

## خواص ترمودینامیکی شبه دقیق مسئله دیراک-کیلینگ بک: رهیافت جبر لی

مرضیه برادران<sup>۱</sup>؛ حسین پناهی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گیلان

### چکیده

در این مقاله، حل پذیری شبه دقیق معادله دیراک تحت تقارن اسپینی در حضور پتانسیل کیلینگ بک و اندرکنش تانسوری کولنی مورد بررسی قرار داده می شود. با جبری سازی معادله دیراک توسط جبر لی  $sl(2)$ ، طیف انرژی شبه دقیق محاسبه و خواص ترمودینامیکی همانند تغییرات تابع پارش و انرژی میانگین بررسی می شوند.

در سال های اخیر مطالعات فراوانی برای حل معادله نسبیتی دیراک با پتانسیل های متنوع و با روشهای متفاوت تحلیلی، جبری و تقریبی صورت گرفته است [۱-۳]. ما در این کار، با استفاده از رویکرد جبر لی و بدون نیاز محاسبات تحلیلی پیچیده، به حل شبه دقیق معادله دیراک تحت تقارن اسپینی، در حضور پتانسیل کیلینگ بک و اندرکنش کولنی پرداخته و پس از محاسبه طیف انرژی شبه دقیق سیستم مذکور، توابع ترمودینامیکی پارش و انرژی میانگین را مورد بررسی قرار می دهیم. پتانسیل کیلینگ بک، سه جمله نوسانگری، خطی و کولنی را شامل می شود و کاربرد فراوانی در فیزیک ذرات بنیادی برای توصیف اندرکنش کوآرک-آنتی کوآرک دارد [۴-۶].

### معادله دیراک تحت تقارن اسپینی با اندرکنش تانسوری

معادله نسبیتی دیراک با پتانسیل های برداری و اسکالر  $V(r)$  و  $S(r)$  شامل اندرکنش تانسوری  $U(r)$  به صورت زیر می باشد [۷ و ۸]:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(M + S(r)) - i\beta\vec{\alpha} \cdot \hat{r}U(r))\psi(r) = (E - V(r))\psi(r), \quad (1)$$

که در آن  $M$  جرم نسبیتی،  $E$  انرژی نسبیتی و  $\alpha$  و  $\beta$  ماتریس های  $4 \times 4$  دیراک هستند. با استفاده از توابع موج اسپینوری دیراک، معادله شرودینگرگونه مرتبه ۲ برای مولفه اسپینوری بالا  $(F_{n\kappa}(r))$  به شکل زیر به دست می آید [۹]:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} + \frac{2\kappa}{r}U(r) - \frac{dU(r)}{dr} - U^2(r) + \frac{d\Delta(r)}{dr} \left( \frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} - U(r) \right) \right) F_{n\kappa}(r) = \quad (2)$$

$$((M + E - \Delta(r))(M - E + \Sigma(r)))F_{n\kappa}(r),$$

که در آن  $\kappa(\kappa+1) = l(l+1)$  می باشد. تقارن اسپینی در معادله دیراک در شرایطی روی می دهد که  $\frac{d\Delta(r)}{dr} = 0$  و  $\Delta(r) = V(r) - S(r) = C_S = \text{constant}$  باشد [۱۰]. با در نظر گرفتن پتانسیل کیلینگ بک

$\Sigma(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r}$  و اندرکنش تانسور کولنی به صورت  $U(r) = \frac{k}{r}$ ، از رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$HF_{n,\kappa}(r) = 0, \quad H = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\varphi_1}{r^2} - \frac{\varphi_2}{r} + \varphi_3 r^2 + \varphi_4 r + \varphi_5, \quad (3)$$

که در آن:

$$\varphi_1 = -((\kappa - A)^2 + \kappa - A), \quad \varphi_2 = -c(M + E - C_S), \quad \varphi_3 = a(M + E - C_S), \quad (4)$$

$$\varphi_4 = b(M + E - C_S), \quad \varphi_5 = M^2 - E^2 - (M - E)C_S.$$

### حل پذیری شبه دقیق و جبر لی $sl(2)$

مطابق مرجع [۱۱]، هر عملگر حل پذیر شبه دقیق به صورت ترکیبی از مولدهای جبر لی به صورت  $H = \sum_{a,b} c_{ab} J_a J_b + \sum_a c_a J_a + c_0$  بیان می گردد که  $J^0$ ،  $J^+$  و  $J^-$  در آن، مولدهای دیفرانسیلی جبر لی  $sl(2)$  به صورت  $J_n^+ = r^2 d_r - nr$  و  $J_n^0 = rd_r - n/2$ ،  $J_n^- = d_r$  می باشند. ترکیب فوق از مولدهای جبر، فضای نمایش چندجمله ای به صورت  $P_{n+1}(r) = \langle 1, r, r^2, \dots, r^n \rangle$  را ناوردا باقی می گذارد. با انجام تبدیل تشابهی  $\tilde{H} = e^{\mu(r)} H e^{-\mu(r)}$  که در آن، تابع  $\mu(r)$  به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\mu(r) = \frac{\sqrt{\varphi_3}}{2} r^2 + \frac{\varphi_4}{2\sqrt{\varphi_3}} r - (l'+1) \log(r), \quad l' = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4((\kappa - A)(\kappa - A + 1))}}{2}, \quad (5)$$

خواهیم داشت:

$$\tilde{H} = -r \frac{d^2}{dr^2} + \left( 2\sqrt{\varphi_3} r^2 + \frac{\varphi_4 r}{\sqrt{\varphi_3}} - 2(l'+1) \right) \frac{d}{dr} + \left( \varphi_5 - \frac{\varphi_4^2}{4\varphi_3} + 2\sqrt{\varphi_3} (l' + \frac{3}{2}) \right) r + \left( \frac{\varphi_4(l'+1)}{\sqrt{\varphi_3}} - \varphi_2 \right),$$

که با اعمال شرط زیرفضای ناوردا به صورت  $\tilde{H} P_{n+1}(r) \subset P_{n+1}(r)$  قیدهای زیر برای انرژی به دست می آیند:

$$\varphi_5 - \frac{\varphi_4^2}{4\varphi_3} + 2\sqrt{\varphi_3} (n + l' + \frac{3}{2}) = 0, \quad (n + l' + 1) \frac{\varphi_4}{\sqrt{\varphi_3}} - \varphi_2 = 0, \quad (6)$$

و به این ترتیب، با توجه به رابطه (۶) و (۷)، معادله انرژی و هامیلتونین شبه دقیق به صورت زیر به دست می آیند:

$$\left( M^2 - E^2 - (M - E)C_S \right) - \frac{(c(M + E - C_S))^2}{4(n + l' + 1)^2} + 2\sqrt{a(M + E - C_S)}(n + l' + \frac{3}{2}) = 0. \quad (7)$$

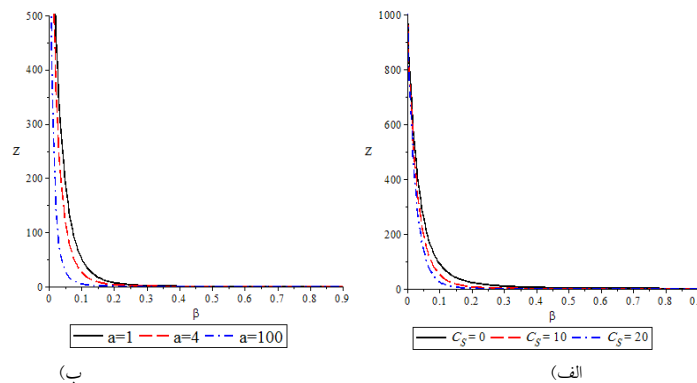
$$\tilde{H} = -J_n^0 J_n^- + 2\sqrt{a(M + E - C_S)} J_n^+ + b \sqrt{\frac{(M + E - C_S)}{a}} J_n^0 - \left( \frac{n}{2} + 2(l' + 1) \right) J_n^- - \frac{nb}{2} \sqrt{\frac{(M + E - C_S)}{a}}.$$

### خواص ترمودینامیکی

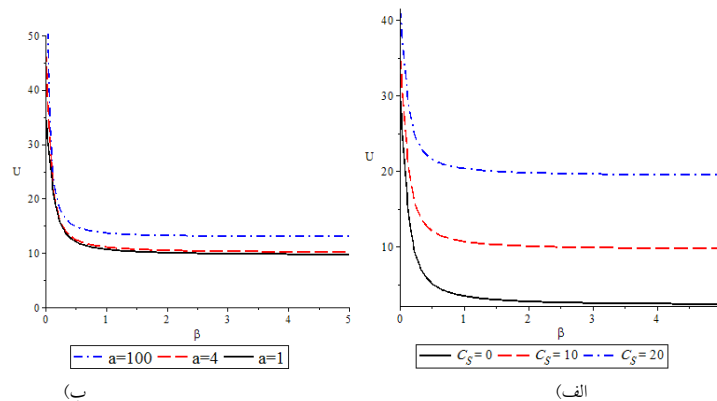
با توجه به رابطه انرژی شبه دقیق به دست آمده در قسمت قبل، تابع پارش سیستم مذکور عبارت است از:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}, \quad \beta = \frac{1}{KT}, \quad (8)$$

که در آن  $K$  ثابت بولتزمن است. انرژی میانگین نیز بر حسب تابع پارش از رابطه  $U = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln(Z))$  قابل محاسبه است. تغییرات رفتاری توابع فوق، در شکل های ۱ و ۲ نشان داده شده است. مقادیر پارامترهای مسئله  $A = 1$ ،  $M = 1$ ،  $\kappa = -1$ ،  $c = 1$  و  $a = 1, 4, 100$  اختیار شده اند [۱۲-۱۴]. ثابت پتانسیل  $b$  از روابط (۶) و (۷) قابل محاسبه است.



شکل ۱. منحنی تغییرات تابع پارش نسبت به  $\beta$  برای الف) ثابت های تقارن اسپینی متفاوت در  $a=c=1$  ب) مقادیر متفاوت از ضریب جمله نوسانگری پتانسیل (a) با ثابت تقارن اسپینی  $C_S=10$ .



شکل ۲. منحنی تغییرات تابع انرژی میانگین نسبت به  $\beta$  برای الف) ثابت های تقارن اسپینی متفاوت در  $a=c=1$  ب) مقادیر متفاوت از ضریب جمله نوسانگری پتانسیل (a) با ثابت تقارن اسپینی  $C_S=10$ .

مشاهده می شود که تابع پارش سیستم، وابسته به ثوابت پتانسیل و همچنین مقدار عددی تقارن اسپینی است. در شکل ۱، با افزایش مقدار عددی ضریب جمله نوسانگری پتانسیل و نیز افزایش ثوابت تقارن اسپینی، تابع پارش رفتار کاهش از خود نشان می دهد و در شکل ۲، با افزایش مقادیر مذکور، انرژی میانگین رفتار افزایشی از خود نشان می دهد. تغییرات رفتاری توابع فوق نسبت به سایر پارامترهای مسئله، به طریق مشابه قابل بررسی است.

### نتیجه گیری

در این کار، با استفاده از رهیافت جبر لی و بدون نیاز به استفاده از محاسبات تحلیلی پیچیده، به حل معادله دیراک تحت تقارن اسپینی، در حضور پتانسیل کیلینگ بک و اندرکنش تانسوری کولنی پرداختیم. پس از جبری سازی معادله مزبور و اعمال شرط زیرفضای ناوردا بر فضای نمایش جبر لی  $sl(2)$ ، معادله انرژی شبه دقیق را تعیین و از روی آن، تابع پارش را محاسبه نمودیم. در ادامه رفتار تابع پارش و کمیت ترمودینامیکی انرژی میانگین را در حالات مختلف از پارامترهای مسئله بررسی نمودیم. قابل ذکر است که سایر کمیت های ترمودینامیکی از قبیل انرژی آزاد، ظرفیت گرمایی، آنتروپی و ... به آسانی از روی تابع پارش قابل محاسبه هستند.

### مرجع ها

- [1]. A. Oktay and R. Sever, *Ann. Phys* **325** (2010) 373.
- [2]. C-S. Jia, P. Guo and X-L. Peng, *J. Phys. A: Math. Gen* **39** (2006) 7737.
- [3]. M. Hamzavi and A. A. Rajabi, *Commun. Theor Phys* **55** (2011) 35.
- [4]. J. Killingbeck, *Phys. Let. A* **65** (1978) 87.
- [5]. M. K. Bahar and F. Yasuk, *Advances in High Energy Physics*, vol. **2013**, Article ID 814985.
- [6]. S.M. Ikhdair, *Few-Body Syst* **54** (2013) 1987.
- [7]. M. Moshinsky and A. Szczepaniak, *J. Phys. A: Math. Gen* **22** (1989) L817.
- [8]. G. Mao, *Phys. Rev. C* **67** (2003) 044318-12.
- [9]. M. Eshghi and H. Mehraban, *Chin. J. Phys.* **50** (2012) 533.
- [10]. J. Meng, K. Sugawara-Tanabe, S. Yamaji, P. Ring and A. Arima, *Phys. Rev C* **58** (1998) R628.
- [11]. A. V. Turbiner, *Contemp. Math* **160** (1994) 263.
- [12]. T. Barakat, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 823.
- [13]. Y. Boumedjane, H. Saidi, S. Hassouni and A. Zerarka, *Appl. Math. Comput* **194** (2007) 243.
- [14]. B. J. Falaye,, and S. M. Ikhdair, *Chin. Phys. B* **22** (2013) 060305.