



به نام خدا

اندازه‌شناسی کوانتومی و پیوستگی اطلاعات فشر کوانتومی

مجید حسنی

با همکاری دکتر سحر علیپور و دکتر علی رضاخانی

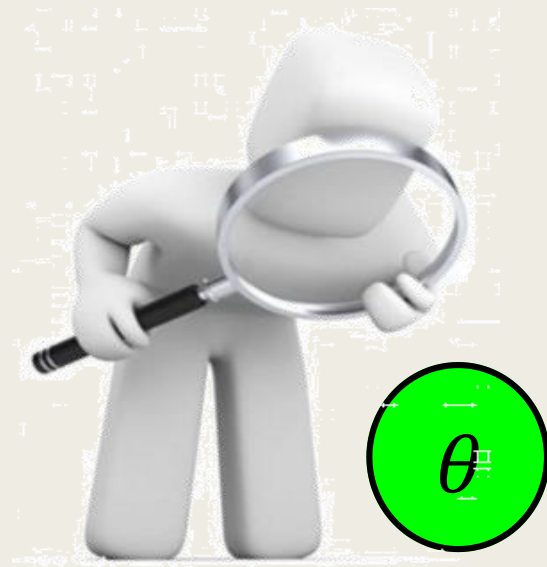
arXiv:1507.01736.V2



گروه اطلاعات و محاسبات کوانتومی
QIS@SUT

فیزیک

توصیف طبیعت



سنگ محک هر نظریه آزمایش و اندازه‌گیری است.

بنیادین

علمی

اندازه‌شناسی

آزمایشگاهی، ساخت ابزار دقیق

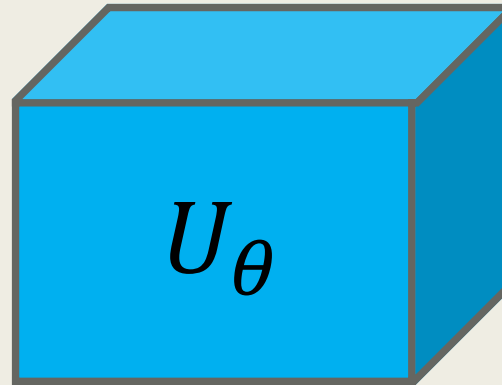
فنی

$$p(250) = \theta$$



کلاسیک

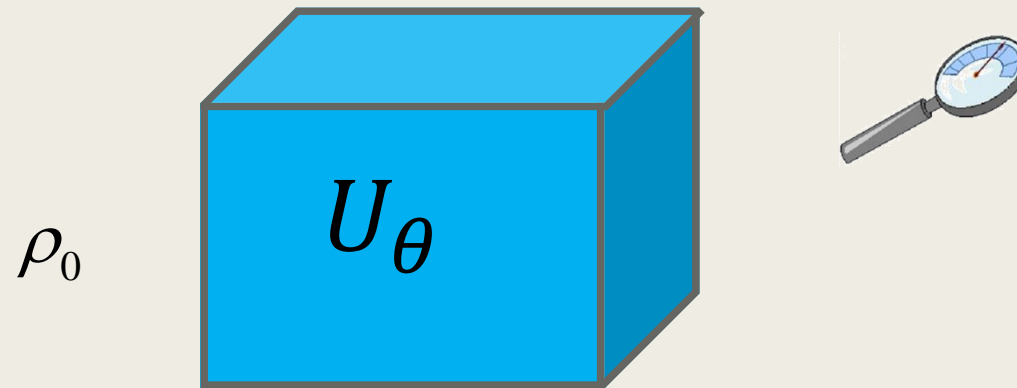
$$\delta E \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$$



کوانتوم

$$U_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i2\pi\theta} \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0,1]$$

شمای کلی برآورد کوانتومی



رهیافت کلی برآورد کوانتومی

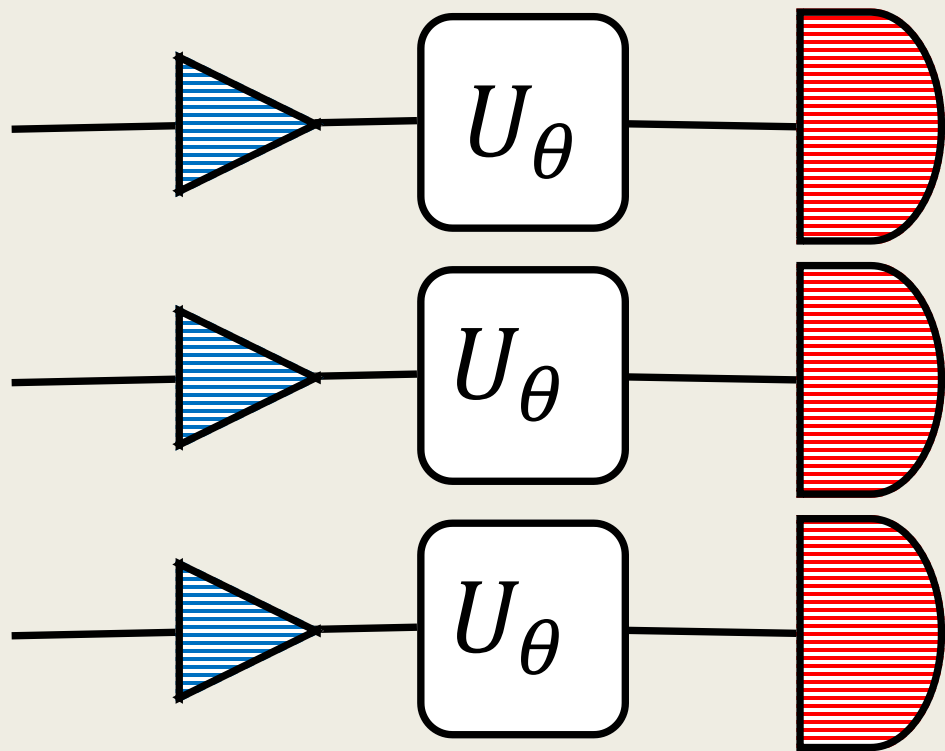
$$\text{خطای برآورد} \geq \frac{1}{F^{(Q)}}$$

کرانِ کریمر-رائو

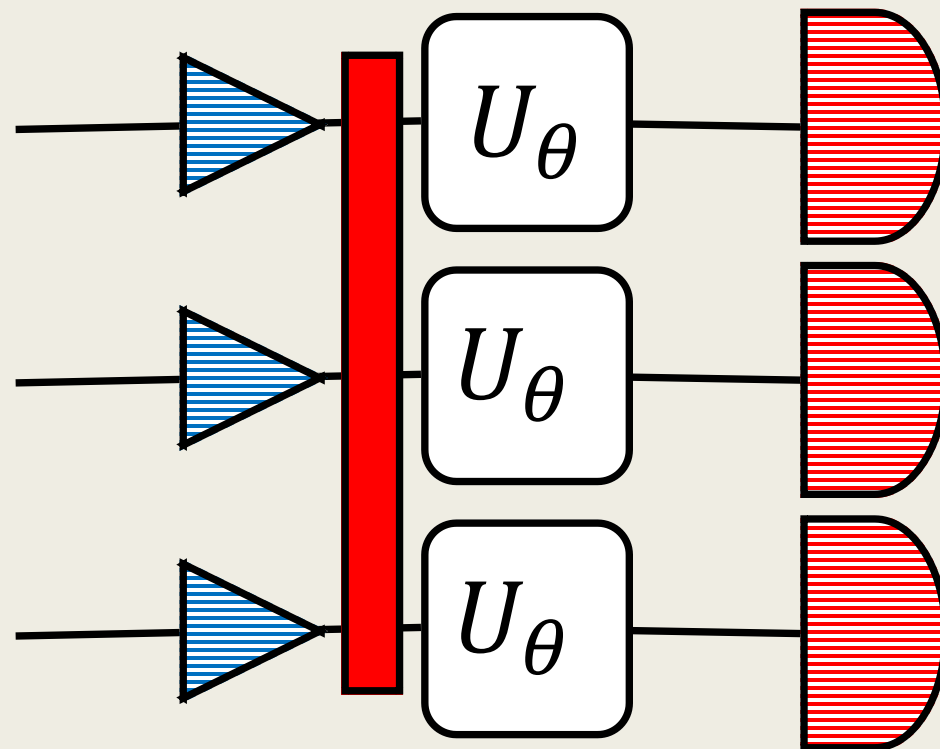
$$F^{(Q)} = \text{Tr}[\rho_{\theta} L_{\theta}^2]$$

فیشر کوانتومی

$$\partial_{\theta} \rho_{\theta} = \frac{L_{\theta} \rho_{\theta} + \rho_{\theta} L_{\theta}}{2}$$

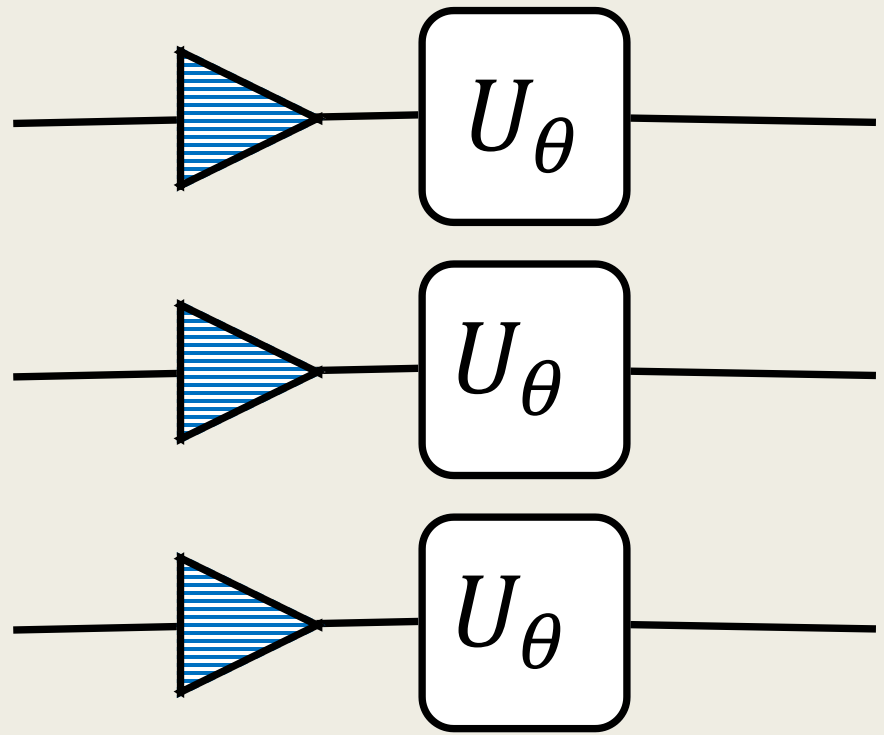


$$F^{(Q)}(\theta) \propto N \Rightarrow \delta E \geq \sqrt{\frac{1}{N}}$$



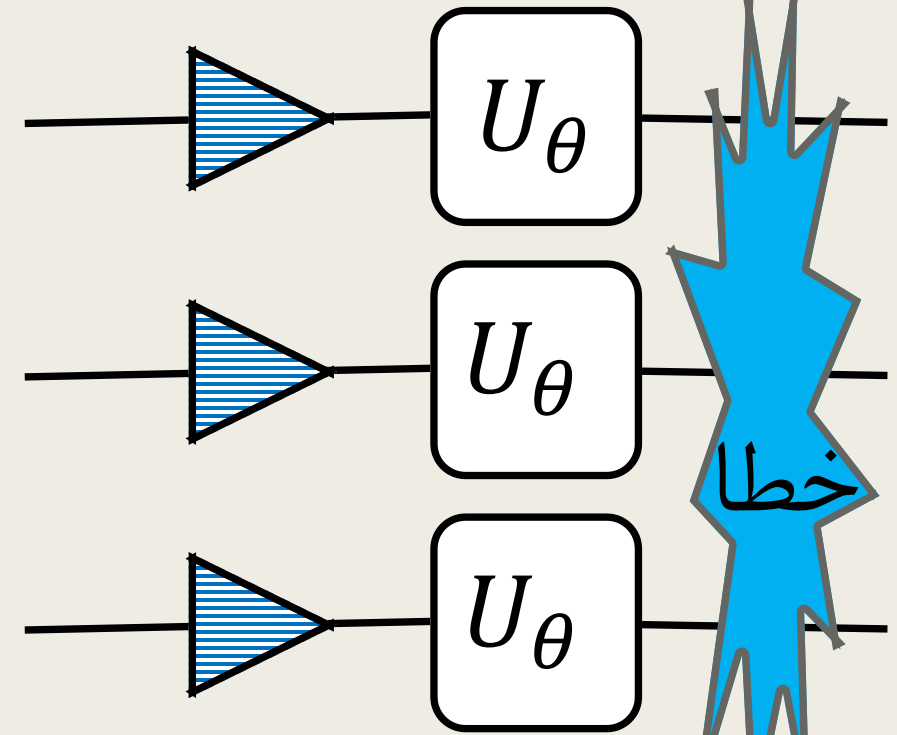
$$F^{(Q)}(\theta) \propto N^2 \Rightarrow \delta E \geq \frac{1}{N}$$

سوال ما



ρ_θ

$F^{(Q)}(\rho_\theta)$



σ_θ

$F^{(Q)}(\sigma_\theta)$

$\|\rho_\theta - \sigma_\theta\|_1$

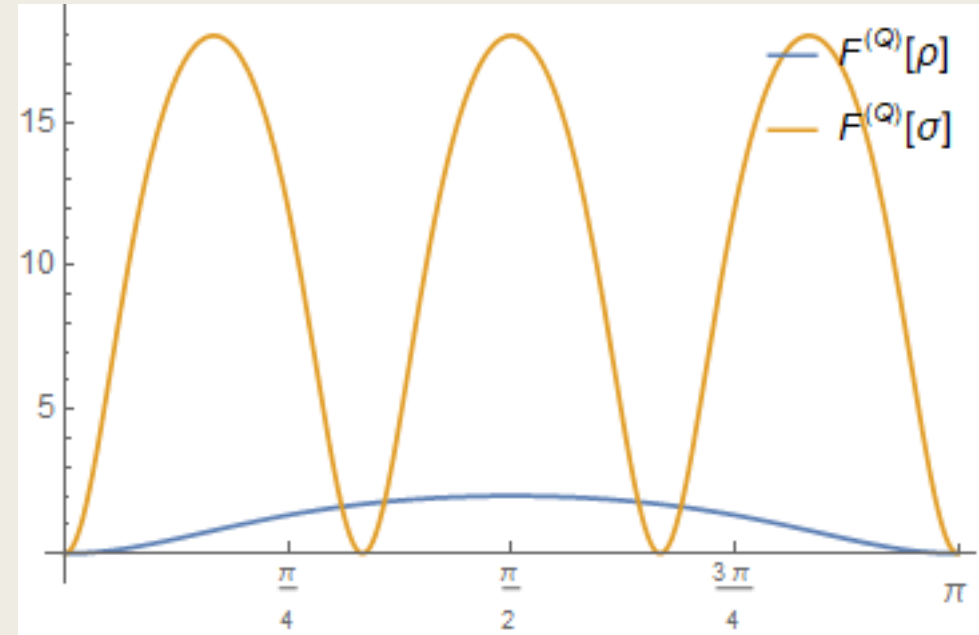
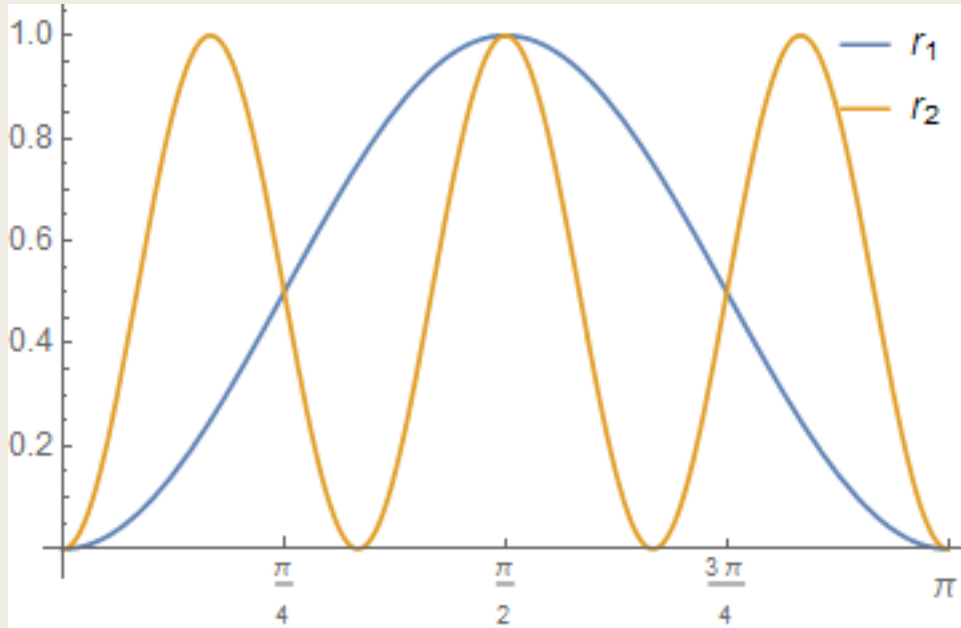
?

$|F^{(Q)}(\rho_\theta) - F^{(Q)}(\sigma_\theta)|$

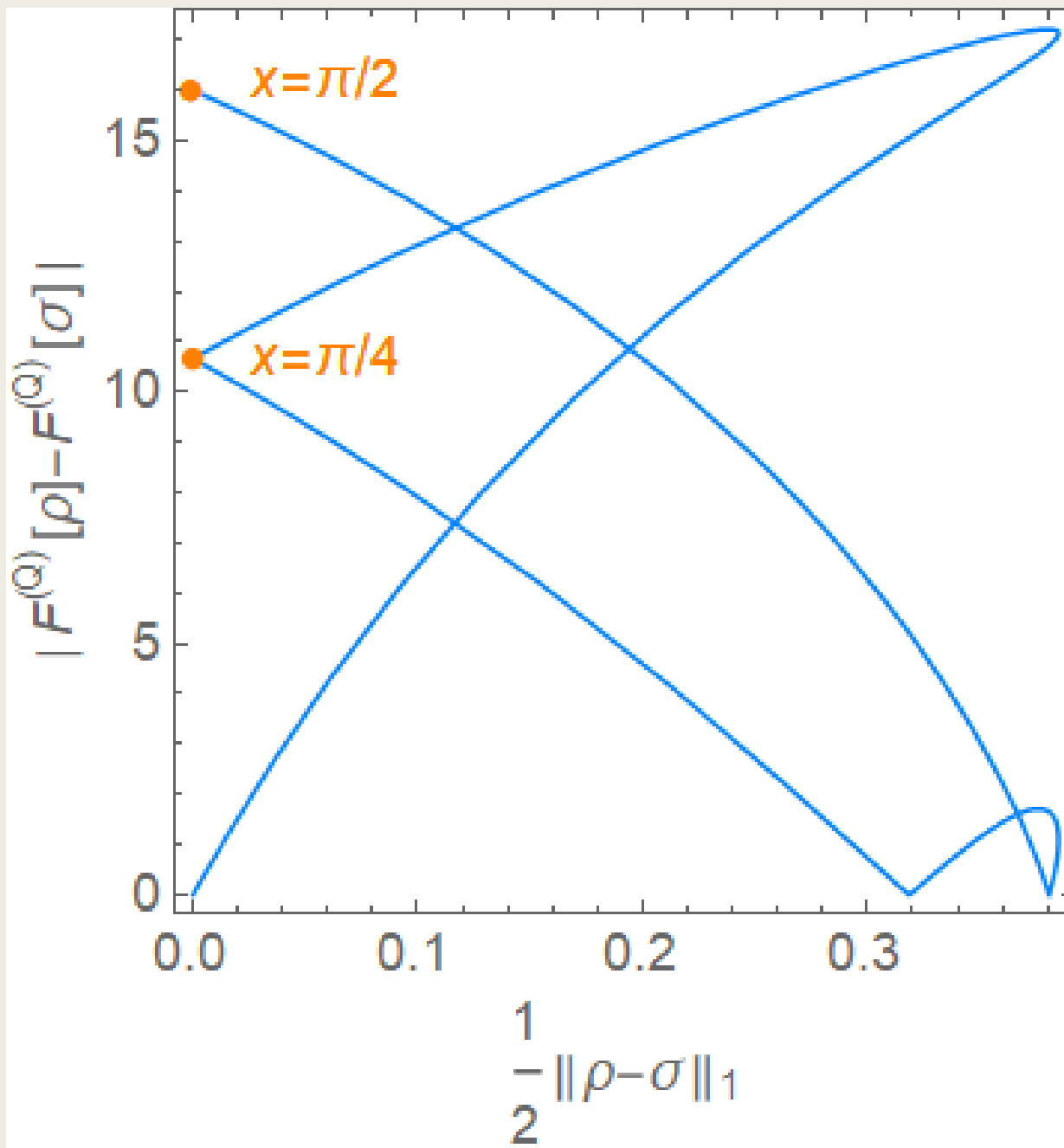
مثال

$$\rho_\theta = \frac{1}{2} \left(I + \vec{r}(\theta) \cdot \sigma \right) \quad F^{(Q)}(\rho_\theta) = \frac{(\partial_\theta r)^2}{1 - r^2(\theta)}$$

$$\rho_\theta \quad \vec{r}_1(\theta) = (0, 0, \sin^2(\theta)) \quad \sigma_\theta \quad \vec{r}_2(\theta) = (0, 0, \sin^2(3\theta))$$



$$\|\rho_\theta - \sigma_\theta\|_1 = \left| \vec{r}_1(\theta) - \vec{r}_2(\theta) \right|$$



پیوستگی بسیط

$$\left| F^{(\mathcal{Q})}(\rho_\theta) - F^{(\mathcal{Q})}(\sigma_\theta) \right| \leq f \|\rho_\theta - \sigma_\theta\|_1 + g \|\partial_\theta \rho_\theta - \partial_\theta \sigma_\theta\|_1$$

$$f = \frac{\|\partial_\theta \sigma_\theta\|_1}{\lambda_{\min}(\rho^*) \lambda_{\min}(\sigma^*)} \left(\|\partial_\theta \sigma_\theta\|_1 + 32(\partial_\theta \mathbf{P}_\rho + \partial_\theta \mathbf{P}_\sigma) + 64 \|\partial_\theta \sigma_\theta\|_1 \frac{\lambda_{\min}(\rho^*) + \lambda_{\min}(\sigma^*)}{\lambda_{\min}(\rho^*) \lambda_{\min}(\sigma^*)} \right)$$

$$g = \frac{1}{\lambda_{\min}(\rho^*)} \left(\|\partial_\theta \rho_\theta\|_1 + \|\partial_\theta \sigma_\theta\|_1 + 4\partial_\theta \mathbf{P}_\rho + \frac{32}{\lambda_{\min}^2(\rho^*)} \right)$$

$$\|A\|_p := \left(\text{Tr} \left[(A^\dagger A)^{\frac{p}{2}} \right] \right)^{\frac{1}{p}}$$

نتایج

حالت‌های نمایی:

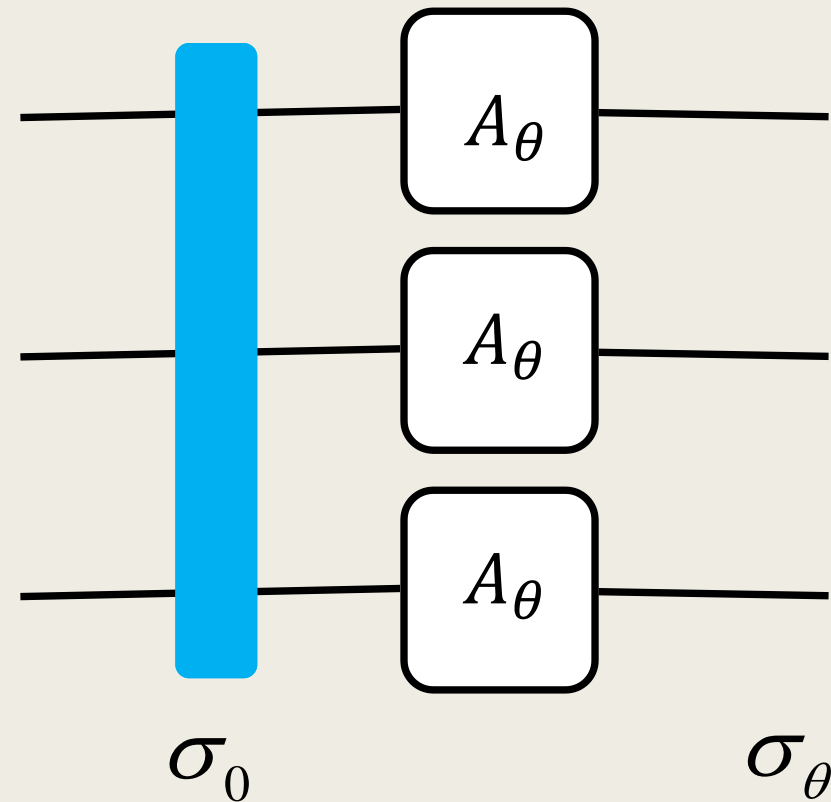
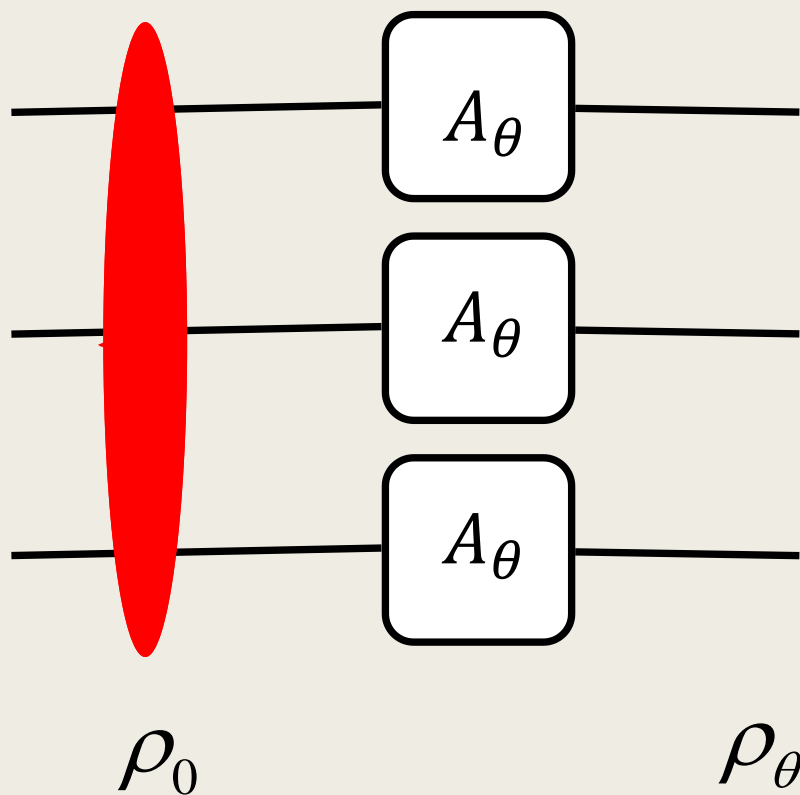
گرمایی و گاوسی

$$\rho_\theta = e^{H(\theta)} \quad \sigma_\theta = e^{G(\theta)}$$

$$\left| F^{(Q)}(\rho_\theta) - F^{(Q)}(\sigma_\theta) \right| \leq f \|H - G\|_1 + g \|\partial_\theta H - \partial_\theta G\|_1$$

$$f = \frac{\|\partial_\theta G\|_1^2}{e^{\lambda_{\min}(H) + \lambda_{\min}(G)}} + \frac{\left(\|\partial_\theta H\|_1 + \|\partial_\theta G\|_1 \right)^2}{2e^{\lambda_{\min}(H)}}$$

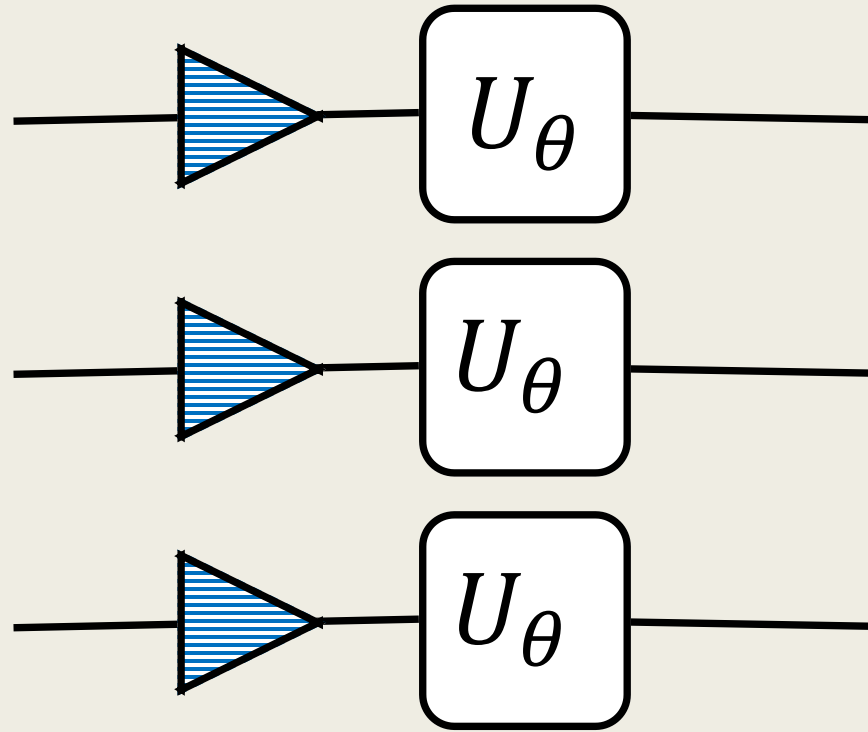
$$g = \frac{1}{e^{\lambda_{\min}(H)}} \left(\|\partial_\theta H\|_1 + \|\partial_\theta G\|_1 \right)$$



$$\|\rho_\theta - \sigma_\theta\|_1 \leq \|\rho_0 - \sigma_0\|_1 \sum_K \|A_K^{(N)}\|^2$$

$$\|\partial_\theta \rho_\theta - \partial_\theta \sigma_\theta\|_1 \leq 2 \|\rho_0 - \sigma_0\|_1 \sum_K \|\partial_\theta A_K^{(N)}\| \|A_K^{(N)}\|$$

نتایج
تحول یکانی



$$U_\theta = e^{-i\theta H}$$

$$\left| F^{(Q)}(\rho_\theta) - F^{(Q)}(\sigma_\theta) \right| \leq \frac{4 \|H\|^2 \|\rho_0 - \sigma_0\|_1}{\lambda_{\min}(\rho_0)} \left(\frac{1}{\lambda_{\min}(\sigma_0)} + 2 \right)$$

با توجه به کاربردهای فراوان اطلاعات فشر کوانتومی به عنوان متریکی روی فضای هیلبرت،
مطالعه‌ی خاصیت پیوستگی آن ممکن است در دیگر شاخه‌ها هم حائز اهمیت باشد

.....

قدردانی

معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی شریف

سپاس