

مقایسه روشهای مختلف اعمال تصحیحات گرانشی بر ترمودینامیک سیاهچاله‌ها

محسن دهقانی

ایلام، دانشگاه ایلام

چکیده

در این مقاله پس از مرور کوتاهی بر نظریه تونل زنی کوانتومی تابش سیاهچاله‌ها که توسط پارینخ و همکارانش پایه گذاری شده است؛ دمای هاوکینگ، آنتروپی و آهنگ تونل زنی در افق حادث سیاهچاله شوارزشیلد بررسی و سپس تصحیحات ناشی از اثرات گرانشی بر ترمودینامیک سیاهچاله به دو روش استفاده از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و استفاده از رابطه پاشندگی تغییر یافته محاسبه و مقایسه شده است. نتایج محاسبات حاکی از آن است که هر دو روش منجر به تصحیحات یکسانی می‌شود به شرط آنکه ضرایب ثابت بوسیله روابط ساده ریاضی با هم مرتبط باشند.

۱- **مقدمه:** سیاهچاله‌ها را می‌توان به عنوان سیستمهای ترمودینامیکی در نظر گرفت که از قوانین ترمودینامیکی مشخصی موسوم به قوانین ترمودینامیک سیاهچاله‌ها تبعیت می‌کنند. از سال ۱۹۷۴ که استفان هاوکینگ اولین مقاله خود را در مورد ویژگیهای سیاهچاله‌ها منتشر کرد [۱]، تا کنون تلاشهای بسیار زیادی در این مقوله صورت گرفته و این مسئله همچنان در کانون توجه محققین قرار دارد [۲ و ۳].

بر اساس نظریه تونل زنی کوانتومی که مبتنی بر تقریب WKB است؛ آهنگ تونل زنی از داخل به خارج سیاهچاله با رابطه زیر مشخص می‌شود

$$\Gamma = \exp[-2I_m(I)] \quad (1)$$

که در آن $I_m(I)$ قسمت موهومی کنش در مسیرهایی است که از دیدگاه کلاسیکی غیرمجازند [۳]. سیاهچاله شوارزشیلد با متریک زیر مشخص می‌شود

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

در اثر تابش مقداری انرژی از سیاهچاله خارج و جرم سیاهچاله کاهش می‌یابد. براین می‌توان نوشت $I_m(I) = -\frac{1}{2} \Delta S$ که در آن ΔS اختلاف بین مقادیر آنتروپی سیاهچاله قبل و بعد از تابش انرژی است [۲].

امروزه اعمال تصحیحات گرانشی بر ترمودینامیک سیاهچاله‌ها یکی از موضوعات پرطرفدار محققین حوزه میدانهای گرانشی است. گروهی از محققین در صدد اعمال تصحیحات گرانشی با استفاده از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته هستند و گروهی دیگر این کار را با استفاده از رابطه پاشندگی تغییر یافته انجام می‌دهند [۲ و ۳]. با توجه به این که هر دو مقوله منشأ و خاستگاه یکسانی دارند، به نظر می‌رسد که هر دو باید به تصحیحات یکسانی در مورد ترمودینامیک سیاهچاله‌ها بیانجامند. در این مقاله تصحیحات ناشی از هر دو روش را محاسبه و با هم مقایسه می‌کنیم

۲- **تصحیحات گرانشی ناشی از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته:** اصل عدم قطعیت هایزنبرگ یکی از اصول بنیادی مکانیک کوانتومی است. این اصل فقط خواص کوانتومی مواد را توصیف می‌کند و نمی‌تواند افت و خیزهای کوانتومی فضا- زمان را توجیه نماید. شکل تعمیم یافته اصل عدم قطعیت در محدوده گرانش کوانتومی به صورت

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \alpha L_p^2 \frac{\Delta p}{\hbar}$$

صورت $L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 10^{-33} \text{ cm}$ طول پلانک، α یک ضریب

ثابت، c سرعت نور و G ثابت گرانش نیوتن است [۳]. جمله دوم در سمت راست معادله ناشی از احتساب اثرات گرانشی در اصل عدم قطعیت است. از این اصل می‌توان برای اعمال تصحیحات گرانشی بر ترمودینامیک سیاهچاله‌ها به صورت زیر استفاده کرد

$$\Delta p_{(GUP)} = \left[1 + \frac{\alpha L_p^2}{(\Delta x)^2} + 2 \frac{\alpha^2 L_p^4}{(\Delta x)^4} + 5 \frac{\alpha^3 L_p^6}{(\Delta x)^6} + \dots \right] \Delta p. \quad (2)$$

اینک با استفاده از معادله فوق که در آن اثرات گرانشی منظور شده است؛ دما، آنترپی و آهنگ تونل زنی کوانتومی را محاسبه می‌کنیم. بدیهی است که استفاده از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته منجر به اعمال تصحیحات گرانشی بر ترمودینامیک و آهنگ تونل زنی سیاهچاله‌ها خواهد شد.

این سیاهچاله دارای یک افق حادث در $r_h = 2GM$ است. دما و آنترپی در افق حادث به ترتیب عبارتند از

$$T = \frac{1}{4\pi r_h} = \frac{1}{8\pi GM}, \quad S = \frac{A}{4L_p^2}, \quad (3)$$

که در آن $A = 4\pi r_h^2 = 16\pi (GM)^2$ مساحت افق حادث سیاهچاله است. اگر سیاهچاله را مانند یک جعبه سیاه به ابعاد $2r_h$ در نظر بگیریم می‌توان عدم قطعیت در موقعیت یک ذره تابش شده را به صورت زیر محاسبه کرد

$$\Delta x = 2r_h = 2\sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \sqrt{\frac{A}{\pi}}. \quad (4)$$

در اثر جذب یا تابش یک ذره با انرژی $dM \approx cdp$ مساحت سیاهچاله به صورت زیر تغییر می‌کند

$$dA = 8\pi r_h dr_h = 32\pi G^2 M dM = 32\pi G^2 M dp, \quad c \equiv 1. \quad (5)$$

اینک اثرات گرانشی را از طریق معادله (۲) در معادله (۵) وارد می‌کنیم

$$dA_{(GUP)} = \left[1 + \frac{\alpha L_p^2}{(\Delta x)^2} + 2 \frac{\alpha^2 L_p^4}{(\Delta x)^4} + 5 \frac{\alpha^3 L_p^6}{(\Delta x)^6} + \dots \right] dA. \quad (6)$$

با استفاده از معادله (۴) و پس از انتگرالگیری می‌توان معادله (۶) را به صورت زیر نوشت

$$A_{(GUP)} = A + \pi\alpha L_p^2 \ln A - 2 \frac{\pi^2 \alpha^2 L_p^4}{A} + \dots + Const. \quad (7)$$

با استفاده از معادله (۷) در معادلات (۳) می‌توان دمای تعمیم یافته هاوکینگ را در افق سیاهچاله و آنترپی تعمیم یافته سیاهچاله را به صورت زیر محاسبه کرد

$$T_{(GUP)} = \frac{1}{32\pi G^2 M} \left(\frac{1}{4L_p^2} + \frac{\pi\alpha}{4A} + \frac{\pi^2 \alpha^2}{8} \frac{4L_p^2}{A^2} + \dots \right)^{-1} = T(1 - 4\alpha T^2 L_p^2 - 32\alpha^2 T^4 L_p^4 - \dots),$$

$$S_{(GUP)} = S + \frac{\pi\alpha}{4} \ln S - \frac{\pi^2 \alpha^2}{8} S^{-1} + \dots + Const., \quad (8)$$

با استفاده از معادله (۱) می‌توان آهنگ تونل زنی تعمیم یافته را در افق حادث این سیاهچاله محاسبه کرد

$$\Gamma_{(GUP)} = \Gamma \exp \left(\frac{\pi\alpha}{4} \ln S - \frac{\pi^2 \alpha^2}{8} S^{-1} + \dots + Const. \right). \quad (9)$$

معادلات (۸) و (۹) به ترتیب تصحیحات اعمال شده بر دما، آنترپی و آهنگ تونل زنی را در افق حادث سیاهچاله شوارزشیلد نشان می‌دهند. این کمیتها بر اساس اصل عدم قطعیت تعمیم یافته محاسبه شده‌اند.

۳- تصحیحات گرانشی ناشی از رابطه پاشندگی تغییر یافته: رابطه پاشندگی در محدوده طول پلانک به

صورت زیر تغییر داده می شود

$$p^2 = E^2 - \mu^2 + \alpha_1 L_p^2 E^4 + \alpha_2 L_p^4 E^6 + O(L_p^6 E^8), \quad (10)$$

که در آن α_i ضرایب ثابتی هستند. m جرم حالت سکون و پارامتر μ در سمت راست معادله فوق کمیته است مرتبط با جرم حالت سکون و $\mu \neq m$. اگر تمام ضرایب α_i صفر شوند در این صورت $\mu = m$. معادله (۱۰) که به رابطه پاشندگی تغییر یافته موسوم است برای توجیه بعضی از پدیده های فیزیکی در محدوده طول پلانک و در محدوده گرانش کوانتومی مورد استفاده قرار گرفته است. در این قسمت قصد داریم با استفاده از این رابطه به بررسی ترمودینامیک سیاهچاله ها و تابش کوانتومی آنها بپردازیم و از این طریق با احتساب اثرات گرانشی تصحیحاتی را بر تابش سیاهچاله ها اعمال کنیم. با دیفرانسیل گیری از معادله (۱۰) و معکوس کردن نتایج داریم

$$dE = dp \left[1 - \frac{3\alpha_1}{2} L_p^2 E^2 - \left(\frac{5\alpha_2}{2} - \frac{23\alpha_1^2}{8} \right) L_p^4 E^4 \right]. \quad (11)$$

هنگام مطالعه رابطه پاشندگی تغییر یافته، یا ذرات بدون جرم فرض می شوند یا در محدوده انرژیهای بالا از جرم آنها صرف نظر می شود. به همین دلیل در استخراج معادله فوق از پارامتر μ صرف نظر شده است. بر اساس نظریه میدانهای

کوانتومی رابطه بین انرژی و عدم قطعیت در موقعیت ذره به صورت $E \geq \frac{1}{\Delta x}$ است. با استفاده از معادله (۱۱) داریم

$$E \Delta x \geq 1 - \frac{3\alpha_1}{2} \frac{L_p^2}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{5\alpha_2}{2} - \frac{23\alpha_1^2}{8} \right) \frac{L_p^4}{(\Delta x)^4}. \quad (12)$$

چنانچه ذره ای با انرژی E و بعد $l \approx \Delta x$ توسط یک سیاهچاله جذب یا تابش شود؛ تغییر در مساحت افق حادث سیاهچاله با رابطه زیر مشخص می شود [۴]

$$\Delta A_{\min} = 4L_p^2 E \Delta x \ln 2, \quad (13)$$

$$\frac{dS}{dA} \approx \frac{\Delta S_{\min}}{\Delta A_{\min}} \approx \frac{1}{4L_p^2 E \Delta x}. \quad (14)$$

از ترکیب معادلات (۱۲) و (۱۴) داریم

$$\frac{dS}{dA} \approx \frac{\Delta S_{\min}}{\Delta A_{\min}} \approx \frac{1}{4L_p^2} \left[1 - \frac{3\alpha_1}{2} \frac{L_p^2}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{5\alpha_2}{2} - \frac{23\alpha_1^2}{8} \right) \frac{L_p^4}{(\Delta x)^4} \right]^{-1}. \quad (15)$$

اگر سیاهچاله را مانند یک جعبه سیاه به ابعاد $2r_h$ در نظر بگیریم؛ عدم قطعیت در موقعیت یک ذره تابش شده با رابطه زیر داده می شود

$$\Delta x = 2r_h = 2\sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \sqrt{\frac{A}{\pi}}. \quad (16)$$

از ترکیب معادلات (۱۵) و (۱۶) پس از انتگرالگیری داریم

$$S_{(MDR)} = \frac{1}{4L_p^2} \left[A + \frac{3\pi\alpha_1}{2} L_p^2 \ln A - \left(\frac{5\alpha_2}{2} - \frac{5\alpha_1^2}{8} \right) \frac{\pi^2 L_p^4}{A} \right] + Const. \quad (17)$$

با استفاده از رابطه آنتروپی - مساحت هاوکینگ - بیکنشتاین می توان معادله (۱۷) را به صورت زیر نوشت

$$S_{(MDR)} = S + \frac{3\pi\alpha_1}{8} \ln S - \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{4} \right) \frac{5\pi^2}{32} (S)^{-1} + Const. \quad (18)$$

با استفاده از معادله (۱۸) می توان آهنگ تونل زنی تعمیم یافته را در افق حادث این سیاهچاله را به صورت زیر محاسبه کرد

$$\Gamma_{(MDR)} = \exp\left(S + \frac{\pi\alpha}{4} \ln S - \frac{\pi^2\alpha^2}{8} S^{-1} + \dots + Const.\right) = \Gamma \exp\left(\frac{\pi\alpha}{4} \ln S - \frac{\pi^2\alpha^2}{8} S^{-1} + \dots + Const.\right) \quad (19)$$

با استفاده از رابطه ترمودینامیکی $dM = TdS$ می توان دمای هاوکینگ تغییر یافته را در افق سیاهچاله به صورت زیر به دست آورد

$$T_{(MDR)} = T \left[1 - \frac{3\pi\alpha_1}{2A} L_p^2 - \left(5\alpha_2 - \frac{23}{4}\alpha_1^2 \right) \frac{\pi^2}{2A^2} L_p^4 \right] = T \left[1 - 6\alpha_1 T^2 L_p^2 - 8 \left(5\alpha_2 - \frac{41\alpha_1^2}{4} \right) T^4 L_p^4 \right]. \quad (20)$$

معادلات (۱۸) تا (۲۰) به ترتیب تصحیحات اعمال شده بر آنتروپی، آهنگ تونل زنی و دمای هاوکینگ را در افق حادث سیاهچاله شوارزشیلد نشان می دهند. این کمیتها بر اساس رابطه پاشندگی تغییر یافته محاسبه شده‌اند.

از مقایسه نتایج به دست آمده ناشی از به کارگیری اصل عدم قطعیت تعمیم یافته در معادلات (۸) و (۹) با نتایج محاسبات ناشی از رابطه پاشندگی تغییر یافته در معادلات (۱۸) تا (۱۹) مشخص می شود که چنانچه ضرایب ثابت در روابط $\alpha_2 = \frac{41}{45}\alpha^2$ و $\alpha_1 = \frac{2}{3}\alpha$ صدق کنند؛ خواهیم داشت

$$T_{(GUP)} = T_{(MDR)}, \quad S_{(GUP)} = S_{(MDR)}, \quad \Gamma_{(GUP)} = \Gamma_{(MDR)}. \quad (21)$$

۴- نتیجه گیری: با وجود این که نظریه تونل زنی کوانتومی تابش سیاهچاله‌ها توسط پاریخ و همکارانش به خوبی پایه گذاری شده است؛ اعمال تصحیحات گرانشی بر ترمودینامیک و آهنگ تونل زنی در افق سیاهچاله‌ها همچنان در کانون توجه محققین قرار دارد. احتساب اثرات گرانشی گاهی از طریق اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و گاهی از طریق رابطه پاشندگی تغییر یافته صورت می‌گیرد. در این مقاله تصحیحات ناشی از اثرات گرانشی بر ترمودینامیک سیاهچاله از هر دو روش تا مرتبه توان چهارم طول پلانک محاسبه و مقایسه شده است. نتایج محاسبات نشان می دهند که انتخاب مناسب ضرایب ثابت منجر به تصحیحات یکسانی در هر دو روش می‌شود.

۵- مرجع ها:

- [1] S.W. Hawking, Nature, 248(1974)30; S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43(1975)199; 46(1976)206.
 [2] P. Kraus, F. Wilczek, Nucl. Phys. B, 433(1995)403; P. Kraus, F. Wilczek, Nucl. Phys. B, 437(1995)231; P Kraus, E. Keski-Vakkuri, Nucl. Phys. B, 491(1997)249; M.K. Parikh, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett.85(2000)5042; M.K Parikh, F. Wilczek, Phys. Lett. B, 546(2002)189, M.K. Parikh, F. Wilczek, Int. J. Mod. Phys. D, 13(2004)2351; B.R Majhi 1_ and E.C. Vagenas Phys. Lett. B 725 (2013) 477; S. Gangopadhyay, A. Dutta dy, A. Saha, Gen. Rel. Grav. 46 (2014) 1661.
 [3] Farmany, A., Dehghani, M., Setare, M.R, Mortazavi, S.S. Phys. Lett. B, 682(2009)114; Dehghani, M., Farmany, A. Phys. Lett. B, 675 (2009) 460; Dehghani, M. Phys. Lett. A, 374 (2010)3012; Han, X., Li, H., Ling, Y.: Phys. Lett. B, 666(2008) 121; Shu, F.-W., Shen, Y.-G.: Phys. Lett. B, 661(2008)295; Wang, F.J., Gui, Y.X., Ma, C.R.: Phys. Lett. B, 660(2008)144.
 [4] G. Amelino-Camelia, M. Arzano, Y. Ling and G. Mandanici, Class.Quant.Grav. 23 (2006) 2585-2606.