

سیاهچاله های دیلاتونی در ابعاد بالاتر جفت شده با الکترودینامیک غیرخطی

احمد شیخی^۱، علی کاظمی^۱

^۱بخش فیزیک و رصدخانه ابوریحان بیرونی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز

^۲قطب علمی نجوم و اختر فیزیک ایران

چکیده

در این مقاله با استفاده از یک لاگرانژی بورن-اینفلدگونه نمایی، به بررسی جواب های سیاهچاله دیلاتونی در ابعاد بالاتر جفت شده با الکترودینامیک غیرخطی می پردازیم. همچنین کمیت های پایا و ترمودینامیکی جواب را حساب کرده و درستی قانون اول را برای آنها بررسی می کنیم.

مقدمه

یکی از مشکلات نظریه ماکسول، بی نهایت شدن خود-انرژی ذره باردار در مبدأ است. برای حل این مشکل، نظریه های الکترودینامیک غیرخطی معرفی شده اند. اولین لاگرانژین پیشنهادی برای این منظور، لاگرانژی بورن-اینفلد بوده است [۱]. در سال های اخیر لاگرانژی های غیرخطی دیگری از قبیل نمایی و لگاریتمی نیز پیشنهاد شده است [۲-۳]. در این مقاله، ما به بررسی الکترودینامیک نمایی غیرخطی که شامل یک میدان دیلاتونی در کنش است در همه ابعاد می پردازیم. در این حالت جواب ها به صورت سیاهچاله خواهند بود و رفتار مجانبی آنها به دلیل حضور دیلاتون، تخت، دوسپته و آنتی دوسپته نیست. ما تأثیرات میدان دیلاتونی و غیرخطی بودن را روی جواب ها بررسی می کنیم. همچنین خواص فیزیکی و کمیات ترمودینامیکی جواب ها را محاسبه کرده و نشان می دهیم که این کمیات در قانون اول ترمودینامیک صدق می کنند.

کنش و معادلات میدان

ما کنش n - بعدی ($n > 3$) را در گرانث جفت شده با میدان های دیلاتون و الکترودینامیک غیرخطی در نظر می

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^n x \sqrt{-g} \left(\mathcal{R} - \frac{4}{n-2} (\nabla\Phi)^2 - V(\Phi) + L(F, \Phi) \right), \quad (1) \quad \text{گیریم}$$

که \mathcal{R} و Φ به ترتیب اسکالر خمشی ریچی و میدان دیلاتون هستند و $V(\Phi)$ پتانسیل برای Φ است. لاگرانژی الکترودینامیک نمایی غیرخطی جفت شده با میدان دیلاتون، $L(F, \Phi)$ ، را بصورت زیر انتخاب می کنیم

$$L(F, \Phi) = 4\beta^2 e^{4\alpha\Phi/(n-2)} \left[\exp\left(-\frac{e^{-8\alpha\Phi/(n-2)} F^2}{4\beta^2}\right) - 1 \right] \quad (2)$$

که α یک ثابت است که قدرت جفت شدگی میدان الکترودینامیک و اسکالر را معین می کند. برای راحتی قرار می دهیم:

$$L(F, \Phi) = 4\beta^2 e^{4\alpha\Phi/(n-2)} \mathcal{L}(Y), \quad (3)$$

که در اینجا تعریف کرده ایم:

$$\mathcal{L}(Y) = \exp(-Y) - 1, \quad (4)$$

$$Y = \frac{e^{-8\alpha\Phi/(n-2)} F^2}{4\beta^2}. \quad (5)$$

برای به دست آوردن معادلات میدان، کنش (۱) را نسبت به میدان گرانشی $g_{\mu\nu}$ ، میدان دیلاتون Φ و میدان الکتریکی A_μ و ردش می دهیم. داریم:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{4}{n-2} \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} V(\Phi) \right) - 2e^{-4\alpha\Phi/(n-2)} \partial_Y \mathcal{L}(Y) F_{\mu\eta} F_\nu{}^\eta + \frac{4\beta^2}{n-2} e^{4\alpha\Phi/(n-2)} [2Y \partial_Y \mathcal{L}(Y) - \mathcal{L}(Y)] g_{\mu\nu}, \quad (6)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{n-2}{8} \frac{\partial V}{\partial \Phi} + 2\alpha\beta^2 e^{4\alpha\Phi/(n-2)} [2Y \partial_Y \mathcal{L}(Y) - \mathcal{L}(Y)], \quad (7)$$

$$\nabla_\mu \left(e^{-4\alpha\Phi/(n-2)} \partial_Y \mathcal{L}(Y) F^{\mu\nu} \right) = 0. \quad (8)$$

در حالت الکترودینامیک خطی داریم $\mathcal{L}(Y) = -Y$ و دستگاه معادلات (۶) - (۸) به معادلات آشنای گرانش انیشتین - مکسول - دیلاتون کاهش میابد. فرض می کنیم متریک فضازمان دارای شکل زیر است:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 R^2(r) d\Omega_{n-2}^2, \quad (9)$$

که نشان دهنده ی متریک یک کره واحد $(n-2)$ - بعدی است و $R(r)$ و $f(r)$ توابعی از r هستند که باید تعیین شوند. ابتدا از معادله ی میدان الکترومغناطیسی (۸) انتگرال گیری می کنیم. برای این منظور فرض می کنیم همه مولفه های $F_{\mu\nu}$ به جز F_{tr} صفر هستند:

$$F_{tr} = \frac{qe^{4\alpha\Phi/(n-2)}}{(rR)^{n-2}} \exp\left[-\frac{1}{2}L_W\left(\frac{q^2}{\beta^2(rR)^{2n-4}}\right)\right] \quad (10)$$

که q ثابت انتگرال گیری است که مرتبط با بار الکتریکی سیاهچاله است، و $L_W(x) = LambertW(x)$ تابع لمبرت است. به منظور یافتن جواب های تحلیلی دقیق معادلات میدان (۶) و (۷) برای ثابت جفت شدگی دیلاتون دلخواه، فرض می کنیم که پتانسیل دیلاتون شامل دو جمله ی لیوویل است [۴]

$$V(\Phi) = 2\Lambda_0 e^{2\zeta_0\Phi} + 2\Lambda e^{2\zeta\Phi}, \quad (11)$$

که $\Lambda_0, \Lambda, \zeta_0$ و ζ ثابت هستند. دستگاه معادلات (۶) و (۷) شامل سه تابع نامشخص $f(r)$ و $R(r)$ و $\Phi(r)$ است. برای حل آن ها فرض می کنیم [۵]

$$R(r) = e^{2\alpha\Phi/(n-2)} \quad (12)$$

با جایگذاری (۱۲)، میدان الکترومغناطیسی (۱۰) و متریک (۹) در معادلات میدان (۶) و (۷) می توان حل های زیر را به دست آورد

$$f(r) = -\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1} b^{-\gamma} r^\gamma - \frac{m}{r^{1-\gamma}} + \frac{(\Lambda+2\beta^2)(\alpha^2+1)^2 b^\gamma}{\alpha^2-3} r^{2-\gamma} - \frac{2\beta q}{r^{1-\gamma}} (\alpha^2+1) b^\gamma \int r^{-\gamma} \left(\sqrt{L_W(\eta)} - \frac{1}{\sqrt{L_W(\eta)}} \right) dr, \quad (13)$$

$$\Phi(r) = \frac{(n-2)\alpha}{2(1+\alpha^2)} \ln\left(\frac{b}{r}\right), \quad (14)$$

که b یک ثابت دلخواه است و $\gamma = 2\alpha^2/(1+\alpha^2)$

$$\eta \equiv \frac{q^2 b^{(2-n)\gamma} r^{(n-2)(2-\gamma)}}{\beta^2} \quad (15)$$

در عبارت فوق، m به عنوان یک ثابت انتگرال دیری ظاهر می شود و به جرم سیاهچاله ارتباط دارد. جرم مربوط به حل (۱۳) چنین است.

$$M = \frac{b^{(n-2)\gamma/2} (n-2) \omega_{n-2}}{16\pi(\alpha^2+1)} m. \quad (16)$$

حل های به دست آمده در صورتی دستگاه معادلات (۶) و (۷) را کاملاً ارضا می کنند که داشته باشیم

$$\zeta_0 = \frac{2}{\alpha(n-2)}, \quad \zeta = \frac{2\alpha}{n-2}, \quad \Lambda_0 = \frac{(n-2)(n-3)\alpha^2}{2b^2(\alpha^2-1)} \quad (17)$$

قابل ذکر است که در اینجا Λ یک پارامتر آزاد است که نقش ثابت کیهان شناسی را دارد که برای راحتی در آینده آن را به صورت $\Lambda = -(n-1)(n-2)/2l^2$ بازتعریف می کنیم که l ثابتی با ابعاد طول است. انتگرالگیری از معادله (۱۳) را می توان به کمک نرم افزار انجام داد. نتیجه نهایی را می توان چنین نوشت:

$$f(r) = -\frac{(n-3)(\alpha^2+1)^2}{(\alpha^2-1)(\alpha^2+n-3)} b^{-\gamma} r^\gamma - \frac{m}{r^{n-3-(n-2)\gamma/2}} + \frac{2(\Lambda+2\beta^2)(\alpha^2+1)^2 b^\gamma}{(n-2)(\alpha^2-n+1)} r^{2-\gamma} + \frac{2\beta q(\alpha^2+1)^4 b^{(4-n)\gamma/2}}{(n-2)^2(\alpha^2-1)^2} \left(\frac{\beta^2 b^{(n-2)\gamma}}{q^2} \right)^{\frac{1-\gamma}{(n-2)(\gamma-2)}} r^{(n-2)\gamma/2-n+3} \times \left(\frac{1-\alpha^2}{2n-4} \right)^{\frac{2-n+\gamma}{(\gamma-2)(2n-4)}} \left\{ -(n-2)^2(\gamma-2)^2 \left[\Gamma\left(\frac{\alpha^2+3n-7}{2n-4}, \frac{1-\alpha^2}{2n-4} L_W(\eta)\right) - \Gamma\left(\frac{\alpha^2+3n}{2n-4} \right) \right] + (\gamma-1)^2 \left[\Gamma\left(\frac{\alpha^2-n+1}{2n-4}, \frac{1-\alpha^2}{2n-4} L_W(\eta)\right) - \Gamma\left(\frac{\alpha^2-n+1}{2n-4} \right) \right] \right\} \quad (18)$$

که $\Gamma(a, z), \Gamma(a)$ توابع گاما هستند. در غیاب میدان دیلاتون ($\alpha = 0 = \gamma$) با بسط دادن حل (۱۸) در حد β

$\rightarrow \infty$ ، به شکل سیاهچاله RN استاتیکی متقارن کروی در فضا زمان AdS در حد $\beta \rightarrow \infty$ می‌رسیم

$$f(r) = 1 - \frac{m}{r^{n-3}} + \frac{r^2}{l^2} + \frac{2q^2}{(n-2)(n-3)r^{2n-6}} - \frac{1}{2\beta^2(n-2)(3n-7)} \frac{q^4}{r^{4n-10}} + O\left(\frac{1}{\beta^4}\right) \quad (19)$$

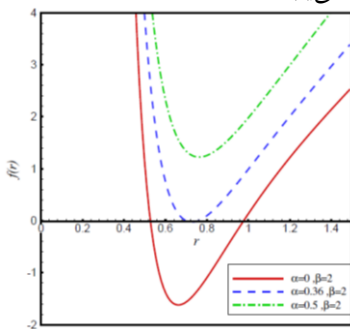
خصوصیات فیزیکی حل‌ها

با ترکیب کردن معادلات (۱۲) و (۱۴) با (۱۰)، برای میدان الکتریکی داریم

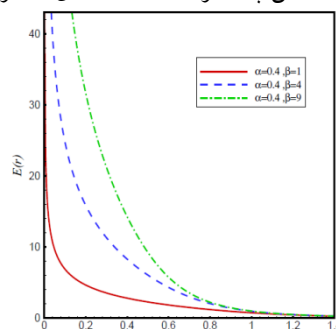
$$E_{tr} = \frac{qb^{(4-n)\gamma/2}}{r^{n-2+2\gamma-n\gamma/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}LW\left(\frac{q^2b^{-(n-2)\gamma}}{\beta^2r^{(n-2)(2-\gamma)}}\right)\right] \quad (20)$$

با توجه به نمودارهای ۱ و ۲، در حالت $\alpha=0$ میدان الکتریکی مقداری محدود در نزدیکی مبدأ دارد ولی در $r=0$ میدان واگرا می‌شود و این برخلاف میدان بورن-اینفلد است. این واگرایی با افزایش α ، بیشتر می‌شود. همچنین اگر نمودار میدان را به ازای مقادیر مختلف β رسم کنیم، می‌بینیم که با افزایش β ، میدان الکتریکی در نزدیکی مبدأ واگرا می‌شود. این نتیجه درستی است زیرا به ازای β های بزرگ باید به الکترودینامیک ماکسول برسیم. (شکل ۲ را ببینید)

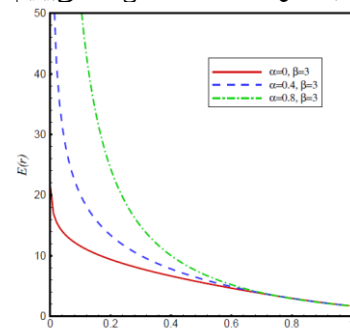
ما با بررسی ثابت کریشمن متوجه وجود یک تکینگی ذاتی در $r=0$ شدیم. برای بررسی افق‌ها نمودار $f(r)$ را بر حسب r رسم کرده‌ایم. جواب سیاهچاله با دو افق، سیاهچاله فرینه و یا تکینگی عریان، وابسته به پارامترهای متریک است. به عنوان مثال در شکل ۳، می‌بینیم که با کاهش پارامتر α ، تعداد افق‌ها افزایش می‌یابد.



شکل ۳: رفتار $f(r)$ بر حسب r برای $q=2$ و $m=2.5$ و $n=6$



شکل ۲: رفتار $E(r)$ بر حسب r برای $q=1$ و $b=1$ و $n=6$



شکل ۱: رفتار $E(r)$ بر حسب r برای $b=1$ و $q=2$ و $n=6$

$$m(r_+) = -\frac{(n-3)(\alpha^2+1)^2}{(\alpha^2+n-3)(\alpha^2-1)} b^{-\gamma} r_+^{2\gamma+n-3-n\gamma/2} + \frac{4(\Lambda+2\beta^2)(\alpha^2+1)^2 b^\gamma}{(2n-4)(\alpha^2-n+1)} r_+^{n-1-n\gamma/2} + \frac{4\beta q(\alpha^2+1)^2 b^{(4-n)\gamma/2}}{n-2} \left(\frac{\beta^2 b^{(n-2)\gamma}}{q^2}\right)^{\frac{1-\gamma}{(n-2)(\gamma-2)}} L_W^{\frac{\alpha^2-n+1}{2n-4}}(\eta_+) \times \left\{ \frac{L_W^2(\eta_+)}{\alpha^2+3n-7} F\left(\frac{\alpha^2+3n-7}{2n-4}, \frac{\alpha^2+5n-11}{2n-4}, \frac{\alpha^2-1}{2n-4} L_W(\eta_+)\right) - \frac{1}{\alpha^2-n+1} F\left(\frac{\alpha^2-n+1}{2n-4}, \frac{\alpha^2+n-3}{2n-4}, \frac{\alpha^2-1}{2n-4} L_W(\eta_+)\right) \right\} \quad (21)$$

برای پارامتر جرم داریم

کمیت‌های پایسته و ترمودینامیکی

دمای هاوکینگ سیاهچاله ی ENd در شعاع خارجی r_+ را می‌توان چنین نوشت

$$T_+ = \frac{f'(r_+)}{4\pi} = -\frac{(\alpha^2+1)}{4\pi} r_+^{1-\gamma} \left\{ \frac{(n-3)b^{-\gamma} r_+^{2\gamma-2}}{\alpha^2-1} + \frac{2(\Lambda+2\beta^2)b^\gamma}{n-2} - \frac{4\beta q}{n-2} r_+^{(n-2)(\gamma-2)/2} b^{(4-n)\gamma/2} \left(\frac{1}{\sqrt{L_W(\eta_+)}} - \sqrt{L_W(\eta_+)} \right) \right\} \quad (22)$$

به ازای Γ های بزرگ، دما به سمت یک ثابت مستقل از پارامترها، میل می‌کند. برای مقادیر کوچک r_+ ، دما می‌تواند منفی شود و ما با یک تکینگی عریان مواجه شویم. در نهایت وقتی دما صفر شود، سیاهچاله فرینه داریم. آنتروپی سیاهچاله ی ENd کماکان از قانون مشهور به قانون مساحت آنتروپی تبعیت می‌کند. به سادگی می‌توان نشان داد

$$S = \frac{A}{4} = \frac{b^{(n-2)\gamma/2} r_+^{(n-2)(1-\gamma/2)} \omega_{n-2}}{4} \quad (23)$$

پتانسیل برداری برای این سیاهچاله برابر با:

$$A_t = b^\gamma \beta (\alpha^2 + 1) \left(\frac{\beta^2 b^{(n-2)\gamma}}{q^2} \right)^{\frac{\alpha^2-1}{2n-4}} \left(\frac{\alpha^2-1}{4-2n} \right)^{\frac{\alpha^2+n-3}{4-2n}} \times \left\{ -\frac{1}{2(n-2)} \Gamma \left(\frac{\alpha^2+n-3}{2n-4}, \frac{1-\alpha^2}{2n-4} L_W(\eta) \right) + \frac{1}{\alpha^2-1} \left[\Gamma \left(\frac{\alpha^2+3n-7}{2n-4}, \frac{1-\alpha^2}{(2n-4)} L_W(\eta) \right) - \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{\alpha^2+n-3}{2n-4} \right) \right] \right\} \quad (24)$$

و با توجه به تعریف پتانسیل در بینهایت، این رابطه روی افق سیاهچاله، معادل پتانسیل U هست. برای فواصل دور مقدار پتانسیل صفر است و در نزدیکی مبدأ، وابسته به پارامترها، مقداری محدود دارد.

برای تحقیق قانون اول ترمودینامیک، نیاز به رابطه اسمار برای جرم داریم. برای این سیاهچاله این رابطه به صورت زیر

بدست می‌آید [۴]

$$M(S, Q) = -\frac{b^{-\alpha^2} (n-2)(n-3)(\alpha^2+1)(4S)^{\frac{\alpha^2+n-3}{n-2}}}{16\pi(\alpha^2+n-3)(\alpha^2-1)} + \frac{(\alpha^2+1)b\alpha^2(\Lambda+2\beta^2)}{8\pi(\alpha^2-n+1)} (4S)^{\frac{-\alpha^2+n-1}{n-2}} + \frac{b^\gamma \beta Q}{(2n-4)} \frac{(\alpha^2+1)^3}{(\alpha^2-1)^2} \left(\frac{\beta^2 b^{(n-2)\gamma}}{16\pi^2 Q^2} \right)^{\frac{\alpha^2-1}{2n-4}} \left(\frac{1-\alpha^2}{2n-4} \right)^{\frac{\alpha^2+n-3}{4-2n}} \times \left\{ -(n-2)^2 (\gamma-2)^2 \left[\Gamma \left(\frac{\alpha^2+3n-7}{2n-4}, \frac{1-\alpha^2}{2n-4} L_W(\zeta) \right) - \Gamma \left(\frac{\alpha^2+3n-7}{2n-4} \right) \right] + (\gamma-1)^2 \left[\Gamma \left(\frac{\alpha^2-n+1}{2n-4}, \frac{1-\alpha^2}{2n-4} L_W(\zeta) \right) - \Gamma \left(\frac{\alpha^2-n+1}{2n-4} \right) \right] \right\} \quad (25)$$

که $\zeta = \frac{\pi^2 Q^2}{S^2 \beta^2}$ پس از محاسبات عددی می‌توانیم نشان دهیم که کمیات به دست آمده، قانون اول ترمودینامیک سیاهچاله‌ها را ارضا می‌کنند

$$dM = TdS + UdQ. \quad (26)$$

نتیجه گیری

در این مقاله، ما به مطالعه الکتروستاتیک نمایی غیرخطی جفت شده با میدان نرده‌ای دیلاتونی در ابعاد بالا پرداخته‌ایم. در ابتدا با در نظر گرفتن لاگرانژی آن، معادلات میدان را بدست آوردیم و بعد با در نظر گرفتن یک فرض مناسب، دسته‌ای از جواب‌های سیاهچاله باردار ایستای متقارن را در حضور الکتروستاتیک غیرخطی دیلاتونی در ابعاد بالا را بدست آورده‌ایم. در حد β های بزرگ، جواب‌های ما به سیاهچاله دیلاتونی باردار در حضور میدان خطی ماکسول تبدیل می‌شوند و در غیاب دیلاتون، سیاهچاله باردار در حضور میدان غیرخطی نمایی را توصیف می‌کنند. بسته به پارامترها، جواب‌ها می‌توانند نشان دهنده سیاهچاله با دو افق، سیاهچاله فرینه با یک افق، یا تکینگی عریان باشند. بخاطر وجود میدان دیلاتونی رفتارمجبانی جواب‌ها، تخت، دوسپته و آنتی-دوسپته نخواهد بود. در نهایت با بدست آوردن کمیات ترمودینامیکی، درستی آنها را با تصدیق قانون اول ترمودینامیک بررسی نمودیم.

مرجع‌ها

- [1] M. Born and L. Infeld, Proc. R. Soc. A 144(1934)425.
- [2] S. H. Hendi, Annals of Phys. 333, (2013)282.
- [3] S. H. Hendi, A. Sheykhi, Phys. Rev D 88 (2013) 044044.
- [4] A. Sheykhi, N. Riazi, Phys. Rev D 75 (2007) 024021.
- [5] A. Sheykhi, Int. J. Mod. Phys. D Vol. 18, No. 1 (2009) 25.