یک هامیلتونی با تقارن پیمانه‌ای برای آنیون‌ها

مهدی دهقانی [1]، الهه سلیمانی‌پور [2]، مجید منعم‌زاده [2]

[1] *گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد*

[2] *دانشکده فیزیک دانشگاه کاشان، کاشان*

چکیده

هدف ما در این مقاله فرمول‌بندی هامیلتونی یک مدل برای ذره آزاد نسبیتی همراه با درجه آزادی اسپینی و افزایش تقارن‌های پیمانه‌ای آن است. این مدل در دو بعد فضایی به عنوان مدلی برای توصیف رفتار آنیون‌ها به کار برده می‌شود. به این منظور فضای فاز این مدل را ساخته و با گسترش ابعاد این فضا هامیلتونی را در آن بازنویسی می‌کنیم. اساس کار ما تبدیل قیدهای نوع دوم مدل به قیدهای نوع اول، که مولد تبدیل پیمانه‌ای یک مدل هستند، با روش غوطه‌وری BFT است.

مقدمه

درمدل کوانتومی شده‌ی یک نظریه با قیدهای نوع اول علاوه بر معادله شرودینگر، حالت‌های فیزیکی هم باید در معادلاتی که ترجمه‌ی عملگری قیدهای نوع اول هستند، صدق کنند و این خود کمک بزرگی برای یافتن حالت‌های کامل دستگاه است. این معادلات اتحادی به نوعی شکل کوانتمی شده‌ی تقارن‌های پیمانه‌ای دستگاه هستند که از بین بینهایت حالت یکسان در فضای هیلبرت یکی را برمی‌گزینند. مشکل ما در دستگاه‌های نوع دوم کنار گذاشتن درجه‌های آزادی اضافه بدون آسیب رساندن به درجه‌های آزادی فیزیکی است. این کار اگرچه به کمک کروشه دیراک امکان پذیر است اما کمکی در مسأله کوانتمی شده، نمی‌کند.

بر اساس روش تثبیت پیمانه ای، در این حالت قیدهای نوع اول همراه با شرط های تثبیت پیمانه ای خود، یک دستگاه نوع دوم را می‌سازند. با الهام از این روش یک مجموعه از قیدهای نوع دوم را می‌توان به عنوان نوع اول‌هایی همراه با شرط تثبیت خود در نظر گرفت. محاسبه کروشه دیراک به معنای کوچک کردن فضای فاز اولیه است. بنابراین اگر بخواهیم از مجموعه نوع دومی تنها نوع اول‌ها را برگزینیم و شرایط تثبیت را کنار بگذاریم باید فضای فاز اولیه را بزرگ‌تر کرده و قیدها و هامیلتونی دستگاه را تصحیح کنیم. درنتیجه یک دستگاه پیمانه‌ای داریم. برای انجام این کار روش‌های گوناگونی وجود دارد: قدیمی‌ترین آنها روش انتقال استاکلبرگ (Stueckelberg) است. از دیگر این روش‌ها می‌توان به غوطه‌وری BFT اشاره کرد.

ما این روش را برای تبدیل قیدهای یک دستگاه مخلوط به دستگاه نوع اول، انتخاب می‌کنیم. الگوریتم انتخابی ما برای انجام این کار در مرجع [1] معرفی شده است. مدل خاصی که این روش را بر روی آن اعمال می‌کنیم توسط چایچیان و دیگران [2] برای توصیف آنیون‌ها در ابعاد پایین معرفی شده است. از آنجا که بررسی برهمکنش این ذرات با میدان (پیمانه‌ای) الکترومغناطیس مورد نظر فیزیکدان‌ها است، تلاش می‌کنیم تا با افزودن درجه‌های آزادی پیمانه‌ای به این مدل هامیلتونی، برهمکنش‌های موجود با پیمانه ای کردن دستگاه را پیدا کنیم.

روش BFT

فرض کنیم هامیلتونی یک دستگاه مقید با قیود نوع دوم H_0 باشد. اگر فضای فاز توصیف کننده‌ی دستگاه را با مجموعه‌ی دوتایی‌های (q_i, p_i) ، $(i=1,2...K)$ نشان دهیم و جبر بین مجموعه‌ی قیدهای نوع دوم این دستگاه

ماتریس با عناصر ثابت $\Delta_{\alpha\beta}=\{\Theta_\alpha,\Theta_\beta\}$ باشد، برای این که این دستگاه را به دستگاه نوع اول تبدیل کنیم لازم است فضای فاز را با معرفی متغیرهای کمکی گسترش دهیم. متغیرهای کمکی به گونه‌ای عبارت‌های قیدی را تصحیح می‌کنند که جبر قیدها به یک جبر لی با ضرایب ساختار ثابت تبدیل شود. با توجه به این که تعداد قیود نوع دوم همواره زوج است، تعداد η^α ها نیز زوج خواهد بود. ساختار پواسونی این متغیرهای کمکی از ساختار پواسونی بین قیدهای ابتدایی به دست می‌آید. در این روش قیود مرتبه اول شده در فضای فاز گسترش یافته، $(q_i,p_i)\oplus\eta^\alpha$، $(i=1,2..K)$ و $(\alpha=1,2..m)$ به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\tau_\alpha=\tau_\alpha(q,p,\eta),\quad (\alpha=1,2...m) \tag{1}$$

همراه با فضای فاز قبلی، ساختار متغیرهای فضای فاز گسترش‌یافته به صورت زیر است:

$$\{\eta^\alpha,q_i\}=0=\{\eta^\alpha,p_i\} \tag{2}$$

$$\{\eta^\alpha,\eta^\beta\}=\omega^{\alpha\beta} \tag{3}$$

در اینجا $\omega^{\alpha\beta}$ با شرط نوع اول شدن قیدها مشخص می‌شود. تقاضای نهایی ما این است که قیدها در نهایت با هم به طور قوی جابجا شوند و در حدی که متغیرهای کمکی حذف شوند به قیدهای ابتدایی برگردند. برای حل این مجموعه معادله می‌توان قیود نوع اول شده را به صورت سری توانی در نظر گرفت و حل‌های زیادی به‌دست آورد. یک مجموعه از این حل‌ها با دستورالعمل زیر ساخته می‌شوند:

$$B^{(1)}_{\alpha\beta}=\{\tau^{(0)}_{[\alpha},\tau^{(1)}_{\beta\,]}\},\ B^{(n)}_{\alpha\beta}\equiv\sum_{m=0}^{n}\{\tau^{(n-m)}_\alpha,\tau^{(\mathrm{m})}_\beta\}+\sum_{m=0}^{n-2}\{\tau^{(n-m)}_\alpha,\tau^{(\mathrm{m}+2)}_\beta\}_{(\eta)} \tag{4}$$

$$\tau^{(1)}_\alpha=\chi_{\alpha\beta}(q,p)\eta^\beta \tag{5}$$

معادله اساسی BFT به صورت $\Delta_{\alpha\beta}+\chi_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma\lambda}\chi_{\lambda\beta}=0$ ساختار پواسونی قسمت جدید فضای فاز را معین می‌کند. پس از حل معادلات قیدها و هامیلتونی تصحیح می‌شوند.

$$\tau^{(n+1)}_\alpha=-\frac{1}{n+2}\eta^\mu\omega_{\mu\nu}\chi^{\nu\rho}B^{(n)}_{\rho\alpha} \tag{6}$$

$$H^{(n+1)}=-\frac{1}{n+1}\eta^\alpha\omega_{\alpha\beta}\chi^{\alpha\nu}G^{(n)}_\nu \tag{7}$$

که در آن مولدهای تصحیح هامیلتونی به صورت زیر هستند.

$$G^{(0)}_\alpha\equiv\{\tau^{(0)}_\alpha,H^{(0)}\},\ \ G^{(\mathrm{n})}_\alpha\equiv\sum_{m=0}^{n}\{\tau^{(\mathrm{n-m})}_\alpha,H^{(\mathrm{m})}\}+\sum_{m=0}^{n-2}\{\tau^{(\mathrm{n-m})}_\alpha,H^{(\mathrm{m}+2)}\}_{(\eta)}+\{\tau^{(\mathrm{n}+1)}_\alpha,H^{(1)}\}_{(\eta)} \tag{8}$$

یک انتخاب مناسب برای کامل شدن حل‌ها به صورت $\omega=-\Delta,\chi=1$ است.

ذره آزاد نسبیتی

مدل یک ذره آزاد نسبیتی با اسپین دلخواه با لاگرانژی $L=\dfrac{m(\dot{x}\dot{n})}{\sqrt{\dot{n}^2}}$ داده می‌شود.در این مدل بردار فضا گونه‌ی n^μ به عنوان درجه‌ی آزادی اسپینی در نظر گرفته می‌شود و نقطه به معنای مشتق‌گیری نسبت به پارامتر تحول زمان‌ویژه است. یک هدف ما از پیمانه‌ای کردن این مدل آن است که ببینیم آیا می‌توان با گسترش فضای فاز یک درجه آزادی فیزیکی برای اسپین ذره در مدل کلاسیک ذره نسبیتی پیدا کرد. این مدل مخلوطی از هر دو نوع قید را دارد و برای نوع اول کردن به روش انتخابی ما دچار مشکل می‌شود [3] . برای رفع این مشکل ما یک درجه آزادی کمکی به دستگاه اضافه می‌کنیم و در انتها آن را با معادله حرکتش حذف می‌کنیم.

$$L=\frac{m(\dot{x}\dot{n})}{\sqrt{\dot{n}^2}}-\xi_\mu\dot{x}^\mu+\frac{1}{2}\xi^2 \tag{9}$$

در این لاگرانژی x^μ بردار توصیف کننده جایگاه ذره در فضا زمان است و شرط زمان گونه بـرای بـردار درجـه آزادی اسپین $n^2=-1$ خود به صورت یک قید اولیه نوع اول در می‌آید که به هـیچ روشـی نـوع دوم نمـی‌شـود. معـادلات تعریف تکانه ها، همه سرعت‌ها را حل نمی‌کند و همراه با قید گفته شده به سه قید اولیه دیگر می‌رسیم.

$$\Phi_1=n^2+1,\ \ \Phi_2=(P+\xi)^2-m^2,\ \Phi_3=(P+\xi)n,\ \ \Phi_4=P^{(n)}(P+\xi) \tag{10}$$

با انجام تبدیل لژاندر، هامیلتونی کانونی به صورت $H_c=\frac{1}{2}\Pi^2$ به دست می‌آیـد. سـازگاری قیـدهای بـالا ضـرایب نامعین لاگرانژ را تعیین کرده و یک قید جدید به شکل $\Phi_5=\Pi(P+\xi)$ به ما می‌دهد. قید مربوط به شرط فضاگونه نوع اول و بقیه قید ها نوع دوم هستند.

اعمال روش BFT روی مدل ذره نسبیتی آزاد

ماتریس پادمتقارن قیود برای مدل به صورت تا بعی از مربع جرم $\Delta_{14}=4\Delta_{23}=4m^2$ بدسـت مـی آیـد.بـا در نظـر گرفتن $\omega^{\alpha\beta}=-\Delta_{\alpha\beta}$ و $\chi=1$ به راحتی می‌توان نشان داد که جمله‌های تصحیحی به قیـدها تنهـا تـا مرتبـه خطـی وجود دارند. اما جمله‌های اضافه شده به هامیلتونی به خاطر آن که تابع مولد آنها در هیچ مرحله‌ای صفر نمـی‌شـود بـه صورت یک سری با بی‌نهایت جمله به دسـت مـی‌آیـد. کـه درایـن مجموعـه سـری، u,y,z,w بـه ترتیـب معـادل $\frac{\eta^1}{m^2},\frac{\eta^2}{m^2},\frac{\eta^3}{m^2},\frac{\eta^4}{m^2}$ هستند.

در نهایت، مجموع سری‌های به دست آمده، که همگی به صورت بسط تابع نمایی هستند را محاسبه می‌کنیم. (11)

$$\begin{aligned}\tilde{H}_T=&\left[2u^{-2}(1+e^{-u}-2e^{-\frac{u}{2}})\right](Z^2n^2+y^2p^{(n)2}-2yzp^{(n)}n)+\left[\frac{2}{u}(e^{-\frac{u}{2}}-e^{u})\right](Z\Pi n-y\Pi p^{(n)})\\&+\left[\frac{1}{2}u^{-1}(1-e^{-u})\right](\omega\Pi(p+\xi)-\Pi^2)+\left[\frac{u^{-2}m^{-4}}{2}(e^{u^2}-1)-\frac{e^{u}-e^{-u}-2e^{\frac{u}{2}}+2e^{-\frac{u}{2}}}{2u^2m^4}\right](m^4zw)\\&+\left[\frac{u^{-2}m^{-4}}{2}(e^{-u^2}-1)+\frac{e^{u}-e^{-u}-2e^{\frac{u}{2}}+2e^{-\frac{u}{2}}}{2u^2m^4}\right](m^4yw)+\frac{1}{8m^4}(u^{-2}(e^{u^2}-1))m^4w^2\end{aligned}$$

نتیجه گیری

نشان دادیم که تصحیح به هامیلتونی اولیه برای آنیون ها با بی‌نهایت جمله انجام شد ولی این مجموعه بی‌نهایت جمله را می‌توان به شکل بسته نوشت. این جمله‌ها عبارت انرژی جنبشی ذره را در فضای فاز جدید تصحیح می‌کنند و باقیمانده آنها را می‌توان به عنوان پتانسیلی در نظر گرفت که تقارن‌های پیمانه‌ای مدل جدید را ارضا می‌کنند؛ تقارن‌هایی که با قیدهای نوع اول شده‌ی جدید تولید می‌شوند.

مرجع ها

[1] M. Monemzadeh, A. Shirzad., Int. J. Mod. Phys. A 18 (2003) 5613-5626.
[2] M. Chaichian, F.R. Gonalez and. Louis Martienz, Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 3405; Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 2009.
[3] M. Monemzadeh, A. Shirzad, Phys. Rev. D72 (2005) 045004.