. \\ \left. + u_{n-1/2, m-\sqrt{3}/2})] + \omega_c \frac{\partial u_{nm}}{\partial t} \quad (2)$$

که در آن $\bar{G} = G4\pi\varepsilon_o \lambda_D^3 / Q^2$ ضریب نرمالیزاسیون، $\omega_o = \sqrt{Q^2 / 4\pi\varepsilon_o \lambda_D^3 M}$ فرکانس مشخصه و فرکانس سیکلوترونی است. امواج می توانند در امتداد یک جهت اختیاری منتشر شوند، بطوریکه برای بردار موج

داریم: $k_y = k \sin \theta$ و $k_x = k \cos \theta$. همچنین تعاریف زیر برای مولفه های جابجایی در نظر گرفته می شود:

$$u_{nm} = u_o e^{-i\omega t} e^{ika(n \cos \theta + m \sin \theta)}, \quad v_{nm} = v_o e^{-i\omega t} e^{ika(n \cos \theta + m \sin \theta)} \quad (3)$$

با قرار دادن تعاریف بالا در روابط ۱ و ۲ دستگاه معادلات زیر بدست خواهد آمد:

$$u_{nm}(\omega^2 + i\nu\omega + A_1) + v_{nm}(A_2 + i\omega\omega_c) = 0 \quad (4)$$

$$u_{nm}(A_2 - i\omega\omega_c) + v_{nm}(\omega^2 + i\nu\omega + A_3) = 0 \quad (5)$$

ضرائب روابط بالا دارای تعاریف زیر هستند:

$$A_1 = \bar{G} \omega_o^2 [2 \cos(ka \cos \theta) + \cos(ka \cos(\theta)/2) \cos(\sqrt{3}ka \sin(\theta)/2) - 3] \quad (6)$$

$$A_2 = -\sqrt{3} \bar{G} \omega_o^2 \sin(ka \cos(\theta)/2) \sin(\sqrt{3}ka \sin(\theta)/2) \quad (7)$$

$$A_3 = 3 \bar{G} \omega_o^2 [\cos(ka \cos(\theta)/2) \cos(\sqrt{3}ka \sin(\theta)/2) - 1] \quad (8)$$

اگر دترمینان ضرائب دستگاه متتشکل از روابط ۶ و ۷ را مساوی با صفر قرار دهیم، خواهیم داشت:

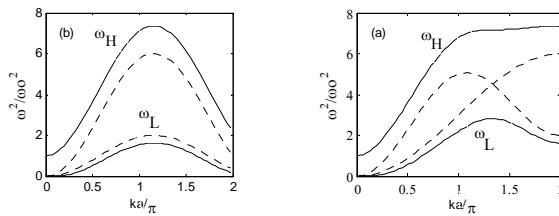
$$(\omega^2 + i\nu\omega + A_1)(\omega^2 + i\nu\omega + A_3) - (A_2^2 + \omega^2 \omega_c^2) = 0 \quad (9)$$

در این مقاله عامل میرایی را شامل اصطکاک گاز خنثی (که مهمتر از بقیه است) در نظر می‌گیریم. بنابراین می‌توان ω را به صورت $\omega \rightarrow \omega + i\omega_o$ تعریف کرد، با این فرض که بخش موهومی ω از بخش حقیقی آن خیلی کوچکتر است. بنابراین رابطه پاشندگی شامل دو شاخه بدست می‌آید، شاخه فرکانس بالا $\omega_H(k)$ و شاخه فرکانس پایین $\omega_L(k)$:

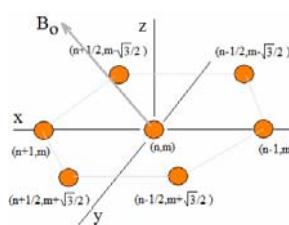
$$\omega_H^2 = -\frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4[A_1A_3 - (A_1 + A_3)(v\omega_i) - A_2^2]}, \quad \omega_L^2 = -\frac{1}{2}D - \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4[A_1A_3 - (A_1 + A_3)(v\omega_i) - A_2^2]}$$

که در آن $D = A_1 + A_3 - 6v\omega_i - v^2 - \omega_c^2$ بوده و بخش موهومی هر شاخه به صورت زیر است:

$$(\omega_i)_H \cong -\frac{V}{2} \left[1 + \frac{\omega_c^2}{\sqrt{(A_1 + A_2 - \omega_c^2)^2 - 4(A_1A_3 - A_2^2)}} \right] (\omega_i)_L \cong -\frac{V}{2} \left[1 - \frac{\omega_c^2}{\sqrt{(A_1 + A_2 - \omega_c^2)^2 - 4(A_1A_3 - A_2^2)}} \right]$$



شکل ۲- نمودار پاشندگی: (a) به ازای $\theta = 0$ و (b) به ازای $\theta = \pi/2$ ، خطوط پیوسته با $\omega/\omega_c = 1.0$ و نقطه چینها با $\omega/\omega_o = 1.0$ متناظر است.



شکل ۱- نزدیکترین شش همسایه در ساختار بلوری شش گوشی

نتیجه گیری

دو مد بدست آمده نتیجه جفت شدگی دو مد طولی و عرضی، بخاطر وجود نیروی لورنتس است. این دو مد فقط در سیستمهای بلور پلاسمایی قویاً جفت شده وجود دارند. این مدها دارای ویژگیهای متفاوتی نسبت به موج غیرعادی در پلاسمای معمولی شامل یون و الکترون (که در جهت عمود بر B_0 منتشر می‌شود)، می‌باشد. همچنین رابطه پاشندگی را در تمام جهات بدست آورده ایم، مشاهده شده است که برای یک مقدار معین از عدد موج و شدت میدان مغناطیسی، مد فرکانس بالا در $\theta = \pi/6$ از مد $\theta = 0$ بزرگتر است، و مد فرکانس پایین در $\theta = 0$ از مد $\theta = \pi/6$ کوچکter است. میدان مغناطیسی خارجی موجب افزایش آهنگ میرایی برای شاخه فرکانس بالا و کاهش آهنگ میرایی شاخه فرکانس پایین می‌شود. مرجع ها

- [1] P. K. Shukla, Physics of Plasmas **8**, 1791 (2001); P. K. Shukla and A. A. Mamun, "Introduction to Dusty Plasma Physics", Institute of Physics, Bristol, 2002.
- [2] G. Morfill, H. M. Thomas and M. Zuzic, "Advances in dusty plasmas", Eds. P. K. Shukla, D. A. Mendis and T. Desai, World Scientific, Singapore (1997).
- [3] H. Thomas, G. E. Morfill, V. Demmel, J. Goree, B. Feuerbacher and D. Mohlmann, Phys. Rev. Lett. **73**, 652 (1994).
- [4] D. Samsonov, S. Zhdanov, and G. Morfill, Phys. Rev. E **71**, 026410 (2005).
- [5] S. Nunomura, J. Goree, S. Hu, X. Wang, A. Bhattacharjee, and K. Avinash, Phys. Rev. Lett. **89**, 035001 (2002).
- [6] S. Nunomura, D. Samsonov and J. Goree, Phys. Rev. Lett. **84**, 5141 (2000).
- [7] W. S. Duan, G. X. Wan, X. Y. Wang and M. M. Lin, Phys. Plasmas **11**, 4408 (2004).
- [8] F. Melandso, Phys. Plasmas **3**, 3890 (1996).
- [9] B. Farokhi, P. K. Shukla, N. L. Tsinsadze, D. D. Tskhakaya, Phys. Lett. A **264**, 318 (1999).
- [10] B. Farokhi, P. K. Shukla, N. L. Tsinsadze, D. D. Tskhakaya, Phys. Plasmas **7**, 874 (2000).
- [11] B. Farokhi, I. Kourakis, and P. K. Shukla, Phys. Lett. A **355**, 122 (2006).
- [12] G. Uchida, U. Konopka, and G. Morfill, Phys. Rev. Lett. **93**, 155002 (2004)

به دست آوردن جرم سیاهچاله ابر پر جرم با بررسی حرکت مرکز جرم ستاره های اطراف آن

عشاق، محمود رضا^۱ اربابی بیدگلی، سپهر^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد فیزیک نظری دانشگاه تربیت مدرس، تهران

^۲ مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات، پژوهشکده نجوم، تهران

چکیده

در این بررسی ۷ ستاره را با شرایط اولیه (مکان و سرعت) تصادفی در نظر گرفتیم و در مبدا مختصات یک سیاهچاله ابر پر جرم (با جرم مشخص) قرار دادیم که آن ۷ ستاره تحت میدان گرانشی این سیاهچاله ابر پر جرم قرار داشتند.

با در نظر گرفتن میدان گرانشی نیوتونی و به وسیله حل عددی معادلات اویلر-لاگرانژ مسیر حرکت این ۷ ستاره را در صفحه قطبی به دست آوردیم.

در ازمان مختلف مکان این ۷ ستاره را تعیین و در هر کدام از این زمانها به وسیله تعریف مرکز جرم چند ذره، مرکز جرم ۷ ستاره را محاسبه کردیم. سپس با مطالعه مکانهای مرکز جرم، در این ۱۰ ازمان مسیر حرکت مرکز جرم را به دست آوردیم. در نهایت با برآذش کردن این مسیر حرکت با مسیر حرکت ذره در اطراف یک جرم در دیدگاه نیوتونی، جرم سیاهچاله ابر پر جرم را با خطای در حدود

$$\frac{\Delta M}{M} = 0.02 \pm 0.003$$

محاسبه نمودیم.

یک فرض حاکم، وجود یک سیاهچاله ابر پر جرم در مرکز کهکشانهای فعال است. راه های مختلفی برای پیدا کردن پارامتر های فیزیکی این اجرام از قبیل جرم، مکان، حرکت آنها و وجود دارد [6-1]. از میان راه های موجود برای پیدا کردن جرم این سیاهچاله های ابر پر جرم مرکزی می توان به موارد زیر اشاره نمود:

۱. به وسیله پراکندگی سرعت (velocity dispersion) ستاره های اطراف سیاهچاله [3]
۲. به وسیله مطالعه نقشه پژواک (Reverberation Map) [4,5]
۳. با استفاده از درخشندگی برآمدگی (Luminosity of Bulge) کهکشانها [1]
۴. با استفاده از میز رآبی (Water Maser) [1]
۵. به وسیله مطالعه مسیر حرکت ستاره های اطراف سیاهچاله مرکزی [6]

مطالعه مسیر حرکت ستاره های اطراف سیاهچاله مرکزی کهکشان راه شیری توسط ۳ گروه، یکی در UCLA به سرپرستی A.Ghez و دیگری در University of Cologne به سرپرستی A.Eckart و دیگری در MPE به سرپرستی R.Genzel انجام می‌پذیرد.

در این مطالعه ۷ ستاره را با مکان و سرعت تصادفی در اطراف یک سیاهچاله مرکزی با جرم ($M = 4 \times 10^6 M_{SUN}$) قرار دادیم. میدان گرانشی را نیوتونی در نظر گرفتیم و لاگرانژی را حساب کردیم [7]

$$L = T - V = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}^2 + G \frac{M}{r}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq} \right) - \frac{dL}{dq} = 0$$

سپس با حل معادلات اویلر-لاگرانژ و بادر نظر گرفتن شرایط اولیه، مسیر حرکت هر ستاره در صفحه قطبی به دست آمد.

در ۰ ازمان مختلف مکان ستاره ها را مشخص کردیم و به وسیله تعریف مرکز جرم در هر زمان، مکان مرکز جرم را به دست آوردیم

$$\vec{R}_{cm} = \sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{m_i}$$

در این قسمت با بررسی حرکت مرکز جرم و با فرض اینکه مکان سیاهچاله در مبدأ مختصات ساکن است روی جرم سیاهچاله ابر پر جرم قید می‌گذاریم.

حالات ۱. فرض می‌کنیم مسیر حرکتی که مرکز جرم طی می‌کند دایره باشد

$$r = \frac{-GmM}{2E}$$

در این حالت با کمینه کردن اختلاف بین شعاع مسیر حرکت با شعاع مسیر دایره‌ای فرضی، نسبت به انرژی و جرم سیاهچاله مرکزی، جرم سیاهچاله مرکزی با خطابی در حدود

$$\frac{\Delta M}{M} = 0.03 \pm 0.005$$

به دست آمد.

حالت ۲. فرض می کنیم مسیر حرکتی که مرکز جرم طی می کند بیضی باشد

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m(GmM)^2}}$$

در این حالت با پیدا کردن خروج از مرکز از روی کمینه و بیشینه شعاع مسیر حرکت مرکز جرم و کمینه کردن اختلاف آن با خروج از مرکز یک بیضی فرضی نسبت به انرژی و جرم سیاهچاله و تکانه زاویه ای، جرم سیاهچاله مرکزی با خطای در حدود

$$\frac{\Delta M}{M} = 0.02 \pm 0.003$$

محاسبه شد.

نتیجه گیری

در این مطالعه روش جدیدی برای به دست آوردن جرم سیاهچاله ابر پر جرم، بر اساس حرکت مرکز جرم ستاره های اطراف سیاهچاله مرکزی، ارائه شد.

مراجع

- [۱] M. Colpi and V. Gorini. and U. Haardt and U. Moschella. *Joint evolution of black holes and galaxies*. Taylor & Francis Group 2006.
- [۲] A. V. Filippenko. BLACK HOLES IN THE MILKY WAY GALAXY .*Proc. Natl. Acad. Sci.*, **96**, 9993-9994, 1999
- [۳] K. Gebhardt, et al. A RELATIONSHIP BETWEEN NUCLEAR BLACK HOLE MASS AND GALAXY VELOCITY DISPERSION. *The Astrophysical Journal*, **539**:L13-L16, 2000.
- [۴] K. Gebhardt, et al. BLACK HOLE MASS ESTIMATES FROM REVERBERATION MAPPING AND FROM SPATIALLY RESOLVED KINEMATICS .*The Astrophysical Journal*, **543**:L5-L8, 2000.
- [۵] B. M. Peterson et al. BLACK HOLE MASSES FROM REVERBERATION MAPPING.*New Astronomy Review*, **50**:796-799, 2006
- [۶] A. M. Ghez , et al. STELLAR ORBITS AROUND THE GALACTIC CENTER BLACK HOLE. *The Astrophysical Journal*, **620**:744-757, 2005.
- [۷] F. Y. H. Wang RELATIVISTIC ORBITS WITH COMPUTER ALGEBRA. *Am. J. Phys* , **72** , 1040-1044, 2004

پاسخ مکانیکی یک پلیمر کشسان در حضور دیواره جاذب

علیی، مریم^۱ نجفی، علی^۲

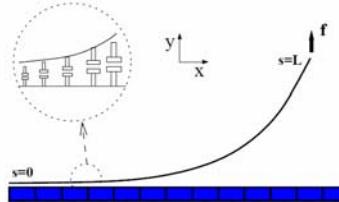
^۱ دانشگاه علوم پایه پیشرفت زنجان

^۲ دانشگاه زنجان

چکیده

در این مقاله به مطالعه رفتار یک رشته پلیمر در کنار یک سطح جاذب پرداخته ایم. با مدل کردن برهم کنش بین رشته و سطح به کمک باندهای دینامیک بین آنها، جدا شدن پلیمر را از سطح وقتی که یک نیروی ثابت به انتهای آن وارد می شود بررسی می کنیم. حالت تعادل پلیمر و یا سرعت متوسط جدا شدن آن از جمله کمیت های مورد مطالعه می باشد.

بررسی رفتار چسبندگی پلیمرهای الاستیک در کنار سطوح جاذب در بسیاری از مسائل مورد توجه قرار می گیرد. مثلاً چسبندگی رشته های اکتین به دیواره سلولی و یا چسبندگی میکروتیوب ها در تقسیم سلولی نقش مهمی در فرایندهای سلولی دارند [۱, ۲, ۳]. مکانیزم های مختلفی برای توجیه چسبندگی ارائه شده است. در یک دیدگاه میکروسکوپی این برهم کنش ها را به باندهای فعالی نسبت می دهند که بین مولکول های سطح و پلیمر برقرار می شوند [۴]. اکنون به کمک روش های آزمایشگاهی مانند AFM بسیاری از خواص این پلیمرها برای نمونه پاسخ این مولکول ها به نیروهای مختلف قابل بررسی است [۵]. در ادامه با معرفی مدل دینامیکی چسبندگی، معادلات حرکت و به دست آوردن توزیع نیروها در امتداد رشته به مطالعه رفتار پلیمر در کنار سطح جاذب پرداخته ایم.



شکل ۱: نمایی از پلیمر در کنار سطح در حالی که باندهایی بین مولکول های سطح و پلیمر می توانند تشکیل شوند.

شکل ۱ نمایی از یک پلیمر را در کنار سطح نشان می دهد. بر هم کنش پلیمر با سطح را می توان به پیوندهایی نسبت داد که بین مونومرهای این رشته و مولکولهای سطح برقرار می شود. رشته را غیر قابل کشیدن با طول ثابت L می گیریم. پارامتر طول در راستای رشته S و هر نقطه از پلیمر در هر زمان با (s,t), R(S,t), مشخص می شود. با توجه به مقیاس طول و زمان مسئله و حرکت پلیمر در محیط ویسکوزی مانند آب، می توان از جمله اینرسی در معادلات حرکت صرف نظر کرد [۶] و آن را بدین شکل نوشت

$$\frac{dR}{dt} = \left(\frac{1}{\kappa} \hat{t} \hat{t} + \frac{1}{\kappa} \hat{n} \hat{n} \right) \left[- \frac{\delta G(s,t)}{\delta R} + F^e(s,t) \right]$$

\hat{t} بردار یکه موضعی مماس بر رشته در هر نقطه و \hat{n} بردار یکه عمود بر آن می باشد. κ و κ_e ضرایب اصطکاک در دو راستای موازی \hat{t} و \hat{n} هستند. F^e نیروی خارجی وارد بر پلیمر در هر نقطه S و در زمان t است که علاوه بر نیروی چسبندگی با سطح می تواند شامل نیروهای خارجی دیگر باشد.تابع G انرژی آزاد الاستیستیه رشته است که

$$G = \frac{\kappa}{2} \int_0^L C^2(s) ds - \int_0^L \Lambda(s,t) [\dot{R}^2(s) - 1]$$

مدول خم شدگی و C انحنای رشته در هر نقطه می باشد Λ ضریب نامعین لاگرانژ است که برای ارضا شدن قید کشش ناپذیری پلیمر وارد تابع انرژی آزاد می شود. مشتق هر کمیت را نسبت به S به اختصار با نقطه نشان می دهیم.

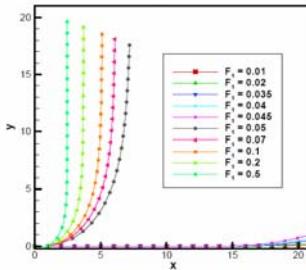
حال به بررسی مدل دینامیکی چسبندگی می‌پردازیم. می‌توان باندهایی بین سطح و پلیمر در نظر گرفت که ماهیت دینامیکی دارند و همواره می‌توانند باز یا بسته شوند. هر باند در صورت بسته بودن نیرویی به پلیمر در محل بسته شده وارد می‌کند که برای راحتی این نیرو را یک نیروی فنر مانند در نظر می‌گیریم ($f_b = k_b y(s)$). اگر $n_b(s, t)$ احتمال بسته بودن باند در هر نقطه و هر زمان را نشان دهد، می‌توان تغییرات آن را با زمان با چنین معادله‌ای توصیف کرد:

$$\frac{dn_b(s, t)}{dt} = \omega_{on} n_u(s, t) - \omega_{off} n_b(s, t) \quad n_b(s, t) + n_u(s, t) = 1$$

$n_u(s, t)$ احتمال باز بودن باند و ω_{on} و ω_{off} نرخ بسته و باز شدن باندها هستند که با توجه به نظریه Kramer بستگی به نیروهای وارد بر مولکول‌ها دارند. در یک مدل ساده می‌توان نرخ بسته شدن باندها را یک کمیت ثابت فرض

$$\omega_{off} = \omega_{off_0} \exp\left(-\frac{f_b \gamma}{k_B T}\right) \quad [4]$$

γ یک مقیاس طول میکروسکوپی و $k_B T$ انرژی گرمایی است. در نهایت می‌توان نیروی چسبندگی وارد بر هر نقطه از پلیمر را این گونه نوشت:



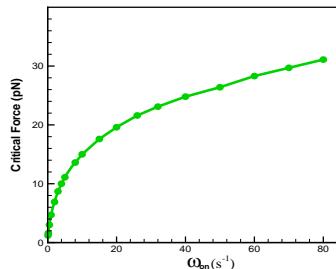
شکل ۲: نمایی از حالت تعادل پلیمر وقتی یک نیروی ثابت به انتهای آن وارد می‌شود

با توجه به ماهیت غیر خطی نیروهای چسبندگی سطح باید از یک مدل گستته برای بررسی این سیستم به کمک حل عددی استفاده کرد. برای این منظور پلیمر را شامل N سایت در نظر می‌گیریم که با باندهایی با طول ثابت a به هم وصل شده‌اند، می‌توان این قید را با قرار دادن فنرهای بسیار سخت بین سایت‌ها تا حد بسیار خوبی برآورده کرد. نیروی الاستیسیته خم شدگی هم با مشتق گیری از انرژی مربوطه نسبت به بردار مکان بدست می‌آید. فرض می‌کنیم یک نیروی ثابت در ابعاد پیکونیون و در راستای \hat{y} در انتهای \hat{x} رشته وارد می‌شود. حال می‌توان به کمک معادله دینامیکی، حرکت هر سایت را دنبال کرد. با در نظر گرفتن مقیاس طولی a و مقیاس زمانی $\frac{a^3}{K\zeta}$ می‌توان به معادلات بدون بعد دست یافت. برای بدون بعد کردن نیرو هم باید از κ/a^2 استفاده کرد.

از حالت افقی شروع می‌کنیم و اجازه می‌دهیم که پلیمر به حالت متعادلی برسد. محاسبات عددی را با مقادیر $N = 300$ ، $a = 1 \mu m$ ، $\kappa = 10^{-22} Nm^2$ ، $\omega_{on} = \omega_{off} = 1 s^{-1}$ ، $T = 300 K$ ، $\gamma = 1 nm$ ، $f_c = 0.01$ و 0.5 در شکل ۲ می‌توان شکل تعادلی رشته را برای نیروهای انتهایی مختلف مشاهده کرد. همان‌طور که از شکل پیداست می‌توان یک مقدار بحرانی در نیروی خارجی مشخص کرد (F_c) که به ازای نیروهای کوچکتر از آن حالت تعادلی سیستم یک پلیمر تقریباً خواهد بود؛ در حالی که برای نیروهای بزرگتر از آن رشته به حالت تعادلی می‌رسد که کاملاً از سطح جدا شده است. مقدار این نیروی بحرانی به پارامترهای میکروسکوپیک مسئله وابسته است. برای نمونه وابستگی نیروی بحرانی به نرخ بسته شدن باندها در شکل ۳ نشان داده شده است. انتظار داریم انرژی چسبندگی در واحد طول

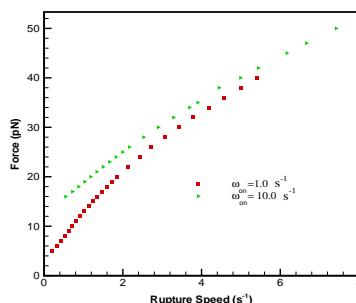
$$f_c^0 = a^{-1} \int_0^\infty k_b y \frac{\omega_{on}}{\omega_{on} + \omega_{off}} dy$$

تشابه خوبی بین آنها دیده می‌شود [۸].



شکل ۳: نمودار نیروی بحرانی بر حسب نرخ بسته شدن باندها.

وقتی نیروی خارجی کمی از مقدار بحرانی بزرگتر می شود رشته با سرعتی غیر صفر شروع به جدا شدن از سطح می کند. در شکل ۴ نمودار بستگی سرعت متوسط کنده شدن نیمی از پلیمر بر حسب نیروهای مختلف در انتهای دو مقدار مختلف نرخ وصل شدن باندها نمایش داده شده است. برای نیروهای نزدیک به نیروی بحرانی رابطه خطی بین سرعت و نیرو مشاهده می شود. به ازای یک نیروی خاص سرعت جدا شدن رشته از سطح برای حالتی که نرخ چسبیدن باندها بیشتر است کوچکتر می باشد و این مطابق انتظار است.



شکل ۴: نیروی انتهای بر حسب سرعت متوسط جدا شدن پلیمر از سطح برای دو نرخ مختلف وصل شدن باندها.

نتیجه گیری

همان طور که دیدیم حالت تعادل یک پلیمر در کنار یک سطح چسبنده وقتی یک نیروی ثابت عمودی به انتهای آن وارد می شود یک رشته کاملاً چسبیده به سطح است اگر این نیرو از یک مقدار بحرانی کوچکتر باشد، در حالی که برای نیروهای بزرگتر از نیروی بحرانی رشته کاملاً از سطح جدا می شود. این نتیجه با مدل تعادلی چسبندگی تطابق دارد [۸]. مقدار نیروی بحرانی به کمیت های میکروسکوپی مانند نرخهای چسبیدن و باز شدن و قدرت باندها بستگی دارد. برای نیروهای کمی بزرگتر از نیروی بحرانی، رشته با سرعتی متناسب با نیرو از سطح جدا می شود.

مراجع

1. G. J. Fleer, M. A. Cohen Stuart, J. M. H. M. Scheutjens, T. Cosgrove and B. Vincent, *Polymer at interfaces*, Chapman and Hall, London (1993).
2. S. Grill, K. Kruse, F. Julicher, *PRL*, **94**, 108104 (2005)
3. J. N. Israelachvili, *Intermolecular and Surface Forces* Academic, New York, 1992.
4. G. I. Bell, *Science*, **200**, 618 (1978).
5. Rief, H. Clausen-Schauman, and H. Gaub, *Nat. Struct.Biol.* **6**, 346 (1999).
6. Taylor G., *Proc. R. Soc. A* **209** 447 (1951)
7. J. Howard, *Mechanics of Motor Proteins and the Cytoskeleton*, Sunderland, Sinauer Associates, (2001)
8. M. Aliee, A. Najaf, *Preprint* (2008)

دینامیک و اجفتهای افق سیاهچاله های کمینه

حسام الدین ارفعی، رضا فارغ بال

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده فیزیک

پژوهشگاه دانشجویی بنیادی

چکیده

با شروع از یک متریک کلی نشان می دهیم که هندسه AdS نزدیک افق سیاهچاله ها نتیجه ای از شرط دو افقی و متناهی بودن کمیتهای نزدیک است. این دو شرط همچنین باعث می شوند که معادلات حرکت در روی افق از بقیه فضا و اجفتهای شوند. با حل این معادلات می توان تمام اطلاعات مربوط به سیاهچاله از جمله آنتروپی را فقط با استفاده از دینامیک افق به دست آورد و نیازی به شناخت رفتار مجانبی میدانها در بینهایت وجود ندارد.

یکی از ویژگیهای سیاهچاله های کمینه (extremal) وجود مکانیزم جاذب (attractor mechanism) برای آنها است [1]. بر طبق این مکانیزم، دینامیک میدانها در نزدیکی افق این سیاهچاله ها از بقیه فضا و اجفتهای می شود. این مکانیزم ابتدا برای سیاهچاله های ابرتقارنی اثبات شده بود اما اخیراً صحت آن برای حالت های غیر ابرتقارنی نیز نشان داده شده است [2]. همزمان با این موضوع روشی به نام تابع آنتروپی (entropy function) بسط داده شد که سهولت زیادی در تعیین محتوای میدانها در نزدیک افق حاصل می کند و مقدار آنتروپی را به دست می دهد [3]. در روش تابع آنتروپی، کمینگی با داشتن هندسه نزدیک افق AdS_2 تعریف می شود. سوالاتی که مطرح می شود این است که اولاً چرا این هندسه در نزدیک افق سیاهچاله ها به وجود می آید و ثانیاً مکانیزم جاذب چه تاثیری در صحت روش تابع آنتروپی دارد. ما به بررسی این موضوع می پردازیم.

مطالعه سیاهچاله های شناخته شده نشان می دهد که کمینگی زمانی اتفاق می افتد که شعاعهای افق های داخلی و خارجی باهم برابر شوند. بنابراین ما از شرط دو افقی (Double-Horizon) به عنوان تعریف کمینگی استفاده می کنیم. این باعث می شود که علاوه بر g^{rr} ، مشتق این مولفه نسبت به r نیز در روی افق صفر شود. حال از یک متریک کلی به صورت

$$ds^2 = -a(r, \theta)dt^2 + \frac{b(r, \theta)}{S(r)}dr^2 + c(r, \theta)d\theta^2 + e(r, \theta)d\varphi^2 + 2f(r, \theta)dtd\varphi \quad (1)$$

استفاده می کنیم که سیاهچاله های کمینه دوار با تقارن محوری را توصیف می کند. شعاع افق ها از $r=0$ به دست می آیند. تکینگی روی افق از نوع ذاتی نیست پس انتظار داریم کمیتهای اسکالری که با متریک ساخته می شوند مانند $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ ، $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ، R ، $\det g$ باعث می شود که مولفه های آن دارای فرمهای خاصی باشند که در نزدیکی افق شکل آن را به صورت

$$ds^2 = A(\Theta) \left(-\rho^2 d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2} \right) + Bd\Theta^2 + C(\Theta) (d\phi + E\rho d\tau)^2 \quad (2)$$

تبديل ميکند که $(\tau, \rho, \Theta, \phi)$ مختصات نزديک افق است. اين متريک که داراي گروه ايزومتری $SO(2,1) \times U(1)$ است نقطه شروع روش تابع آنتروبي برای سياهچاله های دوار است [4]. بحث ما نشان می دهد که موفقیت تابع آنتروبی نتيجه ای از دو-افقی بودن سياهچاله و متناهی بودن کميتها در روی افق است. اکنون میتوان اثر اين دو فرض را بر روی معادلات حرکت در روی افق نيز دنبال کرد. تئوري گرانشی را در نظر ميگيريم که به ميدانهای اسکالر و ميدانهای پیمانه ای آبلی کوپل شده باشد و با کنش زير توصيف شود:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - h_{IJ} \partial_\mu \Phi^I \partial_\nu \Phi^J - w_{ab} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \right) \quad (3)$$

معادلات حرکت ناشی از ورخش ميدانها را می نويسيم و آنها را به روی افق محدود می نمائيم. اينكار با صفر کردن تمام جملات دارای $S(r)$ انجام می گيرد. شرط دو-افقی معادل با صفر کردن تمام جملات دارای $\frac{dS(r)}{dr}$ است. محاسبه نشان می دهد که بعد از اين کار معادلات در روی افق از بقیه فضا واجفتیده می شوند. واجفتیدگی به اين معنا که ديگر هیچ عبارت متناسب با مشتقهای مرتبه بالای r در آنها باقی نمی ماند و میتوان اين بعد را ناديده گرفته معادلات حرکت را در روی افق مستقل حل کرد. حل آنها مقادير لازم برای تعين محتواي ميدانها در نزديک افق را به دست می دهد. بنابراین میتوان گفت که مکانizم جاذب نتيجه ای از دو-افقی بودن سياهچاله و متناهی بودن کميتها در روی افق است [5,6].

References

- [1] S.Ferrara, R. Kallosh and A.strominger, Phys. Rev. D 52,5412 (1995) [arXiv:hep-th/9508072]; A.strominger,Phys Lett.B 383,39 (1996) [arXiv:hep-th/9602111]; S.Ferrara and R.Kallosh, Phys. Rev. D 54, 1514 (1996) [arXiv:hep-th/9602136].
- [2] K. Goldstein, N. Iizuka, R. P. Jena and S. P. Trivedi, Phys. Rev. D 72, 124021 (2005) [arxiv:hep-th/0507096].
- [3] A. Sen, JHEP 0509, 038 (2005) [arXiv:hep-th/0506177].
- [4] D. Astefanesei, K. Goldstein, R. P. Jena, A. Sen and S. P. Trivedi, JHEP 0610, 058 (2006) [arXiv:hep-th/0606244].
- [5] H. Arfaei, R. Fareghbal, JHEP 0701, 060(2007) [arXiv:hep-th/0608222]
- [6] H. Arfaei , R. Fareghbal, submitted to publish in Nuclear Phys B, [arXiv: 0708.240]

یافتن زمان برخورد در دینامیک مولکولی رویدادگرا

ابراهیم فولادوند^۱، محسن یاری فرد^۲

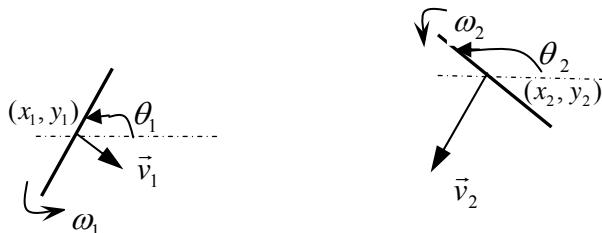
^۱ گروه فیزیک دانشگاه زنجان

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه زنجان

چکیده

برخورد یک میله سخت با میله دیگر در صفحه بررسی می شود. هدف یافتن زمان برخورد میله ها و مختصات نقطه برخورد بحسب شرایط آغازین میله ها می باشد.

دینامیک مولکولی یک دستگاه بس ذره ای با پتانسیل های سخت میان ذره ای مورد علاقه فیزیکدان ها بوده است. برای این دسته از پتانسیل ها از دینامیک مولکولی رویدادگرا استفاده می شود که در آن زمان نزدیک ترین برخورد باید بدست آید [۱ و ۲]. در این نوشه اصول چنین دینامیک مولکولی را برای اجسام میله ای شکل به طول l در دو بعد را توصیف می کنیم [۳]. وضعیت آغازین میله ها را به گونه ای می گیریم که در طول حرکت خود که ترکیبی از حرکتهای ترابری مرکز جرم و گردش به دور مرکز جرم است به یکدیگر برخورد کنند و با استفاده از دو روش زیر زمان و مختصات نقطه برخورد را می یابیم. شرایط آغازین دو میله به صورت زیر فرض می شود: (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به ترتیب مکان مرکز جرم میله ۱ و میله ۲، θ_1 و θ_2 زاویه میله ها با محور x در جهت پاد ساعتگرد، \vec{v}_1 و \vec{v}_2 سرعت خطی مرکز جرم میله ها، ω_1 و ω_2 سرعت زاویه ای گردش به محور z گذرنده از مرکز جرم هر میله می باشند (شکل ۱).



شکل ۱: دو میله با شرایط آغازین دلخواه

نخست به روش اول می پردازیم. در صورتی که میله ها به هم برخورد کنند دو حالت کلی می توان فرض کرد: الف) یکی از سری های میله ۱ به بدن میله ۲ برخورد کند. ب) یکی از سری های میله ۲ به بدن میله ۱ برخورد کند. می انگاریم حالت (الف) روی می دهد، بنابر این در لحظه برخورد مختصات سری از میله ۱ که برخورد می کند در معادله خط میله ۲ ($y = m_2 x + b_2$) نیز صدق خواهد کرد. با توجه به شکل ۱ و اینکه نیروی خالصی به میله ها وارد نمی شود، مختصات نقاط سرهای A و B در لحظه t عبارتند از:

$$x_{1_B^A} = (x_1 + v_{1x}t) \mp \frac{l}{2} \cos(\omega_1 t + \theta_1) \quad y_{1_B^A} = (y_1 + v_{1y}t) \mp \frac{l}{2} \sin(\omega_1 t + \theta_1) \quad (1)$$

برای یافتن عرض از مبدا میله ۲ از این نکته استفاده می کنیم که مختصات مرکز جرم میله ۲ در معادله خط خود میله نیز صدق می کند پس در لحظه t، عرض از مبدا و شیب خط میله ۲ از رابطه های ۲ بدست می آید.

$$m_2 = \tan(\omega_2 + \theta_2) \quad b_2 = y_2 + v_{2y}t - \tan(\omega_2 + \theta_2)(x_2 + v_{2x}t) \quad (2)$$

بنابراین برای یافتن زمان برخورد نقطه A میله ۱ به بدن میله ۲ باید ریشه تابع $f(t)$ که با رابطه ۳ داده می شود یافت.

$$f(t) = y_1 - y_2 + (v_{1y} - v_{2y})t - \tan(\omega_2 + \theta_2)[x_1 - x_2 + (v_{1x} - v_{2x})t] \quad (3)$$

$$-\frac{l}{2} \sin(\omega_1 + \theta_1) + \frac{l}{2} \tan(\omega_2 + \theta_2) \cos(\omega_1 + \theta_1)$$

به نظر می رسد کوچک ترین ریشه مثبت تابع $f(t)$ که با t_{1A}^* نشان می دهیم زمان برخورد سر A میله ۱ به بدن میله ۲ باشد اما چون طول میله ها محدود می باشد باید شرط دیگری را نیز اضافه کرد بدین گونه که نقطه برخورد باید روی خود میله برخوردشونده باشد نه تنها در امتداد آن. برای برآورده شدن این شرط باید فاصله نقطه برخورد تا مرکز جرم میله برخوردشونده کمتر از نصف طول میله باشد. پس زمان برخورد، کوچک ترین ریشه مثبت تابع $f(t)$ که شرط زیر را هم برآورده کند می باشد.

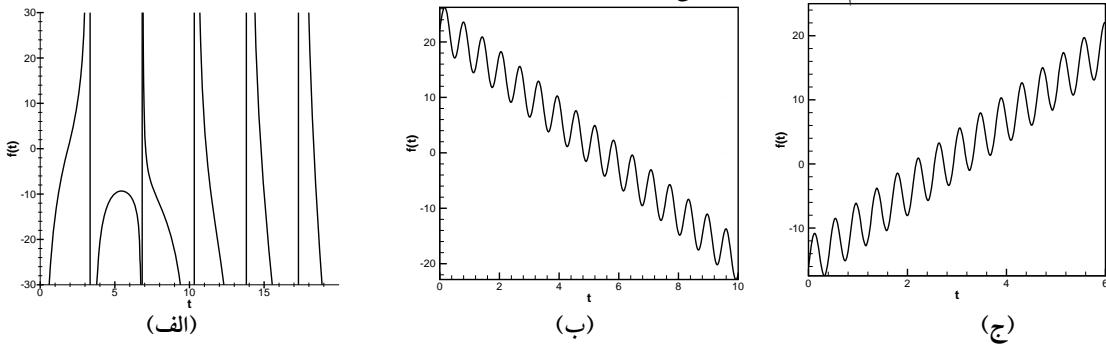
$$\sqrt{(x_2 + v_{2x}t - x_A^*)^2 - (y_2 + v_{2y}t - y_A^*)^2} \leq \frac{l}{2} \quad (4)$$

(x_A^*, y_A^*) مختصات نقطه برخورد سر A میله ۱ به میله ۲ می باشد که از معادلات ۱ در زمان t_{1A}^* بدست می آیند. به همین ترتیب برای سر B میله ۱ نیز می توان زمان t_{1B}^* را بدست آورد. برای حالت (ب) که متناظر با برخورد سرهای میله ۲ به بدن میله ۱ است کافی است جای اندیس های ۱ و ۲ را با هم جابجا کنیم. در نتیجه چهار زمان بدست می آیند که زمان برخورد، کمترین مقدار بین این اعداد می باشند:

$$t^* = \min(t_{1B}^*, t_{1A}^*, t_{2B}^*, t_{2A}^*) \quad (5)$$

توجه داشته باشید که ریشه تابع $f(t)$ را نمی توان به صورت تحلیلی پیدا نمود و باید آن را به صورت عددی یافت.

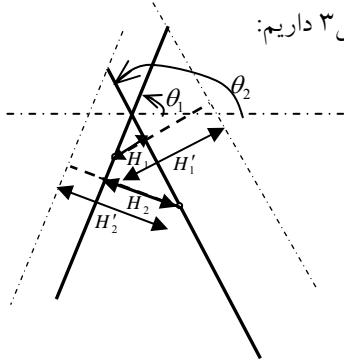
از آنجایی تابع $f(t)$ به خاطر عبارت $\tan(\omega_2 t + \theta_2)$ مجانب هایی با زمان تناوب $\frac{\pi}{\omega_2}$ دارد (شکل ۲-الف). در آغاز به نظر می رسد که می توان از این نکته استفاده نمود و ریشه معادلات را به راحتی پیدا کرد اما چون در بین هر دو مجانب رفتار منظمی وجود ندارد و میان دو مجانب ممکن است یک ریشه یا دو ریشه یا ... و یا حتی ریشه ای وجود نداشته باشد نمی توان از روش نصف کردن و نیوتون رافسون و وتری استفاده نمود و باید از روش مستقیم یعنی محاسبه مقدار تابع در زمان $t_n = n\delta t$ که δt دقت زمان و n عددی درست است استفاده نمود (زمان برخورد بین دو زمان که علامت آن ها با هم متفاوت است می باشد).



شکل ۲: نمودار $f(t)$ در حالت کلی ب وح (الف) حالت ویژه ($\omega_2 = 0$)

حالت ویژه تابع $f(t)$ این است که میله برخوردشونده سرعت زاویه ای نداشته باشد ($\omega_2 = 0$) در این صورت شکل تابع دو حالت کلی خواهد داشت که باز هم باید از روش مستقیم استفاده نمود (شکل ۲-ب وح). اکنون به روش دوم می پردازیم. اساس این روش برپایه همپوشانی فضائی دو میله است. می انگاریم بتوانیم در هر لحظه توسط یک روتین کامپیوتری مشخص کنیم آیا دو میله با هم همپوشانی دارند یا نه؟ از زمان $t = 0$ میله ها را به اندازه δt جابجا می کنیم و این جابجایی را تا زمانی که میله ها همپوشانی نداشته باشند انجام داده و زمان برخورد t^* را در هر مرحله جابجایی به اندازه δt اضافه می کنیم، اگر همپوشانی رخ بدهد زمان را به اندازه δt کم کرده و

میله ها را به اندازه $(-\delta t)$ در زمان برمی گردانیم سپس گام زمانی را به اندازه $\frac{\delta t}{m}$ (که m عددی بزرگتر از یک می باشد) تغییر می دهیم و مراحل بالا را دوباره انجام می دهیم این کار را تا بدست آوردن دقت مورد نظر ادامه می دهیم. شرط همپوشانی دو میله در دو بعد را می توان بصورت زیر بیان کرد. دو میله با مختصات مرکز جرم (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در نظر بگیرید که با محور x زاویه θ_1 و θ_2 می سازند ($\pi < \theta_i \leq 0$) و میله ها را به گونه ای می گزینیم که $\theta_1 > \theta_2$ باشد. با توجه به شکل ۳ داریم:



شکل ۳: همپوشانی دو میله

$$H'_1 = H'_2 = \frac{l}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (6)$$

$$H_1 < \frac{l}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad H_2 < \frac{l}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (7)$$

با بررسی تمام حالت های دیگر در می یابیم که شرط همپوشانی دو میله در دو بعد برقرار شدن همزمان دو شرط در رابطه های ۷ می باشد. پس از یافتن t^* می توان مختصات نقطه برخورد را نیز بدست آورد. با توجه به این که نقطه برخورد در معادله خط هر دو میله باید صدق کند، داریم:

$$y^* = m_1 x^* + b_1 \quad y^* = m_2 x^* + b_2 \quad (8)$$

برای یافتن شیب ها و عرض از مبدأها در لحظه برخورد از رابطه های ۲ در زمان t^* استفاده می کنیم. بنابراین مختصات نقطه برخورد به صورت زیر می باشد:

$$x^* = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \quad y^* = \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{m_1 - m_2} \quad (15)$$

نتیجه گیری

با استفاده از زمان و مختصات نقطه برخورد بدست آمده در این نوشه می توان سرعت خطی مرکز جرم و سرعت زاویه ای هر میله پس از برخورد را با توجه به روابط دینامیکی بدست آورد که در شبیه سازی های دینامیک مولکولی مورد استفاده قرار می گیرد.

مرجع ها

- 1- M.P. Allen and D.J. Tildesley, *Computer Simulation of Liquids*, Oxford (1987).
- 2- D. Frenkel and J.F. Maguire, *Molecular Physics*, Vol. 49, No. 3, 503-541 (1983).
- 3- برخورد کشسان یک میله صلب با یک قرص ثابت؛ مهدیه بیگدلو، محمدابراهیم فولادوند، مهدی نیک عمل، گاما،

بررسی اثر تنگنا فونون و پهن شدگی ناهمگن بر عملکرد لیزر نقطه کوانتومی InGaAs/GaAs خودآراسته

داود قدسی^۱, وحید احمدی^{۲*}, اسفندیار رجائی^۱

^۱دانشگاه گیلان، دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک

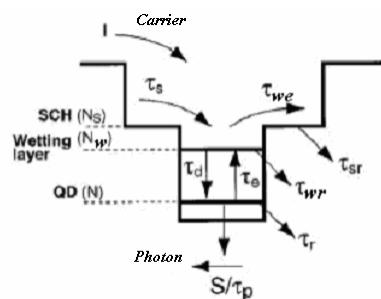
^۲دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده فنی مهندسی، گروه مهندسی الکترونیک

*Corresponding Author; Email: v_ahmadi@modares.ac.ir

چکیده

با در نظر گرفتن پهن شدگی همگن، ناهمگن، بهره غیر خطی، و گریز حرارتی حاملها از نقاط کوانتومی، معادلات آهنگ لیزر نقطه کوانتومی InGaAs/GaAs خودآراسته به روش رانگ-کوتا مرتبه چهار حل و مورد تحلیل قرار می‌گیرد. در این مقاله، نتایج شبیه سازی طیف نور-گسیل لیزر، در زمانهای واهلش متفاوت به نقاط کوانتومی و همجنین اثر پهن شدگی ناهمگن را ارائه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که افزایش زمان واهلش و پهن شدگی ناهمگن، توان خروجی را کاهش و تعداد ماده‌ای لیزری را تعیین می‌دهند.

لیزرهای نیمه‌رسانای نقطه کوانتومی، بدليل جریان آستانه پایین، عملکرد مستقل از دما، بهره نوری بالا، کارایی کوانتومی و سرعت مدولاسیون بالا نسبت به سایر لیزرهای نیمه‌رسانا برتری دارند. این برتری ناشی از تابع چگالی حالات نقاط کوانتومی است که در حالت ایده‌آل به صورت شبه دلتایی است [۱و۲]. در حالت واقعی، چگالی حالت‌های نقاط کوانتومی و در نتیجه ترازهای انرژی آنها به علت اختلاف در اندازه و ترکیب نقاط کوانتومی به طور ناهمگن پهن می‌شوند. همچنین، کمبود فونونهای مورد نیاز برای براورده کردن قانون بقاء انرژی موجب تاخیر واهلش حاملها به ترازهای انرژی مجزای نقاط کوانتومی می‌شود که این پدیده را تنگنا فونون می‌نامند. برای بهبود عملکرد لیزرهای نقطه کوانتومی تحلیل اثر پهن شدگی ناهمگن و تنگنا فونون بر عملکرد لیزر کاملا ضروری است [۳و۴]. با در نظر گرفتن پهن شدگی همگن و ناهمگن بهره اپتیکی کلی، معادلات آهنگ به صورت عددی به روش رانگ-کوتا مرتبه چهار حل می‌شوند. در این مقاله طیف نور-گسیل لیزر نقطه کوانتومی InGaAs/GaAs خود آراسته، شبیه سازی شده و اثرات تنگنا فونون و پهن شدگی ناهمگن بر مشخصه‌های استاتیک عملکرد لیزر نقطه کوانتومی مورد بررسی قرار می‌گیرد. شماتیک ساختار انرژی نوار هدایت لیزر نقطه کوانتومی خودآراسته مورد بررسی، و فرایند واهلش حاملها به حالت پایه نقاط کوانتومی به صورت زیر می‌باشد.



شکل (۱) شماتیک ساختار انرژی نوار هدایت لیزر و فرایند واهلش حاملها به حالت پایه نقاط کوانتومی

فرض می‌کنیم که فقط تک حالت پایه الکترون و حفره مجزا، درون نقاط کوانتمی شکل یافته است. به منظور توصیف برهمنکش بین نقاط کوانتمی با انرژی‌های نوسانی متفاوت از طریق فوتون‌ها، نقاط کوانتمی را با توجه به انرژی گذار میان نواریشان، به $2M+1$ گروه تقسیم می‌کنیم. پهنای هر گروه را فاصله جدایی بین مدهای طولی کاواک در نظر می‌گیریم. M مربوط به مرکزی می‌شود. معادلات آهنگ عملکرد لیزر به صورت زیر بیان می‌شوند

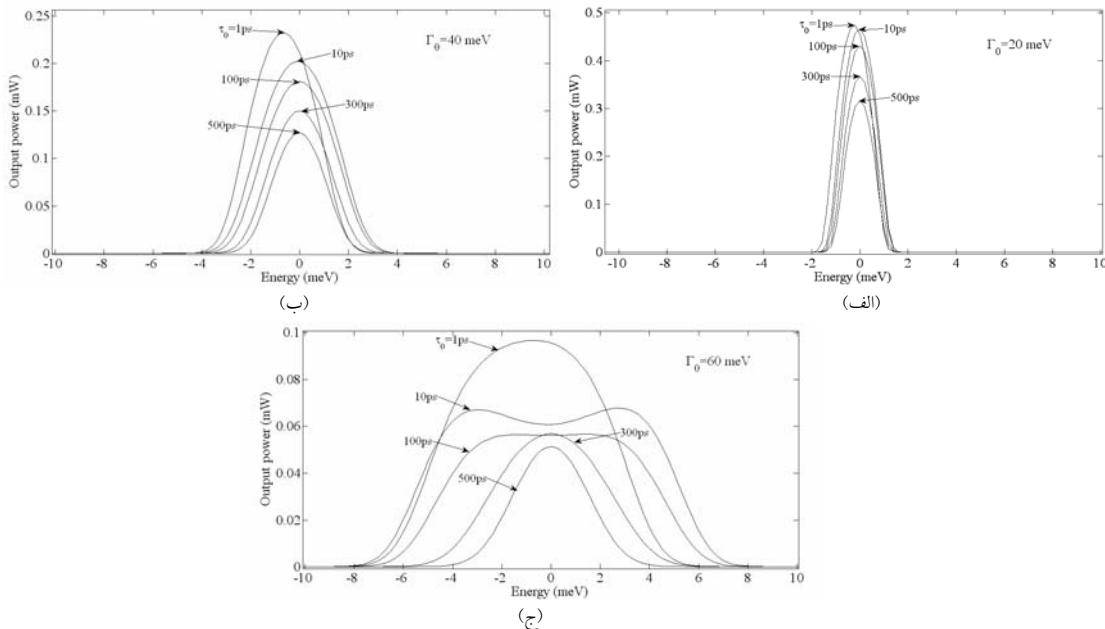
$$dN_s/dt = I/e - N_s/\tau_s - N_s/\tau_{sr} + N_w/\tau_{we} \quad (1)$$

$$dN_w/dt = N_s/\tau_s + \sum_j N_j/\tau_j^{esc} D_g - N_w/\tau_{wr} - N_w/\tau_{we} - N_w/\bar{\tau}_d \quad (2)$$

$$dN_j/dt = N_w G_j/\tau_{dj} - N_j/\tau_r - N_j/\tau_j^{esc} D_g - \frac{c\Gamma}{n_r} \sum_m g_{t_{mj}} S_m \quad (3)$$

$$dS_m/dt = \beta N_j/\tau_r + \frac{c\Gamma}{n_r} \sum_j g_{t_{mj}} S_m - S_m/\tau_p \quad (4)$$

که N_s ، تعداد حامل در لایه ناهمگون مجزای محدود، N_w ، تعداد حامل در لایه وتینگ، N_j ، تعداد حامل در نقاط کوانتمی گروه j ام و S_m ، تعداد فوتون کاواک مد m ام هستند، که $m=1, 2, \dots, 2M+1$ است. ثابت‌های زمانی مربوطه: τ_s ، پخش حامل در لایه ناهمگون مجزای محدود، τ_{sr} ، بازترکیب حامل در لایه ناهمگون مجزای محدود، τ_{we} ، بازبرانگیزش حامل از لایه وتینگ به لایه ناهمگون مجزای محدود، τ_j^{esc} ، گریز حرارتی حامل از نقاط کوانتمی گروه زام به لایه وتینگ، τ_{wr} ، بازترکیب حامل در لایه وتینگ، τ_{dj} ، واهلش حامل به نقاط کوانتمی گروه زام، τ_0 ، واهلش حامل به نقاط کوانتمی وقتی که حالت پایه اشغال نشده است، τ_r ، بازترکیب تابشی در نقاط کوانتمی هستند، b ، کارایی جفت شدگی گسیل خودبخودی به مد لیزری، I ، جریان تزریقی، Γ ، فاکتور محدودیت اپتیکی هستند، D_g ، تبعگی تراز پایه بدون در نظر گرفتن اسپین است. همچنین، $g_{t_{mj}}$ ، بهره اپتیکی کلی که نقطه‌های گروه زام به فوتون‌های مد m ام می‌دهند، است که شامل پهن شدگی همگن و ناهمگن می‌شود. در معادلات فوق اثر بهره غیر خطی و گریز حرارتی حاملها در نظر گرفته شده است. معادلات فوق را به صورت عددی با روش رانگ-کوتا مرتبه چهار حل می‌کنیم و نتایج حاصل را در شکل (۲) ارائه می‌نماییم. شکل (۲)، طیف نور-گسیل شبیه سازی شده را در زمانهای واهلش متفاوت حاملها به نقاط کوانتمی، ps ، برای تمام پهنا در نصف ماکزیمم پهن شدگی ناهمگن $= 20, 40, 60 meV$ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش زمان واهلش، پیک توان کاهش می‌یابد، و از $ps = 10$ به بعد، طیف باریک تر می‌شود که این باریک شدگی با افزایش Γ_0 ، بیشتر می‌گردد. افزایش زمان واهلش، موجب افزایش تعداد حاملهای تجمع کننده در لایه وتینگ می‌شود، این حاملها در لیزردهی سهمی ندارند، لذا (در جریان ثابت) پیک توان کاهش می‌یابد، همچنین، افزایش تعداد حاملهای تجمع کننده در لایه وتینگ موجب کاهش تعداد حاملهای واهلش کننده به نقاط کوانتمی می‌شود در نتیجه تعداد مدهای لیزری و مدهای دارای ماکزیمم توان کاهش یافته و طیف باریک می‌شود. در شکل (۲)(الف)، تابش لیزری با مدهای اندکی انجام می‌شود، که با افزایش Γ_0 ، در شکل (۲)(ب) و (۲)(ج)، تعداد مدها افزایش می‌یابند و طیف پهن می‌گردد،



شکل (۲) طیف نور- گسیل محاسبه شده در زمانهای واهلش $\tau_0 = 1, 10, 100, 300, 500 \text{ ps}$ در (الف) $\Gamma_0 = 60 \text{ meV}$ ، (ب) $\Gamma_0 = 40 \text{ meV}$ ، و (ج) $\Gamma_0 = 20 \text{ meV}$

همچنین، پیک طیف کاهش می‌یابد زیرا با افزایش Γ_0 ، تعداد گروههای نقطه کوانتمی افزایش می‌یابند، گروههای نقطه کوانتمی، حاملهای خود را در چند مد مرکزی تابش می‌کنند که تعداد این مدها با افزایش تعداد گروهها افزایش می‌یابد، لذا افزایش تعداد گروهها موجب افزایش تعداد مدهای لیزری و کاهش توان خروجی می‌شود. در شکل ۲(ج) نسبت $6 = \frac{\Gamma_0}{\hbar \Gamma_{cv}}$ برقرار است که مشابه شکل ۶(c) در مرجع (۱) است لذا شکافتگی طیف توان علاوه بر واbastگی به نسبت فوق به زمان واهلش $\tau_0 = 10 \text{ ps}$ ، نیز بستگی دارد.

نتیجه گیری

معادلات حاکم بر لیزر نقطه کوانتمی InGaAs/GaAs با در نظر گرفتن اثر بهره غیر خطی و گریز حرارتی حاملها مورد تحلیل قرار گرفت. نتایج شبیه سازی نشان می‌دهند که افزایش زمان واهلش به نقاط کوانتمی موجب کاهش توان خروجی و تعداد مدهای لیزر است. با افزایش میزان پهن شدگی ناهمگن، تعداد مدهای لیزری افزایش و توان آنها کاهش می‌یابد.

مرجع ها

۱. M. Sugawara, Phys. Rev. B **61**, 7595 (2000).
۲. M. Sugawara, "Part of the SPIE Conference on Physics and Simulation of optoelectronic devises VI". **3283**, 88 (1998).
۳. M. Sugawara, "Self assembled InGaAs/GaAs Quantum Dots", Academic Press, **60**, (1999).
۴. M. Sugawara, Applied. Phys. **97**, 043523 (2005).
۵. A. Bilenca, IEEE J. Quantum electron. **40**, 6 (2004).
۶. C. L. Tan, *Applied Phys. Lett.* **91**, 061117 (2007).

ناهمسانگردی کمینه‌ی رسانندگی در گرافین دولایه

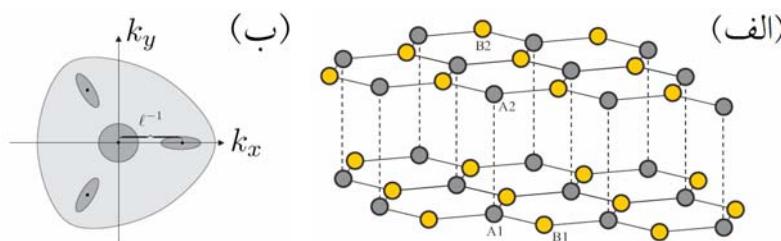
علی قربان‌زاده مقدم، مالک زارعیان

مرکز تحقیقات تکمیلی در علم پایه، زنجان، ایران

چکیده

ما کمینه‌ی رسانندگی یک نوار گرافین دولایه عریض را با در نظر گرفتن اثر تصحیح انحراف مثلثی ساختار نواری بدست می‌آوریم. در انرژی صفر سطح فرمی متشکل از چهار نقطه‌ی دیراک است که سه تای آنها بصورت مثلثی در فاصله‌ی Δk از نقطه‌ی وسط قرار می‌گیرند. نتایج ما نشان می‌دهد که با حضور انحراف مثلثی کمینه‌ی رسانندگی وابسته به زاویه‌ی نسبی الکترودها و محور تقارن شبکه‌ی گرافین (θ) می‌شود و با افزایش طول نوار گرافین بر حسب طول مشخصه متناظر شدت انحراف مثلثی $= 1/\Delta k \approx 15 nm$ زیاد می‌شود. برای اتصالهای با طول کم در مقایسه با θ کمینه‌ی رسانندگی مقدار همسانگرد $= \sigma_{\perp}^{\min} = (8/\pi)e^2/h$ را دارد؛ اما با افزایش طول نوار ناهمسانگرد ظاهر می‌شود. برای نوارهای بلند کمینه‌ی رسانندگی از مقدار $\sigma_{\perp}^{\min} = (3/7)\sigma_{\parallel}^{\min}$ برای $\theta = 0$ با افزایش زاویه‌ی $\theta < 1^\circ$ به مقادر ثابت $\sim 3\sigma_{\perp}^{\min}$ می‌رسد.

اخیراً ساختارهای یک و دو لایه از گرافیت موسوم به گرافین بطور تجربی ساخته شده‌اند [۱]، که ویژگیهای الکترونیکی آنها توجه زیادی را به خود جلب کرده است [۲]. در حالیکه گرافین تکلایه رابطه‌ی پاشندگی خطی و شبکه‌نسبیتی دارد و برانگیختگیها از معادله‌ی دیراک پیروی می‌کنند، در گرافین دولایه رابطه‌ی پاشندگی سه‌می‌شکل است [۲]. اما در هر دو مورد برانگیختگیها کایرال هستند و ساختار نواری یک شبکه‌فلز بدون گاف را توصیف می‌کند. یکی از ویژگیهای ممتاز گرافین وجود رسانندگی غیر صفر در حد چگالی حالت‌های صفر (در نقطه‌ی دیراک) است که از آن بعنوان کمینه‌ی رسانندگی یاد می‌شود. این پدیده نخستین بار در آزمایش نووسلوف و همکاران [۱] گزارش شد و بلافضلله چند کار نظری صورت گرفت که بیشترشان مقدار $\sigma_{\min} = (4/\pi)e^2/h$ بدست آورده‌اند که بهاندازه‌ی یک ضریب π کوچکتر از مقدار تجربی بود [۲]. اما در آزمایشهایی جدیدتر [۳]، نتیجه‌ی محاسبات نظری بدین ترتیب تأیید شده که در یک نوار عریض و کوتاه گرافینی کمینه‌ی رسانندگی به مقدار جهانی $\sigma_{\min} = (4/\pi)e^2/h$ می‌رسد. در گرافین دولایه هم کمینه‌ی رسانندگی از مرتبه‌ی e^2/h مشاهده شده است [۴]. یک اثر مهم در گرافین دولایه تصحیح مثلثی طیف در انرژیهای کم است که طیف الکترونی را از حالت همسانگرد در فضای تکانه خارج می‌کند [۵]. تأثیر انحراف مثلثی در انرژیهای بسیار کم، شدید است و منجر به چهار تکه شدن سطوح همانرژی، موسوم به گذار لیفسیتزر می‌شود. هدف ما در این مقاله مطالعه اثر انحراف مثلثی در کمینه‌ی رسانندگی است [۶].



شکل ۱: (الف) ساختار بلوری گرافین دولایه، (ب) سطوح هم انرژی و گذار لیفسیتزر در انرژیهای کم نقاط دیراک متناظر انرژی صفر با نقطه‌هایی سیاه مشخص شده‌اند.

یک ورق گرافین دولایه در صفحه $y-x$ متشکل از یک نوار غیرآلاییده با طول L و پهنهای W و نواحی با آلایش بالا ($x < 0$) و $x > L$) که الکتروودها روی آنها قرار می‌گیرد، در نظر می‌گیریم. شکل اتمی یک گرافین دولایه در شکل ۱-الف دیده می‌شود. بر مبنای روش تنگابست تهها جهش‌های $A_{l(2)} \rightarrow B_{l(2)}$ ، $A_l \rightarrow A_2$ و $B_l \rightarrow B_2$ را در نظر می‌گیریم که بترتیب با انرژیهای $t \approx 3eV$ ، $t_\perp \approx 0.4eV$ و $t_3 = 0.33eV$ معین می‌شوند. همیلتونی توصیف کننده برانگیختگیهای کمانرژی در پایه‌ی (A_l, B_l, A_2, B_2) که اثر انحراف مثلثی را هم دارد بصورت زیر است (a ثابت شبکه است) [۵].

$$H(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 & \hbar v k_- & t_\perp & 0 \\ \hbar v k_+ & 0 & 0 & \hbar v_3 k_- \\ t_\perp & 0 & 0 & \hbar v k_+ \\ 0 & \hbar v k_+ & \hbar v k_- & 0 \end{pmatrix}, k_\pm = e^{\mp i\theta}(k_x \pm ik_y), \hbar v = (3/2)ta, v_3/v = t_3/t \quad (1)$$

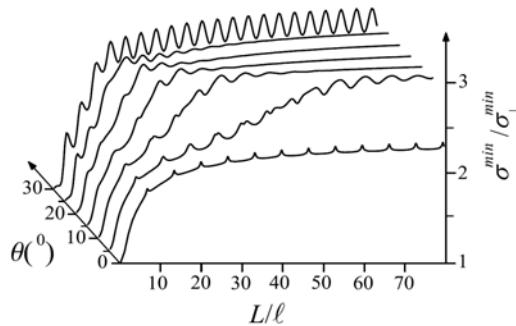
در این همیلتونی θ زاویه‌ی چرخش الکتروودها در صفحه نسبت به محور تقارن شبکه گرافین است. بازی انرژی صفر در هر وادی (valley) چهار مقدار تکانه موسوم به نقاط دیراک خواهیم داشت که نوارهای ظرفیت و هدایت در آنها به هم می‌رسند. یکی از این نقاط $\vec{k} = 0$ است و سه تای دیگر با اندازه‌ی $(t_\perp v_3)/(\hbar v^2) = \Delta k = |\vec{k}|$ و زاویه‌های $\theta, \theta + 2\pi/3, \theta + 4\pi/3$ مشخص می‌شوند. متناظر جدایی نقاط دیراک طول مشخصه‌ی $m = 1/\Delta k \approx 15nm$ را بعنوان بُرد مؤثر پتانسیل پراکننده برای مخلوط کردن حالتها در چهار نقطه‌ی دیراک تعریف می‌کنیم. چون پتانسیل در طول L تغییر می‌کند، بنابراین اگر L در مقایسه با ℓ کوچک باشد، حالت‌های مربوط به چهار نقطه‌ی دیراک کاملاً با هم آمیخته می‌شوند. اما برای $\ell > L$ آنها بطور کامل از هم جدا هستند و مخلوط نمی‌شوند. به این ترتیب وابستگی رسانندگی به طول انتظار می‌رود. از سوی دیگر جهتگیری نقاط دیراک می‌تواند باعث ناهمسانگردی و وابستگی به زاویه شود.

برای بدست آوردن رسانندگی از روش ماتریس پراکنندگی استفاده می‌کنیم. با در نظر گرفتن انرژی صفر و تکانه‌ی عرضی دلخواه k_y در هر ناحیه چهار ویژه‌حالات داریم. در الکتروودها دو حالت راستروند ϕ_\pm^R و دو حالت چپروند ϕ_\pm^L هستند. اما در ناحیه‌ی میانی چهار حالت محوشونده (با تکانه‌ی طولی مختلف) $(m=1, \dots, 4)$ داریم. با در نظر گرفتن الکتروونهای فرودی از الکتروود چپ با اعمال شرط پیوستگی توابع موج در مرزها ($x=0, L$) ضرایب بازتاب و عبور r_\pm^\pm و t_\pm^\pm از نوار گرافینی بدست می‌آید. از روی آنها رسانندگی با رابطه‌ی لانداؤر بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$\sigma = G \frac{L}{W} = G_0 L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} T(k_y), \quad T(k_y) = |t_+^+|^2 + |t_+^-|^2 + |t_-^+|^2 + |t_-^-|^2 \quad (2)$$

که در آن $G_0 = 4e^2/h$ چهار برابر کواتوم رسانش برای در نظر گرفتن تبهگنیهای اسپین و وادی است. نتیجه‌ی حاصل برای رسانندگی بر حسب طول برای چندین زاویه‌ی جهتگیری در شکل ۲ دیده می‌شود. می‌بینید که برای نوارهای کوتاه ($L \ll \ell$) کمینه‌ی رسانندگی همسانگرد و برابر $h/(8\pi)e^2 = \sigma_\perp^{\min}$ است [۷]. با افزایش طول، σ_\perp^{\min} بطور ناهمسانگرد زیاد می‌شود و نهایتاً در حد $\ell \gg L$ رسانندگی از مقدار $(7/3)\sigma_\perp^{\min}$ در $\theta=0$ با تغییر زاویه به اندازه‌ی $\Delta\theta \sim L/\ell$ به مقدار ثابت $3\sigma_\perp^{\min}$ بازی بقیه زاویه‌ها می‌رسد.

این رفتار کمینه‌ی رسانندگی را می‌توان بر حسب رفتار احتمال عبور درک کرد. در انرژی صفر حالت‌های داخل نوار گرافین میانی (جز در نقاط دیراک) بصورت محوشونده هستند، یعنی دامنه‌شان بشكل نمایی $e^{-\kappa L}$ است ($\kappa = |\text{Im } k_x|$) عکس طول نفوذ الکترون داخل نوار است. پس انتظار داریم که احتمال عبور این حالتها با افزایش κL بطور نمایی کم شود. اما بسادگی دیده می‌شود که κ در نقاط دیراک صفر است و با دور شدن از آنها مقدار κ افزایش می‌یابد. از این‌رو احتمال عبور $T(k_y)$ بصورت قله‌ای با پهنهای از مرتبه‌ی L^{-1} حول نقاط دیراک خواهد بود.



شکل ۲ : کمینه‌ی رسانندگی بر حسب طول برای زاویه‌های جهتگیری مختلف. $\sigma_{\perp}^{\min} = (8/\pi)e^2/h$ رسانندگی در غیاب انحراف مثلثی است.

در اتصالهای با طول کم ($L \ll \ell$) پهنای قله‌ها (L^{-1}) بسیار بزرگتر از فاصله‌ی جدایی نقاط دیراک (ℓ^{-1}) است و ازینرو در این حد جدایی نقاط دیراک در تراپر دیده نشده، رسانندگی ناهمسانگرد است. با افزایش طول، رسانندگی زیاد شده و بخاطر جدایی نقاط دیراک، وابستگی به زاویه پیدا می‌کند. این ناهمسانگردی در طولهای نه چندان بزرگ $L > \ell$ در کل بازه‌ی زوایا وجود دارد ولی با افزایش طول بازه‌ی ناهمسانگردی کم می‌شود. در حد $L \gg \ell$ پهنای قله‌های (k_y) بسیار کم شده و قله‌هایی تیز حول تکانه‌ی عرضی متناظر نقاط دیراک داریم. در این حد برای همه‌ی زاویه‌ها جز در نزدیکی $\theta = 0, \pi/6$ سهم چهار نقطه‌ی دیراک در تراپر مستقل می‌شود. با جمع این سهمها ما مقدار ثابت $3\sigma_{\perp}^{\min}$ را بدست می‌آوریم که قبلًا با استفاده از فرمول کوبو بدست آمده است [۸]. اما در نزدیکی زوایای $\theta = 0, \pi/6$ دو نقطه‌ی دیراک دارای k_y یکسان هستند و قله‌های تشیدیدی آنها در (k_y) با هم همپوشانی دارند. بدست می‌آید که برای $\theta = 0$ سهم نقاط دیراک دوگانه‌ی مقابل هم در رسانندگی از مرتبه‌ی $(v_3/v)^2 e^2/h$ می‌شود که قابل اختصاص است. از اینرو تنها دو نقطه‌ی دیگر سهم مؤثری در تراپر دارند که به مقدار رسانندگی $3\sigma_{\perp}^{\min} (7/3)$ منجر می‌گردد. اما برای حالت $\theta = \pi/6$ نتیجه مثلاً حالتی است که چهار نقطه دیراک کاملاً جدایی از هم و مستقل بودند.

نتیجه‌گیری

ما با مطالعه‌ی کمینه‌ی رسانندگی گرافین دولایه، با در نظر گرفتن اثر الکترودها و نیز جدایی مثلثی طیف بدست آورده‌ایم که برخلاف مطالعات پیشین کمینه‌ی رسانندگی ناهمسانگرد و وابسته به طول است. در واقع با تغییر طول گرافین، رسانندگی بین مقادیر حدی $\sigma_{\perp}^{\min} = (8/\pi)e^2/h$ و $3\sigma_{\perp}^{\min}$ تغییر می‌کند. ناهمسانگردی هم که با افزایش طول بازه‌ی زاویه‌ای کوچکتری خواهد داشت دامنه‌ی قابل توجه $3\sigma_{\perp}^{\min} (3/2)$ را دارد که می‌تواند در کاربردها هم مؤثر باشد.

مرجع‌ها

1. K. S. Novoselov *et al.*, Nature **438**, 197 (2005).
2. A. H. Castro Neto *et al.*, arXiv:709.1163 (2007).
3. F. Miao *et al.*, Science **317**, 1530 (2007).
4. S. V. Morozov *et al.*, Phys. Rev. Lett. **100**, 016602 (2008).
5. E. McCann, V. I. Fal'ko, Phys. Rev. Lett. **96**, 086805 (2006).
6. A. G. Moghaddam, M. Zareyan, preprint.
7. I. Snyman and C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. B **75**, 045322 (2007).
8. J. Cserti, A. Csordas, and G. David, Phys. Rev. Lett. **99**, 066802 (2007).

مدلی برای جفت شدگی پیچشی-کششی در مولکول DNA

مریم قربانی^۱ ، فرشید محمد رفیعی^۱

^۱ مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان

چکیده

آزمایش‌های اخیر انجام شده بر روی مولکول B-DNA جفت شدگی مثبتی بین پیچش و کشش در آن برای مقادیر کوچک تغییر شکل نشان داده‌اند. این نتیجه با تصویر ساده‌ای از DNA به صورت یک مارپیچ و آزمایش‌های گذشته در تناظر است. در این مقاله، با ارائه‌ی یک مدل کشسان برای DNA جفت شدگی پیچشی-کششی آن را بررسی می‌کنیم. DNA به صورت یک میله‌ی کشسان با شعاع متغیر مدل می‌شود. در این مدل، جملات جفت شدگی وابسته به شعاع مارپیچ و همچنین تغییرات انرژی پیوند هیدروژنی بین بازها در انرژی کل DNA در نظر گرفته شده است. نشان می‌دهیم که مطابق نتایج آزمایش‌های اخیر، برای مقادیر کوچک تغییر شکل، طول مولکول با افزایش پیچش افزایش می‌یابد.

حالت مارپیچی و خواص تقارنی مارپیچ DNA موجب اضافه شدن جمله‌ای ناشی از جفت شدگی پیچشی-کششی به انرژی کشسانی مولکول می‌شود. برخلاف نتایج تجربی و نظری مختلف گذشته [۱]، نتایج آزمایش‌های اخیر نشان می‌دهند که برای مقادیر کوچک تغییر شکل، بازپیچش مولکول DNA با افزایش طول آن همراه است [۲ و ۳]. کراکوات و همکاران [۳] با استفاده از تکنیک انبرک مغناطیسی، تغییرات نسبی طول DNA کشیده شده (ε) با نیروی ثابت (f) را در اثر تغییر نسبی پیچش (σ) اندازه‌گیری کردند. برای نیروهای بزرگ ($f \geq 10\text{pN}$) که در آن نوسانات گرمایی مولکول قابل صرفنظر کردن است و برای مقادیر کوچک تغییر شکل، شبیب نمودار تغییرات نسبی طول بر حسب تغییرات نسبی پیچش برابر $\frac{d\epsilon}{d\sigma} \Big|_{\sigma=0} \approx 0.12 \pm 0.06$ بددست آمد. این جفت شدگی مثبت تا مقدار

پیچش اضافی $\approx 2.5\%$ ≈ 5 ادامه پیدا می‌کند و از آن به بعد همانطور که انتظار می‌رود با افزایش پیچش طول مولکول کاهش می‌یابد. آنها همچنین اثر نیروی اعمال شده بر مقدار شبیب را بررسی کردند و مشاهده کردند که برای نیروهای کششی بزرگ، مقدار شبیب مستقل از نیروی اعمال شده است. در این مقاله می‌خواهیم با ارائه‌ی یک مدل کشسانی مناسب برای DNA مولکول، نتایج غیرمنتظره اخیر را توضیح دهیم. در این مدل مارپیچ B-DNA به صورت یک میله‌ی کشسان با طول L و شعاع متغیر R در نظر گرفته می‌شود. تغییرات انرژی پیوند هیدروژنی بین بازهای مکمل دو رشته‌ی DNA همچنین در نظر گرفته می‌شود. برای مقادیر کوچک تغییر شکل، انرژی پیوند، E_H ، را می‌توانیم به

صورت یک پتانسیل هماهنگ تقریب بزنیم: $E_H \approx e_m \frac{n}{N_{av}} \left[1 - 24 \frac{(r - r_m)^2}{r_m^2} \right] \approx e_m \frac{n}{N_{av}} + H \left(\frac{R - R_0}{R_0} \right)^2$ ، که

در آن $e_m = -2.8\text{kcal/mol}$ انرژی پیوند در حالت تعادل به ازاء هر مول، n تعداد کل مولهای پیوند، N_{av} عدد آووگادرو، r طول پیوند، $r_m = 0.3\text{nm}$ طول پیوند در حالت تعادل و $H = -24e_m n R_0^2 / (N_{av} r_m^2)$ است. از آنجاییکه پیوندهای کوالانی موجود در ساختار هر یک از بازها نسبتاً قوی هستند تغییرات طول پیوند تقریباً برابر تغییرات شعاع مولکول است. تنها از دو متغیر کرنش برای توصیف تغییر شکل مولکول در اثر اعمال نیرو و گشتاور استفاده می‌شود؛ تغییرات شعاع، $R - R_0 \equiv \eta R_0$ (اندیس صفر نشان‌دهنده‌ی مقدار کمیت در حالت تغییر شکل نیافته است). و تغییرات پیچش بر واحد طول، $\Delta \left(\frac{\theta}{L} \right)$ ، که در آن θ نشان دهنده‌ی پیچش کل مولکول است. برای مقادیر

کوچک کرنش، انرژی مولکول را تا مرتبه‌ی سوم به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$\beta E = \frac{L_0}{2} \left\{ D(R) \Delta \left(\frac{\theta}{L} \right) + C(R) \left[\left(\frac{\theta}{L} \right) \right]^2 + G \left[\left(\frac{\theta}{L} \right) \right]^3 \right\} + \beta H \eta^2 - \beta f (L - L_0) \quad (1)$$

در رابطه‌ی بالا ضریب جمله‌ی مرتبه‌ی اول نسبت به $\Delta \left(\frac{\theta}{L} \right)$ با $D(R)$ نشان داده شده است که در حالت کلی تابع شاع میله است. برای مقادیر کوچک تغییر شاع این ضریب را به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$D(R) \approx D_0 + D_1 \eta + D'_1 \eta^2, \quad (2)$$

که در آن D_0 ، D_1 و D'_1 ثوابت کشسانی هستند. حال از آنجاییکه در غیاب کرنش، نیروی کشسانی در راستای مولکول وجود ندارد $D_0 = 0$ و برای مقادیر کوچک تغییر شاع داریم: $D(R) \approx D_1 \eta$. در واقع ثابت کشسانی D_1 میزان جفت‌شدگی بین دو متغیر کرنش را نشان می‌دهد. ضریب $C(R)$ سختی پیچشی مولکول نامیده می‌شود. از کشسانی کلاسیک می‌دانیم انرژی پیچشی یک میله با سطح مقطع دایروی متناسب با توان چهارم شاع آن است. پس برای مقادیر کوچک تغییر شکل داریم:

$$C(R) = k(R_0 + \delta)^4 \approx kR_0^4(1 + 4\eta) \approx C_0 + C_1 \eta, \quad (3)$$

که در آن $C_0 = 4C_1$ قسمت ثابت سختی پیچشی مولکول می‌باشد. ضریب جمله‌ی مرتبه‌ی سوم نسبت به $\Delta \left(\frac{\theta}{L} \right)$ در انرژی کشسانی با G نشان داده شده است. این جمله در اثر نامتقارن بودن مولکول و خاصیت مارپیچی آن در معادله انرژی وارد شده است و تابعی از سختی پیچشی و پیچش ذاتی مارپیچ، ω_0 ، می‌باشد و داریم $G \approx \alpha C_0 / \omega_0$ که در آن α عددی از مرتبه‌ی واحد است. حال اگر انرژی را بر حسب ϵ ، σ و η بنویسیم و جملات تا مرتبه‌ی سوم را نگه داریم، معادله انرژی به صورت گسترده‌ی زیر بدست خواهد آمد:

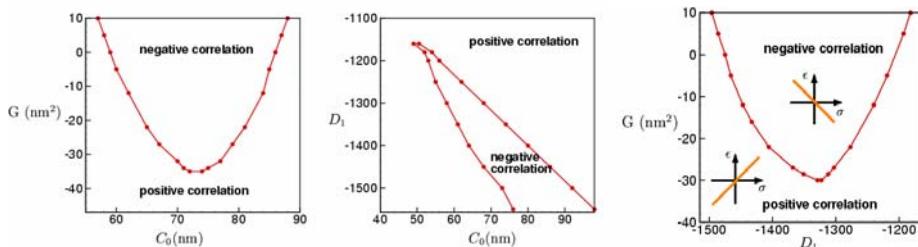
$$\begin{aligned} \beta E = & \frac{L_0 \omega_0^2}{2} [C_0(\epsilon^2 + \sigma^2 - 2\epsilon\sigma) + \frac{D_1}{\omega_0} \eta(\sigma - \epsilon) - C_0(2 + \alpha)\epsilon^3 + \alpha C_0 \sigma^3 + C_0(4 + 3\alpha)\epsilon^2 \sigma \\ & - C_0(3\alpha + 2)\epsilon\sigma^2 + C_1 \sigma^2 \eta + (C_1 + \frac{D_1}{\omega_0})\eta\epsilon^2 - (2C_1 + \frac{D_1}{\omega_0})\epsilon\sigma\eta] - \beta f L_0 \epsilon + \beta H \eta^2 \end{aligned} \quad (4)$$

مشاهده می‌کنیم که با توجه به کرنش‌هایی که انتخاب کرده‌ایم، جملات جفت‌شدگی‌ای بین تغییرات شاع، پیچش و کشش در معادله انرژی وارد شده است. حال انرژی را در f و σ ثابت نسبت به ϵ و η کمینه می‌کنیم. به این ترتیب دو معادله داریم که با حل آنها سه دسته جواب برای (σ, f, η) بدست می‌آوریم. جوابی که معادله انرژی را کمینه می‌کند تغییرات شاع و طول مولکول را در اثر اعمال نیرو و گشتاور به آن نشان می‌دهد.

نتیجه گیری

با بررسی جواب‌ها برای مقادیر مختلف ثوابت کشسانی جفت‌شدگی‌های متفاوتی بین پیچش و کشش در مولکول بدست می‌آوریم که در نمودارهای فاز شکل ۱ نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌کنیم که با تعیین مناسب مقادیر ثوابت کشسانی می‌توانیم جفت‌شدگی مثبت یا منفی بین پیچش و کشش مولکول بدست آوریم. به این ترتیب از این نمودارهای فاز می‌توانیم برای بررسی خواص کشسانی مولکول‌های دیگر، به غیر از B-DNA F-actin استفاده کنیم. با برآذش ثوابت کشسانی به مقادیر $C_0 = 65 \text{ nm}$ ، $D_1 = -1400$ و $G = -24 \text{ nm}^2$ ($\alpha \approx -2/3$) نتایجی بسیار نزدیک به نتایج تجربی بدست می‌آوریم. مشاهده می‌کنیم که مطابق نتایج تجربی برای مقادیر کوچک

تغییر شکل، تا پیچش اضافی $\approx 2.5\%$ با افزایش پیچش افزایش می‌یابد و از آن به بعد بازپیچاندن مولکول باعث کاهش طول آن می‌شود (شکل a).



شکل ۱: نمودارهای فاز برای مقادیر مختلف ثوابت کشسانی. دایره‌های توپر نشان‌دهنده نتایج عددی هستند.

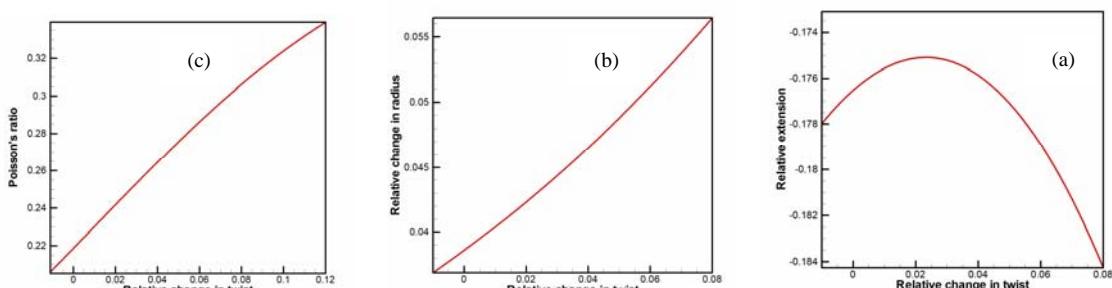
شایان ذکر است که مقدار بدست آمده برای سختی پیچشی در توافق با مقدار گزارش شده برای آن است ($f \geq 20\text{pN}$). همچنین در توافق با نتایج تجربی، برای نیروهای کششی بزرگ ($C_0 < 50\text{nm}$)، مقدار

شیب $\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\Big|_{\sigma=0}$ مستقل از نیروی کششی بدست می‌آید. شعاع مولکول نیز در اثر بازپیچاندن آن افزایش می‌یابد

(شکل ۲b). اما تغییرات شعاع برای مقادیر کوچک تغییر شکل کمتر از حدود 6% است، پس تقریب پتانسیل هماهنگ برای انرژی پیوند هیدروژنی تقریب مناسبی است. همچنین نتایج نشان می‌دهند که در اثر بازپیچاندن مولکول حجم آن

افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر نسبت پواسون $\nu = -\left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)^{-1}$ مولکول در بازه‌ی مورد نظر کوچکتر از $0.5/5$ و

حدوداً بین $0/2$ و $0/3$ بدست می‌آید (شکل ۲c). پس در اثر تغییر شکل، حجم مولکول نیز تغییر می‌کند.



شکل ۲: (a) نمودار تغییرات نسبی طول بر حسب تغییرات نسبی پیچش برای $L_0 = 7.4\text{kbp}$ و $f = 7\text{pN}$. (b) نمودار تغییرات نسبی شعاع بر حسب تغییرات نسبی پیچش. (c) نمودار تغییرات مقدار نسبت پواسون در اثر تغییرات پیچش.

می‌دانیم مارپیچ DNA به صورت یک مارپیچ راستگرد است. نتایج تجربی نشان می‌دهند که DNA در اثر اعمال پیچش اضافی مثبت $\sigma > 0$ (راستگرد) به ازاء مقدار قدر مطلق پیچش اضافی بیشتری نسبت به پیچش اضافی منفی تغییر ساختار می‌دهد. علامت منفی به دست آمده برای α در رابطه‌ی انرژی همچنین نشان می‌دهد که در توافق با نتایج تجربی، پیچاندن مولکول در جهت پیچ آن راحت‌تر از جهت دیگر است. به این ترتیب با ارائه‌ی یک مدل کشسانی ساده توانستیم نتایج آزمایش‌های گذشته و اخیر را با تقریب خوبی بدست آوریم.

مرجع‌ها

1. J. Langowski et al, *J. Mol. Biol.* **299**, 695-709 (2000).
2. C. Bustamante et al, *Nature*, **442**, 836-839 (2006).
3. V. Croquette et al, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 178102 (2006).

بازبینی سرعت فرمی وابسته به قطبش اسپینی شبه ذرات دیراک در گرافین

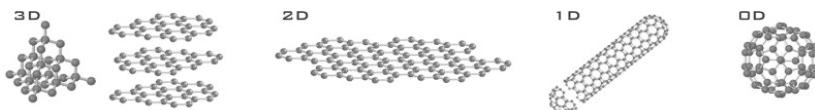
قیومزاده، علی رضا^۱ عسگری، رضا^۲

^۱ مرکز تحقیقات تکمیلی در علوم پایه، زنجان، ایران

^۲ پژوهشکده فیزیک، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ایران

وابستگی سرعت فرمی بازبینی شده به قطبش اسپینی بررسی شده و مشاهده شد که اسپین‌های پایین با سرعت بیشتر و اسپین‌های بالا با سرعت کمتری نسبت به حالت بدون قطبش حرکت می‌کنند که بیان گر وابستگی شدید سرعت فرمی به قطبش اسپینی است. همچنین بررسی وابستگی سرعت فرمی به چگالی الکترونی عدم وجود گذار فاز ویگنر کریستال در گرافین را نشان می‌دهد.

کربن یکی از مهم‌ترین و جالب‌ترین عناصر جدول تناوبی است که به اشکال مختلفی یافت می‌شود، بعضی از آن‌ها از زمان‌های دور شناخته شده بوده مانند الماس و گرافیت هردو^۳ بعدی، برخی در ۲۰-۱۰ سال اخیر کشف شده مانند فولرین صفر بعدی و نانولوله‌های یک بعدی و شکل دو بعدی آن اخیراً بدست آمده است. گرافین، لایه‌ای از گرافیت به ضخامت یک اتم است که اتم‌های کربن آن روی شبکه‌ای لانه‌زنی‌بری شکل (شش ضلعی منتظم) قرار گرفته‌اند.



شکل ۱: ساختار کریستالی اشکال مختلف کربن (از چپ به راست) گرافیت والmas سه بعدی (3D); گرافین دو بعدی (2D); نانولوله‌ی یک بعدی (1D) و باکی با صفر بعدی (0D).

پس از ساخته شدن گرافین پایدار در آزمایشگاه در سال ۲۰۰۴ به خاطر رفتار شگفت‌آور و غیر معمول این سیستم دو بعدی (مانند اثر کوانتومی هال نیمه-صحیح) و کاربردهای عملی فراوان این ماده، تحقیقات گستره‌های بر روی این ماده صورت گرفته است^(۱,۲). این رفتار غیر عادی به رابطه‌ی پاشندگی خطی و در نتیجه پیروی دینامیک الکترون‌ها از معادله‌ی نسبیتی دیراک بدون جرم مربوط می‌شود. در فیزیک ماده‌ی چگال برای بررسی دینامیک الکترون‌ها استفاده از معادله‌ی شرویدینگر که معادله‌ای غیر نسبیتی و بدون در نظر گرفتن اثر اسپین الکترون‌هاست کافی می‌باشد، ولی گرافین ماده‌ای است که برای توصیف آن نیاز به معادله‌ی دیراک که معادله‌ایست برای ذرات نسبیتی با اسپین $\frac{1}{2}$ می‌باشد. از طرفی الکترون‌های برانگیخته در گرافین به صورت ذراتی با جرم صفر رفتار می‌کنند، پس معادله‌ی حاکم بر گرافین همانند معادله‌ی نوترینوی باردار است! به خاطر رابطه‌ی پاشندگی خطی در گرافین سرعت فرمی الکترون‌ها از انرژی آن مستقل است^(۱) ($v_F \approx 10^6 \text{ ms}^{-1}$). در نتیجه گرافین نیمه‌رسانایی بدون گاف انرژی است که ساختار نواری آن در منطقه‌ی بریلوین مخروطی شکل است و نوار رسانش و نوار ظرفیت آن فقط در یک نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند که به این نقطه، نقطه‌ی دیراک می‌گویند که تبعه‌گنی دوگانه دارد. بنابراین وجود دست‌گردی یا کایرالیتی و رفتار پاشندگی خطی الکترون‌های برانگیخته، رفتار الکترونی این دستگاه را متمایز و متفاوت از یک دستگاه گاز الکترونی دو بعدی معمولی می‌کند^(۳,۴).

از آنجا که گازالکترونی معمولی(2DEG) و الکترون‌های دیراک هردو سطح فرمی مدور و همسانگردی دارند از منظر پدیده شناختی مایع الکترونی این دو دارای ساختار یکسانی می‌باشد. اثر شدت برهمکنش در 2DEG معمولی با کاهش چگالی حامل‌ها افزایش می‌یابد. در چگالی‌های کم به خاطر کوچک شدن ضریب بازبهنجارش $Z^{(5)}$ ، سرعت به سمت صفر میل کرده (فاز ویگنر کریستال)، تراکم پذیری بار از مقدار مثبت به منفی تغییر علامت داده و پذیرفتاری اسپینی به شدت افزایش می‌یابد. این نتایج حاصل اثرات متقابل بین برهمکنش‌های تبادلی و همبستگی و نوسان‌های کوانتومی بار و اسپین در 2DEG می‌باشد. در الکترون‌های دیراک گرافین نیز نشان داده شده است که اثرات برهمکنش با کاهش چگالی (هر چند با شدت کمتری نسبت به 2DEG) افزایش می‌یابد ولی ضریب بازبهنجارش افزایش یافته و در نتیجه سرعت به جای کم شدن فزوونی می‌یابد⁽⁶⁾. هم‌چنین تراکم پذیری و پذیرفتاری اسپینی کاهش می‌یابد⁽⁷⁾. این تفاوت‌های کیفی ناشی از برهمکنش‌های تبادلی شبه‌ذرات نزدیک سطح فرمی با الکترون‌های بالانرژی مثبت در نوار رسانش (برهمکنش‌های درون نواری) و هم‌چنین برهمکنش این شبه‌ذرات با حفره‌های موجود در دریای الکترونی با انرژی منفی در نوار ظرفیت (برهمکنش‌های بین نواری) می‌باشد.

در این مقاله وابستگی سرعت فرمی شبه‌ذرات گرافین به قطبش اسپینی بررسی شده که کاربرد گسترده‌ای در اسپیترونیک داشته و به درک بهتری از فیزیک شیوه‌های اسپینی و اندازه‌گیری‌های تجربی اخیر در زمینه‌ی ترابرد اسپینی گرافین می‌انجامد^(9,8).

دستگاهی از الکترون‌های دیراک دوبعدی دست‌گرد(C2DES) که تحت تاثیر پتانسیل کولنی $\frac{e^2}{r}$ با هم برهمکنش می-کنند در نظر گرفته شده است. هامیلتونی C2DES روی صفحه‌ی گرافین به صورت زیر است،

$$\hat{H} = v_F \sum_{k,\alpha} \hat{\Psi}_{k,\alpha}^\dagger [t^3 \otimes \delta.k] \hat{\Psi}_{k,\alpha} + \frac{1}{2A} \sum_{q=0} \mathbf{v}_q (\hat{n}_q \hat{n}_{-q} - \hat{N}) \quad (1)$$

که در آن $v_F = 3ta/2$ سرعت فرمی، t ضریب پرش هامیلتونی تنکبست، a طول شبکه‌ی لانه زنبوری، A مساحت صفحه‌ی گرافین و \hat{N} عمل‌گر تعداد⁽³⁾ ماتریس پاؤلی که روی دو نقطه‌ی تبیگن K و K' اثر کرده و \hat{n}_q ها ماتریس‌های پاؤلی هستند که روی درجه‌ی آزادی شبه اسپینی عمل می‌کنند. وابستگی اسپینی تانسور قطبش پذیری دینامیکی غیر برهمکنشی به صورت زیر است⁽³⁾،

$$\chi_\sigma^{(0)}(q, i\Omega, \mu^\sigma) = -g_v \frac{\mu^\sigma}{2\pi v^2} - g_v \frac{B}{2} + g_v B \operatorname{Re}[\sin^{-1}(C) + C\sqrt{1-C^2}] \quad (2)$$

که $B = q^2/(8\sqrt{\Omega^2 + v^2 q^2})$ تبیگنی دره، μ^σ پتانسیل شیمیایی وابسته به اسپین و $g_v = 2$ است. $C = (2\mu^\sigma + i\Omega)/vq$.

خصوصیات فرمیون‌های دیراک گرافین به ثابت جفت‌شدنگی بی‌بعد $\alpha_{gr} = g_v e^2 / v \epsilon h$ وابسته است. نتایج حاصل برای C2DES بر اساس تقریب فازهای تصادفی و در نظر گرفتن برهمکنش کولنی استار شده دینامیکی (RPA-) (GW) محاسبه شده است که در آن برای خود- انرژی داریم،

$$\Sigma_q^\sigma(k, i\omega_n) = -\frac{1}{\beta} \sum_{q'} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{v_k}{\epsilon(q, \Omega_m, 0)} \times \left[\frac{1 + \exp(i\Omega_m k)}{2} \right] G_q^{0\sigma}(k + q, i\omega_n + i\Omega_m) \quad (3)$$

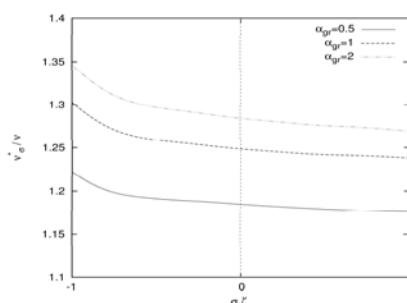
که $s = +$ برای الکترون و $s = -$ برای حفره، $\zeta = |n_1 - n_2|/n$ درجهی قطبش اسپینی، $s(q, i\Omega_m, \zeta)$ تابع دیالکتریک، $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$ فرکانس ماتسوبارای فرمیونی و $\Omega_m = 2m\pi/\beta$ فرکانس ماتسوبارای بوزونی است. پس از جمع روی فرکانس‌ها و تبدیل فرکانس‌های موهومی به حقیقی و استفاده از رهیافت دایسون و مقداری محاسبات فنی، سرعت فرمی بازبینجار شده به صورت زیر در می‌آید،

$$\frac{v_s^2(\alpha_{gr}, \zeta, n)}{v} = \frac{1 + (\nu)^{-1} \partial_k \text{Re} \Sigma_+^{(\text{ret}, \alpha)}(k\omega)_{\omega=0, k=k_F}}{1 - \partial_\omega \text{Re} \Sigma_+^{(\text{ret}, \alpha)}(k\omega)_{\omega=0, k=k_F}} \quad (4)$$

که در آن $k_F^2 = k_F(1 + \sigma Q)^{1/2}$ و تابع دیالکتریک RPA به صورت زیر می‌باشد،

$$s(q, i\Omega, \zeta) = 1 - v_q [\chi_1^{(0)}(q, i\Omega, \zeta) + \chi_1^{(0)}(q, i\Omega, \zeta)] \quad (5)$$

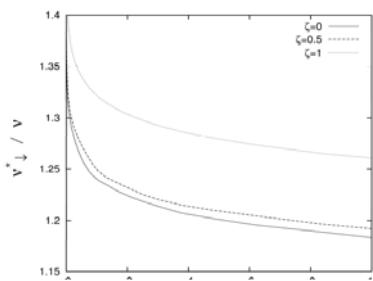
و ضریب بازبینجارش شبهذرات $Z_\sigma^{-1} = 1 - \partial_\omega \text{Re} \Sigma_+^{(\text{ret}, \alpha)}(k, \omega)_{\omega=0, k=k_F}$ است. محاسبات عددی ما نشان می‌دهد که برای اسپین‌های بالا، Z_1 کمی کوچک‌تر و برای اسپین‌های پایین، Z_1 کمی بزرگ‌تر از حالت $Z(\zeta = 0)$ می‌باشد. نتایج عددی سرعت فرمی بازبینجارشده $v_s^2(\alpha_{gr}, \zeta, n)$ برای اسپین‌های بالا و پایین بر حسب قطبش اسپینی ζ ، و برای چندین ثابت جفت‌شدگی مختلف α_{gr} در شکل (۳) رسم شده است. برای اسپین‌های بالا سرعت با افزایش قطبش اسپینی کاهش می‌یابد ولی برای اسپین‌های پایین سرعت با افزایش قطبیدگی اسپینی افزایش می‌یابد که همان‌گونه که در شکل (۳) دیده می‌شود این افزایش سرعت در نزدیکی $\zeta = 0$ سریع‌تر صورت می‌گیرد. این نتیجه با رفتار وابستگی جرم موثر گاز الکترونی دو بعدی معمولی $2DEG$ به قطبش اسپینی متفاوت است^(۱۰). در آنجا نیز جرم اسپین‌های پایین با افزایش ζ ابتدا افزایش یافته ولی در نزدیکی $\zeta = 0$ به صورت سریعی کاهش می‌یابد^(۱۰). وابستگی $v_s^2(\alpha_{gr}, \zeta, n)$ به ζ و α_{gr} در حد $\zeta = 0$ و در حد $\zeta = 1$ کوچک به صورت $\alpha_{gr} \ln \alpha_{gr} + \zeta \alpha_{gr}/2$ می‌باشد. با مقایسه با $2DEG$ مشاهده می‌شود که جمله‌ی وابسته به اسپین در $C2DES$ متفاوت از رفتار $2DEG$ معمولی است که ریشه‌ی - این اختلاف به رابطه‌ی پاشندگی خطی در $C2DES$ بر می‌گردد.



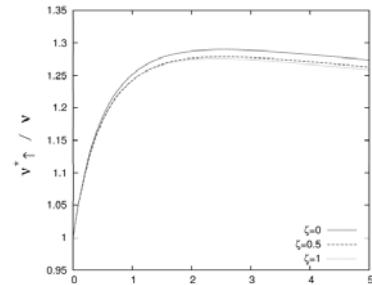
شکل ۳: سرعت بازبینجارشده وابسته به قطبش اسپینی به صورت تابعی از قطبش اسپینی برای $\alpha = 100$.

در شکل‌های (۴) سرعت الکترون‌های بالا به صورت تابعی از ثابت جفت‌شدگی و برای قطبش‌های اسپینی مختلف و برای یک چگالی ثابت رسم شده است. مشاهده می‌شود که سرعت الکترون‌های اسپین پایین نسبت به سرعت الکترون‌های اسپین بالا وابستگی بیشتری به قطبیدگی اسپینی دارد و همچنین الکترون‌های با اسپین پایین سرعت بیشتر و

الکترون‌های با اسپین بالا سرعت کمتری نسبت به سرعت الکترون‌ها در حالت غیر قطبیده اسپینی $O^z = 0$, پیدا می‌کنند. ویژگی‌های مایع الکترونی در گرافین به طور ضعیفی به چگالی حامل‌ها وابسته است که این وابستگی در حد بالای انTEGRAL گیری $\Delta \propto n^{-1/2}$ است. در پایان سرعت اسپین‌های پایین بر حسب چگالی n , در شکل(5) رسم شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود برخلاف $2DEG$ سرعت الکترون‌ها با کاهش چگالی افزایش یافته که بیان‌گر عدم وجود گذار فاز ویگنر کریستال می‌باشد.



شکل ۵: سرعت بازبینجارشده‌ی وابسته به قطبش اسپینی برای الکترون‌های اسپین پایین به صورت تابعی از چگالی (10^{12} cm^{-2}).



شکل ۴: سرعت بازبینجارشده‌ی وابسته به قطبش اسپینی برای الکترون‌های اسپین بالا

مرجع‌ها

1. K. S. Novoselov et al., *Science* **306**, 666 (2004).
2. For more popular review see A. K. Geim and A. H. MacDonald, *Phys. Today* **60**, 35 (2007); A.K. Geim and K. S. Novoselov, *Nature Mat.* **6**, 183 (2007).
3. Y. Barlas, T. Pereg-Barnea, M. Polini, R. Asgari and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 236601 (2007).
4. M. Polini, R. Asgari, G. Borghi, Y. Barlas, T. Pereg-Barnea and A. H. MacDonald, to appear in *Phys. Rev. B (RC)* (2008).
5. R. Asgari and B. Tanatar, *Phys. Rev. B* **74**, 075301 (2006); R. Asgari et al., *Phys. Rev. B* **71**, 045323 (2005)
6. M. Polini, R. Asgari, Y. Barlas, T. Pereg-Barnea and A. H. MacDonald, *Solid State Commun.* **143**, 58 (2007).
7. R. Asgari, M. M. Vazifeh, M. R. Ramezanali, E. Davoudi and B. Tanatar, to appear in *Phys. Rev. B* (2008).
8. L. Brey, H.A. Fertig, *Phys. Rev. B* **76**, 205435 (2007).
9. E. W. Hill, A. K. Geim, K. Novoselov, *IEEE Trans. Magn.* **42**, 2694 (2006); A. Gruneis et al., *Phys. Rev. Lett.* **100**, 037601 (2008); Sungjae Cho, Yung Chen, Michael S. Fuhrer, *Appl. Phys. Lett.* **91**, 123105 (2007).
10. Ying Zhang, S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 256603 (2005).

حل تحلیلی معادله برگرز به همراه نیروی وابسته به زمان

۱ زهره کلدایی و امیرعلی مسعودی^۱
دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی - واحد ورامین - پیشوای

۲ آموزشکده عالی سما - واحد ورامین^۲

۳ دانشکده علوم پایه، دانشگاه تهران شمال^۳

۴ دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا^۴

چکیده:

دراین مقاله با دروروش، به حل تحلیلی معادله برگرز به همراه نیروی وابسته به زمان پرداخته می شود.

۱- مقدمه

معادله برگرز $v\nabla^2 u + u \cdot \nabla u + \partial_t u = 0$ به توصیف بعضی از پدیده های مرتبط با امواج غیرخطی می پردازد که درنظریه انتشار موج اکوستیک و فیزیک پلاسمای کاربرد دارد. معادله برگرز شارش را توصیف می کند که در زمان و مکان با میدان سرعت بدون تاو و ووشکسانی $0 < v < \infty$ مشخص می شود. وهیچ کمیت دیگری مانند فشار و چگالی در معادله دینامیکی این شاره ظاهر نمی شود.

معادله برگرز چه در حالت خاص آن و چه در حالت عام در مبحث معادلات غیرخطی به عنوان الگوی معادلات شبه خطی از اهمیت زیادی برخوردار است و بخش وسیعی از کتب مربوط به معادلات غیرخطی به این معادله اختصاص یافته و آن را به روش های مختلف حل کرده اند. ما نیز دراین مقاله حل تحلیلی کاملی را برای معادله برگرز به همراه نیروی وابسته به زمان ارائه کرده ایم. برای این کار از دو روش، یکی که در مروروش (Time-Space transformation) و دیگری روشی که ما پیشنهاد کرده ایم استفاده شده است. در مروروش، به یک خطی شامل معادله پخش به همراه یک جمله مرجع تبدیل می شود که این خود یک معادله شرودینگر با پتانسیل وابسته به زمان و مکان است. سپس با استفاده از تبدیلات متعدد تابع و متغیر وابسته به مکان و زمان به معادله پخش خواهیم رسید. در مروروش دوم که ما پیشنهاد کرده ایم ابتدا معادله برگرز غیرهمگن به معادله برگرز به همگن تبدیل می شود. سپس با استفاده از تبدیل خاص معادله برگرز به همگن به معادله پخش تبدیل خواهد شد.

۲- حل تحلیلی معادله برگرز به همراه یک نیروی وابسته به زمان:

معادله برگرز به همراه یک نیروی وابسته به زمان در یک بعد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \partial_x u &= v \partial_{xx} u + f(t) \\ u(x,0) &= \varphi(x) \end{aligned} \quad (1)$$

یکی از مهم ترین کاربردهای معادله برگرز این است که تحت تبدیل $h' = -\partial_x u$ به معادله مهم شناخته شده kpz تبدیل می شود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\partial_t h' = v \partial_{xx} h' + \frac{1}{2} (\partial_x h')^2 - f(t)x \quad (2)$$

با یک نگاشت دیگر به صورت:

$$h'(x,t) = 2vL\phi(x,t) \quad (3)$$

معادله به یک معادله خطی روی ϕ به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\partial_t \phi = v \partial_{xx} \phi + G(x, t) \phi \quad (4)$$

که این معادله شرودینگر در زمان مجازی برای ذره ای است که در یک پتانسیل وابسته به زمان $G(x, t)$ حرکت می کند. $G(x, t)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$G(x, t) = -\frac{f(t)x}{2v} + C(t) \quad (5)$$

که در اینجا $C(t)$ یکتابع وابسته به زمان اختیاری است. معادله (4) به ما اجازه می دهد تا روش TST را مبتنی بر تغییر متغیرهای متعدد به کاربریم. بر طبق این روش ما $\phi(x, t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\phi(x, t) = p(x, t) e^{h(x, t)} \quad (6)$$

که در اینجا $h(x, t)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$h(x, t) = a_1(t)x + a_2(t)$$

تبدیل (6) را در معادله (4) جایگزین می کنیم و پس از کمی ساده سازی به رابطه زیر میرسیم

$$\begin{aligned} \partial_t p &= v \partial_{xx} p + 2v(\partial_x h)(\partial_x p) + \\ &\quad [v \partial_{xx} h + v(\partial_x h)^2 + G(x, t) - \partial_t h] p \end{aligned} \quad (7)$$

عبارت داخل کروشه یک نوع معادله kPz است که همه جملات آن به یک طرف تساوی آورده شده اند و طرف دوم تساوی برابر صفر است. پس ضریب p مساوی صفر است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$v \partial_{xx} h + v(\partial_x h)^2 + G(x, t) - \partial_t h = 0 \quad (8)$$

اکنون $h(x, t)$ را که در رابطه بالاتعریف کردیم در معادله (8) جایگزین می کنیم . و پس از کمی ساده سازی خواهیم داشت که :

$$va_1^2 + C(t) - \dot{a}_2(t) - x \left[\frac{f(t)}{2v} + \dot{a}_1 \right] = 0 \quad (9)$$

در رابطه (9) یک چند جمله ای درجه اول بر حسب x بوجود آمده که این چند جمله ای به ازای تمام ضرائب مساوی صفر است.

$$va_1^2 + C(t) - \dot{a}_2 = 0 \quad (10-\text{الف})$$

$$\frac{f(t)}{2v} + \dot{a}_1 = 0 \quad (10-\text{ب})$$

$$a_1(t) = -\frac{1}{2v} \int_0^t f(t') dt' \quad (11)$$

پس از صفر قراردادن ضریب p معادله (7) به صورت زیر در می آید:

$$\partial_t p = v \partial_{xx} p + 2v \partial_x h \partial_x p \quad (12)$$

ما اکنون تغییر متغیرهای زیر را به کار می بریم:

$$\begin{cases} y = x + q(t) \\ t' = t \end{cases} \quad (13)$$

هر یک از جملات معادله (12) تحت این تبدیلات تغییر می کنند در نتیجه معادله (12) به صورت زیر در می آید:

$$\partial_{t'} p = v \partial_{yy} p + \partial_y p [2va_1 - \dot{q}] \quad (14)$$

برطبق روش TST ما ضریب $\partial_y p$ را مساوی صفر قرارمی دهیم.

$$2va_1 - \dot{q} = 0 \quad (15)$$

ما قبلاً a_1 را به دست آوردیم آن را در معادله (15) جایگزین می کنیم و q را به دست می آوریم.

$$q(t) = - \int_0^t \int_0^{t'} f(t) dt' dt \quad (16)$$

معادله (14) پس از حذف ضریب $\partial_y p$ به صورت زیر درمی آید:

$$\partial_{t'} p = v \partial_{yy} p \quad (17)$$

رابطه (17) یک معادله پخش است. در واقع ما توانستیم معادله برگز غیرهمگن را به معادله پخش تبدیل کنیم که حل آن با توجه به شرایط اولیه بسیار ساده می باشد. اکنون به روش دیگری که خودمان پیشنهاد داده ایم معادله برگز به همراه یک نیروی وابسته به زمان را حل می کنیم. و درنهایت ما مجدداً به معادله پخش خواهیم رسید. در این روش ابتدا ما سرعت جدیدی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u(x, t) = V(x, t) + \alpha(t) \quad (18)$$

در رابطه (18) $\alpha(t)$ یکتابع وابسته به زمان است. که بعداً مشخص می شود.

رابطه (18) را در معادله (1) جایگزین می کنیم و پس از کمی ساده سازی به نتیجه زیر می رسیم:

$$[\dot{\alpha} - f(t)] + \partial_t V + V \partial_x V + \alpha \partial_x V - v \partial_{xx} V = 0 \quad (19)$$

برطبق این روش، ما جملاتی را که فقط وابسته به زمان هستند را مساوی صفر قرارمی دهیم.

$$\dot{\alpha} - f(t) = 0 \quad (20)$$

از رابطه (20) نتیجه می گیریم که :

$$\alpha(t) = \int_0^t f(t') dt' \quad (21)$$

پس از حذف جملاتی که فقط وابسته به زمان هستند رابطه (19) به صورت زیر می آید:

$$\partial_t V + V \partial_x V + \alpha \partial_x V - v \partial_{xx} V = 0 \quad (22)$$

اکنون تغییر متغیرهای زیر را به کار می بریم:

$$\begin{cases} y = x + q(t) \\ t' = t \end{cases} \quad (23)$$

با استفاده از رابطه (23) هر یک از جملات رابطه (22) تغییر می یابند در نتیجه با کمی ساده سازی خواهیم داشت که :

$$\partial_{t'} V + \partial_y V(\dot{q} + \alpha) + V \partial_y V - v \partial_{yy} V = 0 \quad (24)$$

پس از حذف ضریب $\partial_y V$ خواهیم داشت:

$$\dot{q} + \alpha = 0 \rightarrow q(t) = - \int_0^t \int_0^{t'} f(t') dt' dt \quad (25)$$

در رابطه (25) به جای $\alpha(t)$ از رابطه (21) معادلش را قرارداده ایم. رابطه (24) پس از حذف ضریب V به

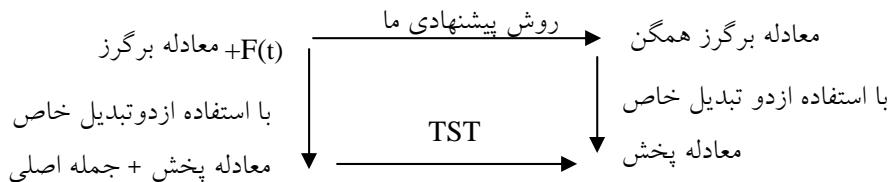
صورت زیر ساده می شود

$$\partial_{t'} V + V \partial_y V = v \partial_{yy} V \quad (26)$$

معادله (۲۶) معادله برگز همگن حاکم برسرعت جدید $V(x, t)$ است. درنهایت با به کاربردن دو تبدیل زیر به صورت $V = \frac{-\partial h'}{\partial y}$ و $h' = 2v \ln p$ به معادله پخش می رسمیم با کمی محاسبات ساده خواهیم داشت:

$$\partial_t p = v \partial_{yy} p \quad (27)$$

بنابراین ما با استفاده از دوروش TST و روش پیشنهادی خودمان به یک نتیجه مشابه یعنی معادله پخش رسیدیم. بنابراین بین روش TST و روش پیشنهادی ما یک هم ارزی وجود دارد که دیاگرام این هم ارزی بصورت زیراست:



۳-نتیجه گیری:

ما روش حل تحلیلی کاملی را برای معادله برگز به همراه نیروی وابسته به زمان ارائه کرده ایم. برای حل ازدو روش (TST) و دیگری (روش پیشنهادی ما) استفاده کرده ایم. و در هر دو روش به یک نتیجه مشابه یعنی معادله پخش رسیده ایم. در اینجا یک نکته وجود دارد و آن این است که ما نمی توانیم از این روش ها برای حل معادله برگز به همراه نیروهای با درجات بالاتر از X استفاده نماییم چرا که تبدیل $y=r(t)x+q(t)$ حذف جملات مناسب با X را معرفی می کند. و این تبدیل بدون اثراست اگر نیروهایی با درجات بالاتر از X ظاهر شوند همچنین هرچقدر درجات X بالاتر رود کار مشکل ترمی شود چرا که تعداد متغیرهای معرفی شده افزایش می یابند و در آن صورت تحلیل آنها مشکل می شود.

مراجع :

1.M. FENG, *Phys. Rev. A*, **64**, 034101 (2001), and references there in.

SU(2) در فضای فازی

هایی کمایی مقدم

(بر اساس کار مشترک با محمد خرمی و امیرحسین فتحالله)

دانشگاه الزهرا

چکیده

ساختار دامنه‌ی گذار نظریه میدان در فضای سه بعدی که مختصه‌های ناجابه‌جایی‌اش در جبر لی صدق می‌کنند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. دیله می‌شود که این مدل و اگرایی فرابتمنش ندارد. رفتار تابع توزیع دلتای متناظر با قانون پایستگی معرفی می‌شود. مثال‌هایی از محاسبه‌ی دامنه در این فضا با در نظر گرفتن میدان اسکالر در پایین‌ترین رتبه‌ی اختلال ارائه می‌شود.

یکی از راه‌های گسترش مطالعه‌ی فضاهای ناجابه‌جایی، در نظرگرفتن حالتی است که جابه‌جاگر مختصه‌ها ثابت نباشد. در ساده‌ترین حالت جابه‌جاگر تابع خطی از مختصه‌ها است. مثال جالب از این نوع مدلی است که در آن عملگرهای مکان رابطه‌ی جابه‌جایی جبر لی را برآورده کنند. جبر (2) $SU(2)$ یا (3) $SO(3)$ مثال‌هایی از این نوع هستند. کره‌ی فازی حالت خاصی از این مورد است که نمایش کاهش‌ناپذیر عملگرهای مکان به کار برد می‌شود و کاسیمیر جبر متناسب با عملگر واحد است (به همین دلیل مثل کره است).

در این کار نمایش منظم گروه که شامل تمام نمایش‌های آن است در نظر گرفته می‌شود. از این‌رو، برخلاف مثال کره، با یک فضای سه بعدی با حجم نامحدود سروکار داریم. فضای تکانه‌ی متناظر، به عنوان مختصات گروه، فضای معمولی (جابه‌جایی) است. این فضا فشرده است اگر و تنها اگر گروه فشرده باشد. نظریه میدان بنا شده در چنین فضایی از هر واگرایی فرابتمنش آزاد است. در نتیجه نظریه از پدیده‌ی مخلوط‌شدگی فرابتمنش/فروسرخ (mixing UV/IR)، که در ناجابه‌جایی کانونیک با آن مواجه هستیم، آزاد است. در این جا هدف بررسی ساختار دامنه‌ی گذار برای نظریه‌ی میدان اسکالر بر پایه گروه $SU(2)$ می‌باشد.

ابزار محاسباتی

در هر گروه فشرده G ، یک اندازه‌ی منحصر به فرد وجود دارد به طوری که برای هر عضو دلخواه گروه این اندازه هار (Haar measure) تحت انتقال از چپ و راست، و وارون ناوردا است. با استفاده از این اندازه می‌توان یک فضای برداری بنا کرد، به این شکل که متناظر با هر عضو U گروه یک عنصر $e(U)$ معرفی می‌شود و اعضای این فضای برداری ترکیب خطی از این عناصر هستند:

$$f := \int dU f(U) e(U) \quad (1)$$

جبر گروه، این فضای برداری است که با ضرب زیر تعریف می‌شود:

$$(f \cdot g) := \int dU dV f(U) g(V) e(UV) \quad (2)$$

بنابراین تناظری بین توابع تعریف شده روی گروه و جبر گروه وجود دارد. تابع توزیع دلتای چنین تعریف می‌شود:

$$\int dU \delta(U) f(U) := f(1) \quad (3)$$

که ۱ عضو واحد گروه است. به سادگی می‌توان دید که تابع دلتای تبدیل تشابه‌ی و وارون ناوردا است:

$$\delta(VUV^{-1}) = \delta(U), \quad \delta(U^{-1}) = \delta(U) \quad (4)$$

تساوی اول نشان می‌دهد که اگر آرگومان دلتا حاصل ضرب عناصر گروه باشد، تمام جایگشت‌های چرخشی این عناصر دلتا را ناورданگه می‌دارد.

نظریه میدان

در این فضا میدان اسکالر را در نظر می‌گیریم. از آن جایی که فضای تکانه فضای معمولی است، همه چیز را در این فضا تعریف می‌کنیم. شکل صریح کنش برای میدان اسکالر حقیقی به صورت زیر است:

$$S = \int dt \frac{1}{2} \int dU_1 dU_2 [\dot{\phi}(U_1) \dot{\phi}(U_2) + \int dU [\phi(U_1) O(U_2, U) \phi(U_2)] \delta(U_1 U_2) - \sum_{j=3}^n \frac{g_j}{j!} \int [\prod_{l=1}^j dU_l \phi(U_l)] \delta(U_1 \dots U_j)] \quad (5)$$

که g_j ها ثابت و O عملگر خطی از جبر گروه به جبر گروه است. اگر:

$$O(U_2, U) = O(U) \delta(U_2 U^{-1}) \quad (6)$$

باشد، با انتخاب O به شکل زیر:

$$O(U) = c_{\chi\lambda} (U + U^{-1} - 2I) - m^2 \quad (7)$$

کنش بر حسب تیدیل فوریه در زمان به صورت زیر در خواهد آمد

$$S = \int dt \frac{1}{2} \int \frac{d\omega_1 dU_1}{2\pi} \frac{d\omega_2 dU_2}{2\pi} [-\omega_1 \omega_2 \tilde{\phi}(U_1) \tilde{\phi}(U_2) + \tilde{\phi}(U_1) O(U_2) \tilde{\phi}(U_2) \delta(U_1 U_2)] \times [2\pi \delta(\omega_1 + \omega_2) \delta(U_1 U_2)] - \sum_{j=3}^n \frac{g_j}{j!} \int [\prod_{l=1}^j \frac{d\omega_l dU_l}{2\pi} \tilde{\phi}(U_l)] 2\pi \delta(\omega_1 + \dots + \omega_j) \delta(U_1 \dots U_j) \quad (8)$$

دو جمله‌ی اول، قسمت آزاد کنش هستند با انتشارگر:

$$\tilde{\Delta}(w, U) := \frac{i\hbar}{w^2 + O(U)} \quad (9)$$

جمله‌ی سوم شامل برهم کنش است، پس رأس به صورت زیر در می‌آید:

$$V_j := \frac{g_j}{i\hbar j!} 2\pi \delta(w_1 + \dots + w_j) \sum_{\Pi} \delta(U_{\Pi(1)} \dots U_{\Pi(j)}) \quad (10)$$

همانطور که قبلاً اشاره شد با توجه به تقارن دوره‌ای آرگومان دلتا، جایگشت‌هایی که با یک تبدیل چرخه‌ای با هم تفاوت دارند، با وزن یکسان در جمع ظاهر می‌شوند.

مثال: گروه $SU(2)$

اندازه‌ی هار برای این گروه به صورت:

$$dU = \frac{\sin^2(lk/2)}{(lk/2)^2} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (11)$$

که $k \leq \frac{2\pi}{\ell}$ و در $0 \rightarrow \ell$ به اندازه در فضای معمولی تبدیل می‌شود. قانون پایستگی به این شکل بیان می‌شود که حاصل عناصر گروه ورودی به یک رأس برابر با واحد است. ضرب دو عنصر گروه بصورت:

$$\exp(\ell k_1^a T_a) \exp(\ell k_2^a T_a) =: [\exp \ell \gamma^a (k_1, k_2) T_a] \quad (12)$$

است که γ در $0 \rightarrow \ell$ همان طور که انتظار می‌رود به $k_1 + k_2$ تبدیل می‌شود. انتشارگر برای نمایش S این گروه به صورت زیر در آمده که در $0 \rightarrow \ell$ به انتشارگر در فضای جایه‌جایی تبدیل می‌شود.

$$\tilde{\Delta}(\omega, k) = -\frac{i\hbar}{\omega^2 + \frac{6}{s(s+1)(2s+1)\ell^2} \left\{ \frac{\sin[(s+\frac{1}{2})\ell k]}{\sin \frac{\ell k}{2}} - (2s+1) \right\} - m^2} \quad (13)$$

ماتریس پراکندگی و دامنه‌ی گذار

متغیر‌های دینامیکی بر حسب انرژی مثبت و منفی به صورت زیراست :

$$\begin{aligned} \phi(U, t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} [a(U) \exp(-i\omega t) + a^+(U^{-1}) \exp(i\omega t)] \\ [a(U), a^+(U)] &= \delta(UV^{-1}), [a(U), a(V)] = 0, [a^+(U), a^+(V)] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

برای حالت‌های چند ذره‌ای هم داریم :

$$\langle U | V \rangle = \delta(U^{-1}V), \quad \langle U | U \rangle = \delta(1) \quad (15)$$

که سمت چپ رابطه‌ی اخیر همان حجم سیستم است که مشابه با حالت معمولی محاسبات را با نمایش‌های محدود انجام داده و پس از حذف شدن حجم، آن را به بی‌نهایت میل می‌دهیم. در آخر (1) $\delta(1)$ نمی‌باشد باقی بماند. دامنه پراکندگی در اینجا به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} T_{fi} &:= 2\pi\delta(\sum_j \omega_{fj} - \sum_l \omega_{il}) \prod_j \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{fj}\delta(1)}} \prod_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{il}\delta(1)}} M_{fi} \\ M_{fi} &= \sum_{\Pi} M_{fi}^{\Pi} \delta(U^{\Pi}) \end{aligned} \quad (16)$$

که حاصل ضرب عناصر متناظر با ذرات خروجی، وارون عناصر گروه متناظر با ذرات ورودی و عناصر گروه متناظر با حلقه‌ها است.

برهم‌کنش چهارتایی

رأس بنیادی چهارتایی متناظر با چهار پای ورودی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} V_4^{[1234]} &= \frac{g_4}{6i\hbar} 2\pi\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \times [\delta(U_1 U_2 U_3 U_4) + \delta(U_1 U_2 U_4 U_3) \\ &+ \delta(U_1 U_3 U_2 U_4) + \delta(U_1 U_3 U_4 U_2) + \delta(U_1 U_4 U_2 U_3) + \delta(U_1 U_4 U_3 U_2)] \end{aligned} \quad (17)$$

دامنه پراکندگی، $1+2 \rightarrow 3+4$ در رتبه‌ی درخت به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \frac{g_4}{6i\hbar} 2\pi [\delta(U_1 U_2 U_3^{-1} U_4^{-1}) + \delta(U_1 U_2 U_4^{-1} U_3^{-1}) + \delta(U_1 U_3^{-1} U_2 U_4^{-1}) \\ &+ \delta(U_1 U_3^{-1} U_4^{-1} U_2) + \delta(U_1 U_4^{-1} U_2 U_3^{-1}) + \delta(U_1 U_4^{-1} U_3^{-1} U_2)] \end{aligned} \quad (18)$$

نتیجه‌گیری

نظریه میدان بنا شده در فضای فازی واگرایی فرابخش نخواهد داشت اگر گروه فشرده باشد. دیده شد که اگر $\ell \rightarrow 0$ برود، انتشار‌گر حالت جایه‌جایی به دست می‌آید اما با توجه به رابطه‌ی (18) در این حد دامنه‌ی گذار با حالت

جایه جایی یکی نخواهد شد. منشا این اختلاف در نوع ظاهر شدن دلتا می باشد که در حالت معمولی هر رأس فقط شامل یک دلتای بقای تکانه است که برای تمام جملات یکی است در حالی که در اینجا هر جایگشتی از پاهای یک رأس با یک دلتای متفاوت ظاهر می شوند.

مرجع‌ها

1. Field theories on spaces with linear fuzziness, EPL, **80** (2007) 20003, hep-th/0612013
2. Field theory amplitudes in a space with SU(2) fuzziness, Eur. Phys. J. C **53**, 679–688 (2008) hep-th/07121670

مدل گردنبند-کوندو ناهمسانگرد در هندسه نرdbانی

سامیه محمودیان و عبدالله لنگری

دانشکده فیزیک؛ دانشگاه صنعتی شریف؛ خ. آزادی - تهران

چکیده

مدل گردنبند-کوندو ناهمسانگرد برای نرdbانهای اسپینی با تعداد زنجیره های زوج و فرد به ازای مقادیر متفاوت نا همسانگردی بین اسپین الکترونها روان مطالعه شده است . می توان نشان داد با استفاده از رهیافت میدان متوسط دو فاز متفاوت برای زنجیره هایی با پایه فرد وجود خواهد داشت در حالیکه این روش برای زنجیره های زوج به درستی کار نخواهد کرد. سپس با استفاده از تئوری موج اسپینی می توان نشان داد که یک زنجیره دو تایی به ازای پارامتر δ هیچ گاه نظم مغناطیسی نخواهد داشت در حالیکه به ازای مقادیر $\delta > \delta_1$ گذار فاز کواترومی پیش بینی خواهد شد . بنابراین برای زنجیره مغناطیسی نخواهد داشت در حالیکه به ازای مقادیر $\delta < \delta_1$ گذار فاز کواترومی پیش بینی خواهد شد . بنابراین برای زنجیره های فرد و زوج در حد اینینگ گذار فاز از حالت تک تایی کوندو به فاز منظم آنتی فرومغناطیس خواهد داشت.

مدل ناهمسانگرد گردنبند-کوندو^۱ در دو و سه بعد به عنوان مدلی اصیل برای بررسی گذار فاز کواترمی بین فازهای منظم مغناطیسی و بی نظم یگانه کوندو^۲ در موادی که فرمیونهای سنگین نامیده میشوند منظر شده است [۱]. نظر به اینکه هندسه شبکه میتواند باعث ایجاد رفتارهای جدیدی گردد در این مقاله سعی داریم که این مدل را روی شبکه نرdbانی بررسی کنیم. هامیلتونی مدل ناهمسانگرد گردنبند کوندو را برای نرdbانی با تعداد پایه های n میتوان بصورت زیر نوشت:

$$H = t \sum_{m,m'} \sum_{n=1}^{nl} (\tau_{nm}^x \tau_{nm'}^x + \tau_{nm}^y \tau_{nm'}^y + \delta \tau_{nm}^z \tau_{nm'}^z) \\ + t' \sum_m \sum_{n=1}^{nl-1} (\tau_{nm}^x \tau_{n+1m}^x + \tau_{nm}^y \tau_{n+1m}^y + \delta \tau_{nm}^z \tau_{n+1m}^z) + J \sum_m \sum_{n=1}^{nl-1} (\tau_{nm}^x s_{nm}^x + \tau_{nm}^y s_{nm}^y + \Delta \tau_{nm}^z s_{nm}^z)$$

ضرایب جفتشدگی در امتداد پایه ها بین اسپین الکترونها رسانش τ است ول ضریب جفتشدگی بین الکترونها روان و اسپینها جایگزیده δ است. δ و (Δ) ناهمسانگردی برای الکترونها روان (جایگزیده) را نشان می دهد m^m ، جمع روی نزدیکترین همسایه هاست. برای سادگی می توان فرض کرد $t = t'$.

یک باند جایگزیده برای هامیلتونی ذکر شده یک فضای هیلبرت چهار حالت است که به وسیله حالات سه تایی و تک تایی نشان داده می شوند. ما رهیافت میدان متوسط را که در مرجع [۲] توضیح داده شده است را دنبال می کنیم. در این رهیافت چگالش حالات تک تایی را به صورت $\langle S_{nm}^z \rangle = \langle S_{nm}^x \rangle = \langle S_{nm}^y \rangle$ و چگالش جزئی برای حالتهای سه تایی را به صورت

Kondo-necklace¹
Kondo singlet²

و $\eta_{k_x k_y}$ وارد می کنیم که \tilde{E} چگالش حالات سه تایی در بردار موج منظم ($Q_x Q_y$) افت و خیزهای کوانتومی است [۳]. با توجه به این واقعیت که چگالش حالات سه تایی در مقایسه با حالات تک تایی خیلی کوچک است می توان از جمله های سه تایی و چهار تایی صرف نظر کرد که توسط رهیافت تابع گرین [۴] نشان داده شده است که این ترم ها تصحیح بسیار اندکی بر روی نقطه بحرانی خواهد داشت اگر چه نمای بحرانی را به مقدار قابل توجهی تغییر می دهند. بنابراین هامیلتونی رامی توان در فضای اندازه حرکت بدست آورد و با استفاده از تبدیل بوگولیوبف بر حسب اپراتورهای جدید \tilde{E} و $\tilde{E}_{k_x k_y}$ قطری کرد.

(حالت ۱ $\delta > 0$) در این مورد چگالش جزئی برای حالات سه تایی نظم در جهت Z را نشان میدهد. بنابراین $\beta = Z$ است، با کمینه کردن انرژی بر حسب پارامتر E, μ, δ با فرض $\Delta = 1$ می توان معادلات خود سازگار را به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{5}{4} + \frac{J}{2D\delta t} - \frac{1}{4N} \sum_{k_x k_y} \sqrt{1 + \frac{\gamma_{(x)} + \gamma_{(y)}}{D}} - \frac{1}{2N} \sum_{k_x k_y} \sqrt{1 + \frac{\gamma_{(x)} + \gamma_{(y)}}{8D}} \\ E^2 &= \frac{5}{4} - \frac{J}{2D\delta t} - \frac{1}{4N} \sum_{k_x k_y} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_{(x)} + \gamma_{(y)}}{D}}} - \frac{1}{2N} \sum_{k_x k_y} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_{(x)} + \gamma_{(y)}}{8D}}} \end{aligned}$$

که در اینجا $\gamma(k_x) = \gamma_x = \cos(k_x)$ به عنوان مثال برای یک نردهبان با دو پایه $k_x = 0, \pi$ و $k_y = 0, \pi$ با توجه به این معادلات اگر تعداد پایه ها فرد باشد معادله دوم یک جواب غیر صفر برای \tilde{E} پیدا خواهد کرد بنابراین میتوان نقطه ای که نظم بلند برد پادفرو-مغناطیسی از میان میروند را با محاسبه $E = 0$ بدست آورد و کمیت QCP یعنی نقطه بحرانی با افزایش تعداد پایه ها به حد دو بعدی نزدیک می شود که در جدول ۱ نشان داده شده است. اما برای یک نردهبان اسپینی با تعداد پایه های زوج در نقطه \tilde{E} انتگرال $\sum_{k_x k_y} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_{(x)} + \gamma_{(y)}}{D}}}$ و اگرا خواهد شد بنابراین مشابه با مدل یک بعدی [۵] هیچ گاه نظم مغناطیسی وجود نخواهد داشت در حالیکه ما می دانیم در حد آیزنینگ باید نظم بلند برد آنتی فرو مغناطیسی حاکم باشد و بنابراین تئوری میدان متوسط برای زنجیره های زوج کار نخواهد کرد.

(حالت ۱ $\delta < 0$) در این حالت نیز اگر چه چگالش حالات سه تایی را برای مولفه های x, y در نظر می گیریم ولی باز هم برای زنجیره های زوج انتگرال و اگرا ظاهر خواهد شد و بنابراین تئوری میدان متوسط در این مورد هم نتایج درست نخواهد داشت. ولی برای زنجیره های فرد مطابق با جدول ۱-گذار فاز کوانتومی بر حسب پارامتر (J/I) وجود خواهد داشت.

می دانیم که برای یک نردهبان دو تایی مدل گردنبرگ کوندو در $J=0$ به هامیلتونی اسپین ۲/۱ XXZ تبدیل میشود. این مدل دارای گاف اسپینی برای $I=1$ است و در حد $I \rightarrow \infty$ حالت پایه سیستم حاصل ضرب مستقیم حالات تک تایی است بنابراین باز

هم فاز بی نظم خواهیم داشت پس بین این دو حد انتظار نمی رود که سیستم دارای نظم مغناطیسی باشد اما در حد $\delta > \delta$ انتظار خواهیم داشت که نظم بلند برد در حالت پایه به وجود آید در ادامه با استفاده از نظریه موج اسپینی نشان می دهیم (جزیات در اینجا ذکر نمیشود) که با افزایش افت و خیزهای کوانتمی این نظم ویران خواهد شد. برای یک نردهان دو تایی با در نظر گرفتن نظم پاد فرو مغناطیس می توان دو زیر شبکه A, B در نظر گرفت . با استفاده از تبدیلات هولشتون پریماکف می توان این نظم عملگرها را بر حسب عملگرهای بزونی نوشت با توجه به اینکه حد I  حالت پایه پلاریزه دارای نظم نیل است باید این نظم پاد فرو مغناطیس را بین اسپین الکترونهای روان از یک زیر شبکه A با زیر شبکه دیگر B در نظر گرفت سپس با در نظر گرفتن عملگرهای اسپینی تا مرتبه اول و تبدیل فوریه می توان هامیلتونی را بدست آورد [۵]. این هامیلتونی را می توان با تبدیلات پارا یونیتاری قطری کرد [۶] برای قطری سازی به این روش شرط مثبت معین بودن ضروری است. برای $1 < \delta < \delta$ این شرط برقرار خواهد بود اما برای $1 < \delta$ نمیتوان ماتریس را قطری کرد به عبارت دیگر این به این معناست که انرژی بر انگیختگی شبه زرات بزونی منفی هستند بنابراین حالت پایه سیستم یک حالت بی نهایت منفی خواهد بود و بنابراین فاز بلند برد نیل ممکن نمی باشد ولی در حالت $1 < \delta$ و $I = 0$ سیستم دارای نظم نیل خواهد بود بنابراین اثر ضریب جفتشدگی غیر صفر می تواند منجر به افت و خیزهای کوانتمی در سیستم شود تا جاییکه این نظم از بین خواهد رفت. بنابراین I/t دارای دارای مقدار بحرانی خواهد بود به طوریکه به ازای مقادیر کوچکتر از آن سیستم دارای نظم بلند برد پاد فرو مغناطیس خواهد بود.

جدول ۱: نقاط بحرانی کوانتمی برای نردهانهای فرد

تعداد پایه ها	$\delta = 2$ t/J	$\delta = 0.6$ t/J
۱۱	.۴۳	.۷۲
۹	.۴۲	.۸۹
۷	.۴۴	.۹۴
۵	.۵۱	.۹۰
۳	.۳	.۶۱

مرجع ها

- 1- S. Doniach, Physica B **91**, 231 (1977); H. Tsunetsugu, M. Sigrist, and K. Ueda, Rev. Mod. Phys. **69**, 809 (1997).
- 2- G. M. Zhang, Q. Gu and L. Yu, Phys. Rev. B **62**, 69 (2000).
- 3- A. Langari and P. Thalmeier, Phys. Rev. B. **74**, 024431 (2006).
- 4- H. Rezania, A. Langari and P. Thalmeier, Phys. Rev. B. **77**, 094438 (2008).
- 5- S. Mahmoudian and A. Langari, Phys. Rev.B. **77**, 024420 (2008).
- 6- J. H. P. Colpa, Physica A **93**, 327 (1978).

بررسی مکانیک آماری یک نوسانگر ناهماهنگ نسبیتی D بعدی به ازای دو تابع

انرژی پتانسیل ناهماهنگ متفاوت

سید کامران مؤیدی، محسن سبزیان، مجتبی گودرزی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، اراک، صنایع پستی ۳۶۱۵۶-۸۷۹

چکیده

در این مقاله مکانیک آماری کلاسیک یک نوسانگر ناهماهنگ نسبیتی D بعدی با استفاده از رهیافت هنگرد بنادی به ازای دو تابع انرژی پتانسیل متفاوت برای نوسانگر ناهماهنگ مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده می شود که به ازای $D=1$ نتایج حاصل از هر دو پتانسیل به رفتار ترمودینامیکی یکسانی منجر می شوند در حالیکه به ازای $D>1$ رفتار ترمودینامیکی دستگاه وابسته به نوع پتانسیل انتخاب شده برای نوسانگر ناهماهنگ خواهد بود.

ایده تعمیم مکانیک آماری به گونه ای که بتوان از آن برای توصیف دستگاههای نسبیتی استفاده نمود برای نخستین بار توسط شخصی بنام ژوتner مطرح گردید که به ارائه تعمیمی نسبیتی از تابع توزیع سرعت ماکسول-بولترمن پرداخت [۱-۳]. اخیراً علاقه به مطالعه مکانیک آماری نسبیتی بواسطه کاربردهای آن در شاخه های مختلف فیزیک نظری کیهان شناسی، سیستم های اختر فیزیکی متراکم همانند ستاره های نوترونی و نیز فیزیک انرژی های بالا مجدداً در کانون توجه قرار گرفته است [۴-۵]. در این کار تحقیقی مدلی تعمیم یافته از ارتعاشات ناهماهنگ در یک دستگاه نسبیتی در D بعد فضایی ارائه شده و برخی از خواص ترمودینامیکی دستگاه مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

معرفی مدل

یک نوسانگر ناهماهنگ نسبیتی D بعدی را در نظر بگیرید که توسط هامیلتونی زیر توصیف می شود [۵]:

$$H_i = \sqrt{c^2 \vec{p} \cdot \vec{p} + m^2 c^4} - mc^2 + V_i(\vec{x}), i=1,2 \quad (1)$$

که m جرم سکون نوسانگر و $\vec{p} = (p_1, \dots, p_D)$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_D)$ بردارهای مکان و تکانه خطی در فضای D بعدی بوده و تابع انرژی پتانسیل $V_i(\vec{x})$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$V_i(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha \sum_{j=1}^D x_j^{2n} + (1-\lambda) \gamma \sum_{j=1}^D x_j^{4n}, & i=1 \\ \frac{1}{2} \alpha (\vec{x} \cdot \vec{x})^n + (1-\lambda) \gamma (\vec{x} \cdot \vec{x})^{2n}, & i=2 \end{cases} \quad (2)$$

در معادله (2) λ یک پارامتر ثابت بدون بعد و α یک عدد حقیقی مثبت با بعد $ML^{2(1-n)}T^{-2}$ و γ یک عدد حقیقی دیگر با بعد $ML^{2(1-2n)}T^{-2}$ بوده و n یک عدد صحیح مثبت ($n=1, 2, 3, \dots$) می باشد. در حالتی که $D=1$ باشد پتانسیل های $V_1(\vec{x})$ و $V_2(\vec{x})$ در معادله (2) شکل ریاضی یکسانی خواهند داشت، اما به ازای $D>1$ این دو پتانسیل شکل متفاوتی خواهند داشت همچنین به ازای $n=1$, $\lambda=1$ توابع $V_1(\vec{x})$ و $V_2(\vec{x})$ در معادله (2) به صورت زیر در می آیند:

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2} \alpha \vec{x} \cdot \vec{x}, \quad (3)$$

که همان پتانسیل مربوط به نوسانگر هماهنگ همسانگرد D بعدی است.تابع پارش بندادی کلاسیک وابسته به هامیلتونی H_i در معادله (۱) چنین است:

$$Q_i(\beta, \lambda) = \frac{1}{h^D} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta H_i} \prod_{j=1}^D dx_j dp_j, \quad i=1,2, \quad (4)$$

که با توجه به شکل تابع پتانسیل $V_i(\vec{x})$ در معادله (۲) بعد از انجام محاسبات خواهیم داشت:

$$Q_1(\beta, \lambda) = 2 \left(\frac{2}{h} \right)^D \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{\frac{D-1}{2}} e^{\Omega} (mc)^D K_{\frac{D+1}{2}}(\Omega) \\ \left[\frac{1}{2n} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(1-\lambda)^\ell (-\beta\gamma)^\ell}{\ell!} \left(\frac{2}{\alpha\beta} \right)^{\frac{1}{2n} + 2\ell} \Gamma\left(\frac{1}{2n} + 2\ell\right) \right], \quad (5)$$

$$Q_2(\beta, \lambda) = \frac{2}{h^D} \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{\frac{D-1}{2}} e^{\Omega} (mc)^D K_{\frac{D+1}{2}}(\Omega) \frac{D\pi^{\frac{D}{2}}}{\left(\frac{D}{2}\right)!} \\ \left[\frac{1}{2n} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(1-\lambda)^\ell (-\beta\gamma)^\ell}{\ell!} \left(\frac{2}{\alpha\beta} \right)^{\frac{D}{2n} + 2\ell} \Gamma\left(\frac{D}{2n} + 2\ell\right) \right], \quad (6)$$

که $\Omega = \beta mc^2$ یک متغیر بدون بعد بوده و $K_{\frac{D+1}{2}}(\Omega)$ تابع بسل تعدیل یافته نوع دوم مرتبه $\frac{D+1}{2}$ می باشد [۶]. برای

محاسبه انرژی درونی و ظرفیت گرمایی ویژه وابسته به هر پتانسیل می توان از معادلات زیر استفاده نمود [۱]:

$$U_i = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q_i(\beta, \lambda), \quad C_i = \frac{\partial U_i}{\partial T}, \quad (i=1,2) \quad (7)$$

که با توجه به معادلات (۵) و (۶) بعد از انجام محاسبات، ظرفیت گرمایی ویژه وابسته به پتانسیل های $V_1(\vec{x})$ و $V_2(\vec{x})$ در معادله (۲) خواهد شد:

$$\frac{C_1}{k} = \frac{1+2n}{2n} D - \Omega^2 \Lambda(\Omega) - D \frac{8(1-\lambda)\gamma}{\alpha^2} \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) kT \\ + D \frac{48(1-\lambda)^2 \gamma^2}{\alpha^4} \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left\{ \left(3 + \frac{1}{2n}\right) \left(2 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right\} (kT)^2 + \dots, \quad (8)$$

$$\frac{C_2}{k} = \frac{1+2n}{2n} D - \Omega^2 \Lambda(\Omega) - \frac{8(1-\lambda)\gamma}{\alpha^2} \frac{D}{2n} \left(1 + \frac{D}{2n}\right) kT \\ + \frac{48(1-\lambda)^2 \gamma^2}{\alpha^4} \frac{D}{2n} \left(1 + \frac{D}{2n}\right) \left\{ \left(3 + \frac{D}{2n}\right) \left(2 + \frac{D}{2n}\right) - \frac{D}{2n} \left(1 + \frac{D}{2n}\right) \right\} (kT)^2 + \dots, \quad (9)$$

که عبارت است از:

$$\Lambda(\Omega) = \left(\frac{K_{\frac{D-1}{2}}(\Omega)}{K_{\frac{D+1}{2}}(\Omega)} \right)^2 - \frac{K_{\frac{D-3}{2}}(\Omega)}{K_{\frac{D+1}{2}}(\Omega)} + \frac{1}{\Omega} \frac{K_{\frac{D-1}{2}}(\Omega)}{K_{\frac{D+1}{2}}(\Omega)}. \quad (10)$$

رفتار مدل در حد غیر نسبیتی

حال به مطالعه رفتار مدل در حد غیر نسبیتی می پردازیم. در این حد جمله mc^2 که همان جمله مربوط به انرژی در حال سکون نوسانگر است به لحاظ بزرگی از جمله مربوط به انرژی حرارتی میانگین kT بسیار بزرگتر بوده ($mc^2 \gg kT$) و بنابراین پارامتر بدون بعد Ω عدد بسیار بزرگی می باشد ($1 > \Omega > 4$). با توجه به رفتار مجانبی تابع ($K_v(\Omega)$ به ازای $1 > \Omega$ ، یعنی [۶]):

$$K_v(\Omega) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\Omega}} e^{-\Omega} \left[1 + \frac{(4v^2 - 1)}{1!(8\Omega)} + \frac{(4v^2 - 1)(4v^2 - 9)}{2!(8\Omega)^2} + \dots \right], \quad (11)$$

و با انتخاب $n = \lambda$ در حد غیر نسبیتی خواهیم داشت:

$$\lim_{\substack{\Omega \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 1 \\ n \rightarrow 1}} \frac{C_1}{k} = \frac{C_2}{k} = D. \quad (12)$$

معادله (۱۲) ظرفیت گرمایی ویژه مربوط به یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد غیر نسبیتی در یک فضای D بعدی در حد دماهای بالا می باشد [۱].

نتیجه گیری

همانطور که معادلات (۲)، (۵)، (۶)، (۸) و (۹) نشان می دهند به ازای $1 = D$ نتایج حاصل از هر دو پتانسیل ارائه شده برای نوسانگر ناهمانگ نسبیتی به رفتار ترمودینامیکی یکسانی منجر می شوند در حالیکه به ازای $1 > D$ رفتار ترمودینامیکی دستگاه وابسته به نوع پتانسیل انتخاب شده برای نوسانگر ناهمانگ نسبیتی خواهد بود. در حد غیر نسبیتی و به ازای مقادیر خاصی از پارامترهای معرفی شده در مدل، رفتار هر دو پتانسیل به رفتار ترمودینامیکی وابسته به یک پتانسیل هماهنگ غیر نسبیتی در فضای D بعدی تبدیل می شوند.

مرجع ها

1. R. Kubo, *Statistical Mechanics, An Advanced Course with Problems and Solutions* (Interscience, New York, 1965).
2. F. Juttner, Ann. Phys., Lpz. **34** 856-82 (1911).
3. A. Sandoval-Villalbazo, A. Aragones-Munoz, A. L. Garcia-Perciante; arXiv: 0802.1023v1 [gr-qc]
4. مؤیدی، سید کامران؛ سبزیان، محسن؛ مطالعه مکانیک آماری خواص ترمودینامیکی یک مجموعه از N نوسانگر ناهمانگ نسبیتی تمایز پذیر با استفاده از رهیافت هنگرد بندادی؛ مقاله نامه کنفرانس فیزیک ایران، یاسوج، دانشگاه یاسوج، ۵ تا ۸ شهریور ۱۳۸۶، صفحه ۱۲۹۱ تا ۱۲۹۴.
5. سبزیان، محسن؛ بررسی مکانیک آماری یک نوسانگر ناهمانگ از دیدگاه نسبیتی و غیر نسبیتی؛ پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک، دانشگاه اراک، دی ۱۳۸۶.
6. M. Abramowitz and I. A. Stegun; *Handbook of Mathematical Functions*; (Dover Pub, New York, 1970).

اصل کمترین حساسیت و استفاده از آن برای پیش بینی جملات مرتبه های بالاتر در بسط اختلالی QCD

ابوالفضل میرجلیلی^{۱،۲}، مریم ریاحی^۱

^۱ دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

^۲ پژوهشگاه دانش های بنیادی، پژوهشکده ذرات و شتاب گرها

چکیده

چنانچه مشاهده پذیرهای QCD فقط وابسته به کمیات فیزیکی نظیر انرژی برخورد در سیستم مرکز جرم باشند، در این صورت بدینهی است که مشتق این کمیات نسبت به سنجه بازبینجارش صفر خواهد شد. این صفر شدن مشتق خود کلیدی است که کمک می کند، سنجه بازبینجارش که جملات اختلالی به آن وابسته است، تعیین شود. بدین ترتیب می توان ابهامی را که در تعیین سنجه بازبینجارش وجود دارد، برطرف نمود. سنجه ای که به این روش تعیین شود، سنجه ای است که کمیات مورد نظر را بهینه می کند و مشاهده پذیر مورد نظر که نسبت به این سنجه محاسبه می شود، مشاهده پذیر بهینه است که با R_{OPT} نمایش داده می شود. در اینجا تعمیم این روش، که به نام اصل کمترین حساسیت (*Principle of minimum sensitivity*) از آن یاد می شود، جهت پیشیبینی جملات بسط اختلالی مدل نظر می باشد.

مقدمه

در اینجا اصل کمترین حساسیت (PMS) را در مرتبه دوم تقریب (NLO) و مرتبه های بالاتر برای پیش بینی جملات بعدی در بسط مشاهده پذیر فیزیکی در مرتبه دلخواه بررسی می کنیم. با تبدیل متغیرها ای بهینه شده به متغیر های مطرح شده در طرح استاندارد نظریه دینامیک کوانتومی رنگها (QCD)، جملات مرتبه های بالاتر در آن تقریب خاص قابل پیش بینی خواهند بود. از آنجایی که محاسبات به صورت تحلیلی بسیار سخت می باشد، جستجو برای روش جانشین که منجر به نتایج معینی گردد، ضروری است. در ادامه می ثوان به قسمتی از روش PMS با دید دیگری جهت رسیدن به جملات مرتبه های بالاتر بسط نگریست. در این حالت وقتی که در مرتبه های پایین تقریب می باشیم، مقادیر قابل قبولی برای جملات بسط بدست خواهد آمد.

نظریه اختلالی بهینه

نظریه اختلالی دینامیک کوانتومی رنگها (QCD) با استفاده از طرح های بازبینجارش (RS) متفاوت، نتایج متفاوتی را برای مشاهده پذیرهای فیزیکی ایجاد می نماید. سؤالی که در QCD مطرح می شود این است که: کدامین RS برای کمیت فیزیکی ویژه ای، بهترین نتیجه را در بر دارد. اصل کمترین حساسیت (PMS) با استفاده از این حقیقت که کمیت های فیزیکی مستقل از پارامترهای غیر فیزیکی RS هستند، بهترین وضعیت را حالتی می داند که کمترین حساسیت در مقابل تغییرات پارامترهای غیر فیزیکی RS ایجاد شود [۱]. برای سادگی بحث را در تئوری اختلالی بدون جرم ادامه می دهیم. برای مشاهده پذیری مثل R (اگر تنها ۳ طعم کوارکی فعل داشته باشیم) داریم:

$$R = \left(3 \sum_i q_i^2 \right) (1 + R) \quad R = a(1 + r_1 a + r_2 a^2 + \dots)$$

در اینجا R ها بعنوان ضرایب بسط و $a = \frac{\alpha_s}{\pi}$ بعنوان ثابت جفت شدگی وابسته به RS هستند. ولی این وابستگی هنگامی که روی تمام جملات بسط عمل جمع صورت گیرد، حذف می شود، چرا که مشاهده پذیر R که کمیتی

فیزیکی است، مستقل از RS می باشد. اما از آنجایی که تمام جملات در دسترس نیست و بسط جایی قطع می شود، نتیجه وابسته به RS خواهد بود. تقریب i ام $R^{(i)}$ شامل i جمله از بسط R است که در آن a تا مرتبه i ام بسط مر بوط اش می باشد. بهترین تقریب $R^{(i)}$ طبق PMS تقریبی است که شرط زیر را ارضاء کند:

$$\frac{\partial R^{(i)}}{\partial RS} \Big|_{RS=optimumRS} = 0 \quad \text{پارامترهای } RS \text{ ضرائب بسط تابع } \beta \text{ و } \tau \text{ هستند.}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \hat{\beta}(a) = \frac{\beta(a)}{b} = -a^2(1+ca+c_2a^2+\dots) \quad (1)$$

با مقایسه $R^{(i)}$ در دو RS متفاوت می توان شرط خود سازگاری (Self Consistency) را استخراج کرد. [۲]

$$\frac{\partial R^{(i)}}{\partial RS} = O(a^{i+1}) \rightarrow r_j \propto (\tau, c_2, \dots, c_i) \rightarrow R^{(i)} \propto (\tau, c_2, \dots, c_{(i-1)})$$

پس $R^{(i)}$ به RS وابسته است.

به عنوان مثال برای یافتن R_{OPT} در تقریب مرتبه دوم (NLO) می نویسیم:

$$R_{OPT}^{(2)} = a(\tau)(1+r_1a(\tau))$$

τ می تواند مقادیر متفاوتی اخذ کند، و با استفاده از روش PMS میتوان بهترین گزینه $R_{OPT}^{(2)}$ را یافت. در حین یافتن $R_{OPT}^{(2)}$ کمیتی ناوردا نسبت به متغیرهای RS به نام ρ_1 معرفی می شود،

$$\rho_1 = \tau - r_1(\tau)$$

پس ρ_1 و c و در نتیجه \bar{a} و $R_{OPT}^{(2)}$ تحت تغییرات RS ناوردا خواهند بود.

برای یافتن جملات مرتبه بالاتر در بسط $R_{opt}^{(2)}$ می توان از ناوردایی ρ_1 و مقایسه آن در دو سنجه (scale) متفاوت استفاده کرد، بدین گونه که در $R_{OPT}^{(2)} = \bar{a}(\bar{\tau})(1+\bar{r}_1a(\bar{\tau}))$ می کنیم \bar{a} و \bar{r}_1 را بر حسب a و r_1 بیابیم. در این صورت اگر عبارت حاصل به صورت $R_{OPT}^{(2)} = a(\tau)(1+r_1a(\tau)+xa^2(\tau))$ شد، x را به عنوان جمله پیش بینی شده به r_3 انتساب می دهیم:

$$R_{2^{OPT}}^{(2)} = \bar{a} \frac{(1+(1/2)c\bar{a})}{1+c\bar{a}} \quad (2)$$

$$\tau - r_1(\tau) = \bar{\tau} - \bar{r}_1(\bar{\tau}) = \rho_1 \quad \text{در NLO}$$

$$\Rightarrow 1/a + r_1(\tau) - c/2(1+ca) = 1/\bar{a} + c \ln(c\bar{a}/1+c\bar{a}) - c/2(1+c\bar{a})$$

از حل این معادله \bar{a} بر حسب a و r_1 و c به دست می آید و با جایگذاری آن در $R_{OPT}^{(2)}$ می توان به جملات تقریب مرتبه دوم دست یافت. ما با استفاده از نرم افزار Maple در حال حاضر قادر به حل این معادله نیستیم. اگر در معادله بالا به جای τ در تقریب NLO مقدار آن را در $\tau = 1/a$ (LO) لحاظ کنیم، معادله نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$1/a - r_1(\tau) - 1/\bar{a} + c/2(1+c\bar{a}) = 0$$

که از حل این معادله دو مقدار برای \bar{a} به دست می آید. \bar{a} ای که شکل دلخواه $R_{OPT}^{(2)}$ را (پس از بسط آن بر حسب a) می دهد به صورت زیر است:

$$\bar{a} = -\frac{1}{4} \frac{3ac - 2 + 2r_1a + \sqrt{9a^2c^2 + 4ac - 4a^2cr_1 + 4 - 8r_1a + 4r_1^2a^2}}{c(-1 + r_1a)}$$

$$R_{OPT}^2 = a + r_1a^2 + (r_1^2 - c^2/4)a^3 + \dots$$

و با توجه به $R_{OPT}^{(2)}$ به دست آمده، $r_3 = r_1^2 - c^2/4$ خواهد بود. این روش در NNLO با توجه به ناوردایی ρ_1 و ρ_2 قابل بررسی است، ولی دستگاه معادلات حاصل از آن حتی به ازای ϵ در NLO هم قابل حل نیست.

روشی دیگر برای یافتن جملات مرتبه بالاتر

در این روش $(R_{OPT}^{(2)}) = \bar{a}(\bar{\tau})(1 + \bar{r}_1a(\bar{\tau}))$ را به صورت زیر نوشته شده و هدف یافتن $\Omega^{(2)}$ و $\Phi^{(2)}$ به عنوان جملات مرتبه های بالاتر است:

$$R_{OPT}^2 = R^2(a) + a^3\Omega^{(2)} + a^4\Phi^{(2)} + \dots \quad (3)$$

در این روش بجز شرط PMS یعنی $R_{OPT}^{(2)} = R^2(\bar{\tau})$ از ناوردایی $R_{OPT}^{(2)}$ نسبت به متغیرهای RS و در نتیجه انتخاب RS اولیه استفاده می شود. از اصل دوم برای یافتن شکل کلی $(\Omega^{(2)}$ و $\Phi^{(2)})$ و اصل PMS در تعیین مقادیر ثابت به وجود آمده استفاده می شود. این مسئله را با جایگزین کردن $(\bar{r}_1 = -c/2, \bar{r}_2 = -c/2, \bar{a} = -ca + c^2a^2)$ به جای چنین وارد کردن جملات بعدی بسط (3) همانطور که انتظار می رفت، تغییری در نتایج $(\Omega^{(2)}$ و $\Phi^{(2)})$ به وجود نیامد. هم نیا مد. تنها شرط به کار رفته در اینجا کوچک بودن ca می باشد. قابل توجه است که $\Omega^{(2)}$ به دست آمده با r_2 پیش بینی شده از روش های FAC و Pade approximation است [3]. در تقریب های بالاتر هم می توان از این روش بهره جست.

نتیجه گیری

در استفاده از روش PMS به منظور رسیدن به کمیات بهینه شده، نیاز است که از اصل خودسازگاری استفاده شود. استفاده از این اصل این امکان را ایجاد می کند که به مشتقات جزئی جملات اختلالی نسبت به پارامترهایی که برای تعریف طرح باز بهنگارش به کار می آید، دست یابیم. این مشتقات در نهایت منجر به تعریف کمیات ناوردایی خواهند شد که با استفاده از آنها می توان جملات سری بهینه شده را بر حسب جملاتی که در رهیافت استاندارد QCD وجود دارد، نوشت. اکنون این سوال مطرح است که آیا نتیجه حاصل از این عمل یکتا خواهد بود؟. سؤال بعد این است که از بین جواب های مختلف برای جملات پیش بینی شده کدام را می توان پذیرفت و چه قیدهای فیزیکی وجود دارد که با استفاده از آنها بتوان از سایر جملات پیش بینی شده صرف نظر نمود. جمله‌ای پیش بینی شده که نگه داشته می شود، تا چه حد با آنچه از محاسبات کامل نظریه‌ی میدانهای کوانتومی بدست می‌آید، متفاوت است؟ آیا می توان به الگویی برای یافتن تقریب جملات مرتبه های بالاتر بسط اختلالی دست یافت، بدون آنکه بخواهیم محاسبات کاملی را انجام دهیم؟

مرجع ها

- 1) P.M.Stevenson, Phys.Rev.D23 (1981) 2916.
- 2) C.J.Maxwell and A.Mirjalili, Nucl.Phys. B645 (2002) 298.
- 3) J.R.Ellis, E.Gardi, M.Karliner and M.A.Samuel, Phys.Rev.D54 (1996) 6996.