

## ساختار هادرون

**پیش‌گفتار** در فصل پیش، محاسبه‌ی برهم‌کنش الکترومغناطیسی ذره‌های باردار را آموختیم. روش محاسباتی برهم‌کنش قوی (رنگ) بین کوارک‌ها و گلئون هم کمابیش به همان گونه است. با این وجود، در عمل کوارک و گلئون آزاد در دسترس نیست و در آزمایش‌ها از هادرون (برای نمونه، پروتون) استفاده می‌شود. برعکس لپتون‌ها که ذره‌های نقطه‌ای بدون ساختارند، هادرون‌ها ساختار پیچیده‌ای از کوارک‌ها و گلئون دارند. بنابراین، برای توصیف آنها برحسب اجزاء سازنده‌شان باید "توابع موج" آنها را پیدا کنیم. یعنی، برای مثال، پروتون را برحسب توزیع کوارک‌های درونش توصیف کنیم. این کار دشواری است. در این فصل به ساختار هادرون و راه‌های دستیابی به آن را خواهیم پروراند.

این فصل را با شناسایی **عامل‌های شکل**\* آغاز می‌کنیم و سرانجام آن را با **توابع ساختار**† به پایان خواهیم برد. عامل‌های شکل اثرهای برهم‌کنشی اجزاء سازنده‌ی هادرن را برحسب تابعی از تکانه‌ی انتقالی  $q^\lambda$  که ناوردای لورنتس است، به دست می‌دهد. عامل‌های شکل الکترومغناطیسی توزیع بار در درون هادرون را تعیین می‌کند و شیب این تابع اندازه‌ی هادرون را به دست می‌دهد. در برهم‌کنش کشسان لپتون-نوکلئون می‌توان عامل‌های شکل نوکلئون را اندازه‌گیری کرد. به یاد بیاورید که ذره‌ی مجازی یا ذره‌ی در بیرون پوسته‌ی جرمی (با چار تکانه‌ی  $q_\mu$ ) ذره‌ای است که مربع جرم ناوردایش،  $|\mathbf{q}|^2 - q_0^2 = q^2$  با مربع جرم واقعی،  $m^2$ ، آن برابر نیست. برای نمونه، در فوتون مجازی  $q^2 \neq 0$  است. در پراکندگی الکترون-نوکلئون می‌توان با تغییر دادن انرژی و یا زاویه‌ی پراکندگی الکترون پراکنده شده، جرم ناوردای فوتون تبادل شده را تغییر داد. امکان تغییر دادن  $q^2$  در پراکندگی ژرف ناکشسان ابزار توانمندی را برای کاویدن اندرون‌های نوکلئون فراهم می‌کند و نشان می‌دهد که کوارک‌های نقطه‌ای سازنده‌های ماده اند.

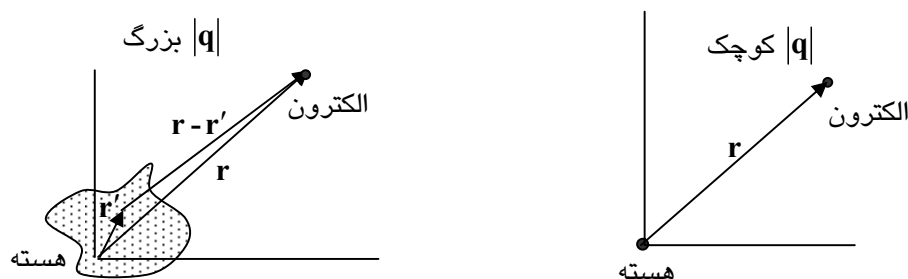
### ۱- درون‌کاوی توزیع بار: عامل‌های شکل الکترومغناطیسی

داده‌های آزمایش‌های مستقیم و غیرمستقیم نشان می‌دهند که سازنده‌های بنیادی ماده (لپتون‌ها و کوارک‌ها) تا مقیاس طول‌های از مرتبه‌ی  $10^{-16}$  cm بدون ساختارند. نقطه‌ای بودن آنها مستقل از ویژگی‌هایشان است: از نوترینوی به تقریب بدون جرم تا کوارک سر با جرم حدود هسته‌ی طلا، با وجود تفاوت فراوان در جرمشان همگی بدون ساختارند. هادرون‌ها (مزون‌ها و باریون‌ها) ساختار دارند. ویژگی‌های استاتیکی و دینامیکی هادرون‌ها که از شیوه‌ی تولید و واپاشی‌شان استنتاج می‌شود به همراه طیف‌شان نشان می‌دهند که هادرون‌ها حالت‌های مقید کوارکی اند. مانند هر جسم مرکب، گستره و ساختار فضایی آنها پیچیده است. رفتارشان در برهم‌کنش الکترومغناطیسی و ضعیف متفاوت از رفتار ذره‌ی نقطه‌ای است. برای نمونه، سطح مقطع پراکندگی لپتون-هادرون به سرعت با  $q^2$  کاهش پیدا می‌کند اما در سطح مقطع لپتون-لپتون چنین حساسیتی نسبت به تکانه‌ی انتقالی  $q^\lambda$  دیده نمی‌شود. این رفتار را به طور کیفی می‌توان فهمید: در پراکندگی لپتون-لپتون، اگر لپتون نقطه‌ای با فوتونی که از لپتون دیگر گسیل می‌شود برخورد کند، فقط تکانه‌ی آن، سازگار با پایستگی انرژی-تکانه، تغییر می‌کند. شدت برهم‌کنش و در نتیجه، سطح مقطع نسبت به  $q^2$  حساس نیستند. اما در پراکندگی لپتون-هادرون، فوتونی که از

\* Form Factors

† Structure Functions

لیتون گسیل می‌شود، با اجزاء سازنده‌ی هادرون برهم‌کنش می‌کند و شدت برهم‌کنش به  $q^2$  بستگی پیدا می‌کند. هر چه  $q^2$  بزرگ‌تر باشد، ساختار درونی هدف مرکب را بهتر می‌توان کاوید و سرشت برهم‌کنش سازنده‌های آن را آشکار کرد. در واقع،  $q^2$  مانند توان تفکیک ذره‌بین رفتار می‌کند. اگر به توده‌ای با ذره‌بین ضعیف نگاه کنید، آن را به صورت یک جسم یک‌پارچه خواهید دید. اگر از ذره‌بینی با توان تفکیک بزرگ به همان توده نگاه کنید، می‌توانید جزییات آن را از هم تمیز دهید. مولفه‌ی فضایی،  $\mathbf{q}$ ، تکانه‌ی فوتون را در نظر بگیرید. از مکانیک کوانتومی می‌دانیم که  $\mathbf{q}$  با فاصله، یا طول موج نسبت وارون دارد. هر چه  $|\mathbf{q}|$  بیشتر باشد، طول موج آن کوچک‌تر است. اگر بخواهید پروتون را با فوتون ببینید و از آن "عکس‌برداری" کنید، چنانچه، طول موج فوتون از مرتبه‌ی ابعاد پروتون و یا بزرگ‌تر از آن باشد، پروتون را به صورت یک جسم نقطه‌ای خواهید دید، چون این طول موج بزرگ‌تر از آن است که در درون پروتون بگنجد. با افزایش  $|\mathbf{q}|$  فوتون، طول موج آن کاهش پیدا می‌کند و در نتیجه، می‌تواند در درون پروتون بگنجد و اندرونی آن را ببیند و از جزییاتش عکس‌برداری کند. بگذارید پراکندگی الکترون از میدان استاتیک کولمبی هسته را در نظر بگیریم. در واژگان امروزی می‌گوییم برهم‌کنش الکترون-هسته با تبادل فوتون مجازی فضاگونه بین پرتابه (الکترون) و هدف (هسته) انجام می‌گیرد. وقتی سه تکانه‌ی  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$  که فوتون به هسته منتقل می‌کند، کوچک و مثلاً حدود  $|\mathbf{q}| \sim 20 \text{ KeV}$ ، باشد طول موجش  $\sim 10^{-9} \text{ cm}$  می‌شود و کاونده‌ی الکترومغناطیسی (فوتون) نمی‌تواند به درون هسته نفوذ کند؛ چون ابعاد هسته بسیار کوچک‌تر از این طول موج و از مرتبه‌ی  $10^{-12} \text{ cm}$  است. هسته به صورت یک بار نقطه‌ای با بار الکتریکی  $Ze$  ( $e > 0$ ) دیده خواهد شد. حال تکانه‌ی انتقالی را افزایش بدهید و به حدود  $20 \text{ MeV}$  و یا بیشتر برسانید. این مقدار تکانه با طول موج از مرتبه‌ی  $10^{-12} \text{ cm}$  و یا کم‌تر متناظر است. پیچیدگی درونی هسته بیشتر و بیشتر آشکار می‌شود و فوتون می‌تواند پروتون‌ها را با توزیع بارشان در درون هسته، ببیند. در این حد تکانه، باید هسته‌ی نقطه مانند را با جسم گسترده جایگزین کرد. در شکل (۱) این وضعیت‌ها نشان داده شده‌اند.



شکل ۱ برهم‌کنش الکترون با هسته‌ی نقطه‌ای با بار  $Ze$  و هسته‌ی با توزیع بار  $\rho(\mathbf{r}')$

به بیان دیگر، پتانسیل کولمبی بین الکترون و هسته‌ی نقطه‌ای باید با پتانسیل بین الکترون و توزیع بار  $\rho(\mathbf{r}')$  جایگزین بشود:

$$V_p = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{|\mathbf{r}|} \rightarrow V = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (1)$$

که در آن چگالی بار پروتون‌ها در درون هسته است که به  $Ze$  بهنجار شده است:  $\int \rho(\mathbf{r}') d^3r' = Ze$ . هسته‌ی غیر واقعی نقطه‌ای حالت خاصی از این توزیع بار است که همه‌ی بار پروتونی در یک نقطه متمرکز است. یعنی توزیع بار با یک تابع دلتا در  $\mathbf{r}'$  به صورت  $\rho(\mathbf{r}') = Ze \delta^3(\mathbf{r}')$  توصیف می‌شود. تبدیل‌های فوریه‌ی پتانسیل‌های  $V_p$  و  $V$  به فضای تکانه را به ترتیب  $V_p(\mathbf{q})$  و  $V(\mathbf{q})$  بنامید. داریم

$$V_p(\mathbf{q}) = \frac{Ze}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int d^3r e^{-iqr} \frac{1}{r} \quad ; \quad V(\mathbf{q}) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int d^3r e^{-iqr} \left( \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \quad (2)$$

هدف ما این است که نشان دهیم  $V_p(\mathbf{q})$  و  $V(\mathbf{q})$  با یک کمیت قابل اندازه‌گیری به نام عامل شکل هسته،  $F_N(q^2)$  به یکدیگر مربوط اند.

رابطه‌ی (۲) تبدیل فوریه با سه تکانه‌ی  $\mathbf{q}$  است و برای حالت غیرنسبیتی مناسب است. در حد غیر نسبیتی از اثرهای پس‌زنی هسته‌ی سنگین چشم پوشی می‌شود. انرژی انتقالی به هسته

$$q_0 = \sqrt{M^2 + |\mathbf{q}|^2} - M \quad (3)$$

اساساً صفر است (چون هسته حرکت نمی‌کند و  $|\mathbf{q}|^2 = 0$  است) و فقط  $\mathbf{q}$  در تبدیل فوریه حضور دارد. مولفه‌ی چهارم تبدیل فوریه  $\int dt e^{iq_0 t} = 2\pi\delta(q_0)$  بیان این واقعیت است. محاسبه‌ی تبدیل‌های فوریه‌ی رابطه‌ی (۲) آسان است:

$$\begin{aligned} V_p(\mathbf{q}) &= \frac{Ze}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int d^3r e^{-iqr} \frac{1}{r} = \frac{Ze}{\epsilon\pi\epsilon_0} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int d^3r e^{-iqr} \frac{e^{-\mu r}}{r} = \frac{Ze}{\epsilon\pi\epsilon_0} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi e^{-iqr} \frac{e^{-\mu r}}{r} \\ &= \frac{Ze}{\epsilon\pi\epsilon_0} (2\pi) \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu r}}{r} r^2 dr \int_{-1}^1 e^{-|q|r \cos\theta} d(\cos\theta) = \frac{Ze}{\epsilon\pi\epsilon_0} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\epsilon\pi}{(|\mathbf{q}|^2 + \mu^2)} = \frac{Ze}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon\pi}{|\mathbf{q}|^2} \end{aligned} \quad (4)$$

از پارامتر  $\mu$  (که بعد جرم بر طول دارد و  $\mu r$  بی بعد است) استفاده کردیم تا انتگرال‌گیری آسان شود. با این وجود، پاسخ نهایی مستقل از آن است. در رابطه‌ی (۴) همه چیز برحسب سه بردار  $\mathbf{q}$  نوشته شده است. این رابطه شکل هم‌وردا ندارد. بهتر است با استفاده از ناوردای لورنتس  $q^2 = q_0^2 - |\mathbf{q}|^2$  آن را به صورت هم‌وردا در بیاوریم. این کار ساده است. همانگونه که دیدیم، در تبدیل فوریه‌ی پتانسیل استاتیک کولمب انرژی انتقالی صفر و در نتیجه،  $q^2 = -|\mathbf{q}|^2$  است. بنابراین، می‌توانیم  $|\mathbf{q}|^2$  را با  $-q^2$  جایگزین کنیم. توجه کنید که کمیت ناوردای  $q^2$  می‌تواند زمان‌گونه ( $q^2 > 0$ ) یا فضاگونه ( $q^2 < 0$ ) باشد. اما در همه‌ی فرایندهای پراکندگی  $q^2$  فضاگونه است و در نتیجه، جایگزینی  $q^2 \rightarrow -|\mathbf{q}|^2 < 0$  طبیعی است. رابطه‌ی (۴) را بازنویسی کنیم:

$$V_p(q^2) = -\frac{Ze}{\epsilon_0 q^2} \quad (5)$$

**نکته:** از رابطه‌های (۲) و (۴) دیده می‌شود که حد غیرنسبیتی  $1/|\mathbf{q}|^2$  انتشارگر  $1/q^2$  بوزون بدون جرم که بین الکترون و هسته تبادل می‌شود به پتانسیلی متناسب با  $1/r$  می‌انجامد. به همین ترتیب، وقتی رابطه‌ی (۴) را از انتها به آغاز آن دنبال کنیم، می‌بینیم که حد غیرنسبیتی  $1/(|\mathbf{q}|^2 + \mu^2)$  انتشارگر  $1/(q^2 - \mu^2)$  (انتشارگر ذره‌ی تبدالی بدون اسپین با جرم  $\mu$ ) می‌تواند پتانسیل  $e^{-\mu r}/r$  تولید کند. برد نیرو متناظر آن  $1/\mu$  است، چون در فاصله‌های بزرگ‌تر از  $1/\mu$ ، کمیت نمایی  $e^{-\mu r}$  خیلی سریع به صفر میل می‌کند. بنابراین، تبادل مزون با انتشارگر غیرنسبیتی منشاء پتانسیل برهم‌کنشی بین دو ذره است:

$$\int d^3q \frac{e^{iq \cdot r}}{(2\pi)^3 |\mathbf{q}|^2} \frac{1}{\epsilon\pi r} \quad ; \quad \int d^3q \frac{e^{iq \cdot r}}{(2\pi)^3 |\mathbf{q}|^2 + \mu^2} \frac{1}{\epsilon\pi r} = \frac{e^{-\mu r}}{\epsilon\pi r} \quad (6)$$

این مفهوم بنیادی ارتباط بین پتانسیل  $e^{-\mu r}/r$  دو ذره و جرم  $\mu$  مزون تبدالی بین آنها را یوکاوا در سال ۱۹۳۵ کشف کرد.

یوکاوا با آگاهی به برد نیروی هسته‌ای، حدود  $(200 \text{ MeV})^{-1}$  ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ cm} \approx 200 \text{ MeV}^{-1}$ )، وجود ذره‌ی بدون اسپین با جرم حدود  $200 \text{ MeV} - 100 \text{ MeV}$  را پیش‌بینی کرد که بعدها مزون  $\pi$  نامیده شد. به ازای  $0 \rightarrow \mu$  پتانسیل کولمب دوباره بازیافت

می‌شود. برد بینهایت نیروی الکترومغناطیسی نتیجه‌ی مستقیم بی جرم بودن فوتون است. به همین ترتیب، اگر پتانسیل کولمبی بین بارهای  $e_1$  و  $e_2$  برابر  $e_1 e_2 / \epsilon \pi \epsilon_0 r$  باشد، پتانسیل هسته‌ای که بر اثر تبادل مزون  $\pi$  بین دو نوکلئون تولید می‌شود، باید برابر  $g_{\pi NN} e^{-m_\pi r} / \epsilon \pi r$  باشد.  $g_{\pi NN}$  ثابت جفت شدگی پایون-نوکلئون و  $g_{\pi NN} / \epsilon \pi \approx 13,5$  است. ♣

حال بگذارید  $V(\mathbf{q})$  را حساب و آن را با  $V_p(\mathbf{q})$  مقایسه کنیم. اگر در رابطه‌ی (۷) از  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \int d^3 r e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \left( \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(\mathbf{q}) = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \int d^3 R \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}}}{|\mathbf{R}|} \underbrace{\int d^3 r' e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \rho(\mathbf{r}')}_{\equiv F_N(q^2)} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} F_N(q^2) \quad (7)$$

$V(\mathbf{q})$  نسخه‌ی غیر نسبیته‌ی  $V(q^2)$  است و کمیت  $F_N(q^2 = -|\mathbf{q}|^2)$  که با رابطه‌ی زیر تعریف شده است

$$F_N(q^2 = -|\mathbf{q}|^2) \equiv \int d^3 r' e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \rho(\mathbf{r}') \quad (8)$$

تبدیل فوریه‌ی توزیع بار پروتون‌ها،  $\rho(\mathbf{r}')$ ، در هسته است.  $F_N(q^2)$  عامل شکل الکترومغناطیسی هسته نام دارد. روشن است که  $F_N(0) = Ze$  بهنجارش آن است. این را با قرار دادن  $|\mathbf{q}| = 0$  در رابطه‌ی (۸) و با توجه به  $\int d^3 r' = Ze$  به سادگی می‌توان دید. حال که  $V(\mathbf{q})$  و  $V_p(\mathbf{q})$  را می‌شناسیم، از رابطه‌های (۷) تا (۹) دیده می‌شود که  $V(\mathbf{q})$  را می‌توان به صورت

$$V(q^2) = V_p(q^2) \frac{F_N(q^2)}{F_N(0)} = -\frac{F_N(q^2)}{q^2} \quad (9)$$

نوشت. از مقایسه‌ی رابطه‌های (۵) و (۹) معنی عامل شکل روشن می‌شود: تبدیل فوریه‌ی پتانسیل حاصل از توزیع بار  $Ze$  به فضای تکانه با  $F_N(q^2)$  با تبدیل فوریه‌ی پتانسیل حاصل از بار نقطه‌ی  $Ze$  مساوی است. عامل شکل  $F_N(q^2)$  غیر نقطه‌ای بودن بار را توصیف می‌کند.

اگر از بسط  $e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} = 1 - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}' - \frac{1}{2} |\mathbf{q}|^2 r'^2 \cos^2 \theta + \dots$  در رابطه‌ی (۸) استفاده کنیم و سپس انتگرال  $d^3 r'$  را حساب کنیم، خواهیم داشت

$$F(\mathbf{q}) = \int \left( 1 - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}' - \frac{1}{2} |\mathbf{q}|^2 r'^2 \cos^2 \theta + \dots \right) \rho(r') d^3 r' = F_N(0) \left[ 1 - \frac{1}{2} |\mathbf{q}|^2 \langle r'^2 \rangle + \dots \right] \quad (10)$$

انتگرال جمله‌ی  $-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'$  بر اثر تقارن فضایی صفر است. ضریب  $1/\sqrt{6} = (\sqrt{2}/2)(1/\sqrt{2})$  از میانگین  $\cos^2 \theta$  به دست می‌آید. اگر به یاد بیاوریم که  $-q^2 \rightarrow |\mathbf{q}|^2$  آنگاه رابطه‌ی بالا عبارت است از

$$F(q^2) = 1 + \frac{1}{2} q^2 \langle r'^2 \rangle + \dots \quad (11)$$

کمیت

$$\langle r'^2 \rangle \equiv \int r'^2 \rho(r') d^3 r' = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \left| \frac{dF_N(q^2)}{dq^2} \right| \quad (12)$$

میانگین مربع شعاع هسته است.

معادله‌های (۸) و (۹) نشان می‌دهند که عامل شکل مفهوم مناسبی برای توصیف ساختار ذره است. شیب تابع شکل در  $q^2 = 0$

اندازه‌ی هادرون را به دست می‌دهد. هرچه جسم بزرگ‌تر باشد عامل شکل آن با افزایش  $q^2$  سریع‌تر کاهش می‌یابد. عامل شکل الکترومغناطیسی (و ضعیف) جسم نقطه‌ای مستقل از  $q^2$  است. عامل‌های شکل کمیت‌های فیزیکی اند و می‌توان در آزمایشگاه آنها را اندازه گرفت. برای نمونه، با پراکندگی الکترون از هسته و اندازه‌گیری سطح مقطع راترفورد یا موت  $F_N(q^2)$  هسته را می‌توان اندازه گرفت. با دانستن  $F_N(q^2)$  از تبدیل وارون فوریه رابطه‌ی  $(\lambda)$  تابع توزیع  $\rho(\mathbf{r}')$  پروتون‌ها در هسته به دست می‌آید:

$$\rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{+iq \cdot \mathbf{r}'} F_N(q^2 = -|\mathbf{q}|^2) \quad (13)$$

بررسی مفهوم عامل شکل هسته را می‌توان برای نوکلئون هم به کار برد. برهم‌کنش قوی بین اجزاء سازنده‌ی نوکلئون (کوآرک‌ها و گلئون‌ها) در ویژگی‌های الکترومغناطیسی و ضعیف نوکلئون موثرند و عامل شکل نوکلئون را تعیین می‌کنند.

گشتاور مغناطیسی نابهنجار\* پروتون گواه دیگری بر وجود ساختار آن است. در فصل پیش دیدیم که با جداسازی گوردن، جفت شدگی جریان فرمیونی نقطه‌ای  $\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)$  با میدان الکترومغناطیسی  $A^\mu$  (فوتون) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) A^\mu = \frac{e}{2m} \bar{u}(p') \left[ (p' + p)_\mu + i \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\nu \right] u(p) A^\mu \quad (14)$$

در حد غیرنسبیتی جمله‌ی دوم را می‌توان به صورت  $(e/2m) \bar{u}(p') \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} u(p)$  نوشت (نگاه کنید به رابطه‌ی (۸۵) فصل پیش). در اینجا  $\mathbf{B}$  میدان مغناطیسی خارجی و  $\boldsymbol{\sigma}/2$  اسپین پروتون است. این رابطه به روشنی نشان می‌دهد که گشتاور مغناطیسی فرمیون نقطه‌ای با جرم  $m$  و بار الکتریکی  $e$  یک مگنتون بوهر،  $\mu_B \equiv (e/2m)$ ، را است. مقدار تجربی گشتاور مغناطیسی پروتون  $2,79\mu_B$  است. اختلاف  $1,79\mu_B$  با وضعیت نقطه‌ای بودن، نشان می‌دهد که ساختار پروتون پیچیده‌تر از نقطه‌ای بودن است. به این دلیل هم آن را گشتاور مغناطیسی نابهنجار می‌نامند. در مقایسه با گشتاور مغناطیسی الکترون نقطه‌ای  $\alpha_{em}/2\pi = 0,001161$  دیده می‌شود که گشتاور مغناطیسی پروتون به راستی خیلی بزرگ است. افزون بر این، آزمایش نشان می‌دهد که گشتاور مغناطیسی نوترون صفر نیست (چیزی که در نگاه ساده انگارانه شاید برای ذره‌ی بدون بار انتظار داریم)، بلکه  $-1,91\mu_B$  است. این گشتاورهای مغناطیسی نابهنجار را می‌توان اثر جابجایی کوآرک‌ها در نوکلئون پنداشت.

کوتاه آن که وقتی با جریان‌های الکترومغناطیسی (یا ضعیف) هادرون‌ها را بکاویم (یعنی اگر ذره‌ی باردار نقطه‌ای الکترون، میون (یا نوترینو) را از پروتون پراکنده کنیم) ویژگی‌های الکترومغناطیسی، مانند توزیع بار و جریان، و ویژگی‌های برهم‌کنش ضعیف پروتون را می‌توان با عامل‌های شکل الکترومغناطیسی و ضعیف توصیف کرد. عامل‌های شکل، اثرهای برهم‌کنش قوی اجزاء درون پروتون را در خود دارند. عامل‌های شکل را معمولاً با توابع از نوع

$$F(q^2) = \frac{F(0)}{(1 - q^2/\Lambda^2)^n} \quad (15)$$

پارامتری می‌کنند. توان‌های  $n = 1, 2$  به ترتیب، تک‌قطبی و دو قطبی نامیده می‌شوند.

مثال ۱ نشان دهید که برای توزیع بار با تقارن کروی

\* Anomalous Magnetic Moment

$$\left. \frac{dF(q^\vee)}{dq^\vee} \right|_{q^\vee=0} = -\frac{1}{\vee} \langle r^\vee \rangle \quad (16)$$

که در آن  $\langle r^\vee \rangle$  میانگین مربع شعاع توزیع بار است.  
حل: رابطه‌ی عمومی برای عامل شکل عبارت است از

$$F(q^\vee) = \frac{1}{Ze} \iiint \rho(\mathbf{r}) e^{-iq^\vee r} d^\vee r = \frac{1}{Ze} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(r) e^{-iq^\vee r} r^\vee dr d(\cos\theta) \quad (17)$$

چون توزیع بار تقارن کروی دارد،  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$  است. اگر در رابطه‌ی بالا محور قطبی در راستای  $\mathbf{q}$  باشد،  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = qr \cos\theta$  می‌شود. انتگرال‌گیری بر روی  $d\phi$  یک ضریب  $2\pi$  تولید می‌کند. با انتگرال‌گیری بر روی  $\cos\theta$  خواهیم داشت

$$\int_{-1}^1 e^{-iq^\vee r} d(\cos\theta) = \int_{-1}^1 e^{-iq^\vee r \cos\theta} d(\cos\theta) = \frac{1}{-iq^\vee r} e^{-iq^\vee r \cos\theta} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{-iq^\vee r} [e^{-iq^\vee r} - e^{+iq^\vee r}] = \frac{2 \sin q^\vee r}{q^\vee r} \quad (18)$$

در نتیجه،

$$F(q^\vee) = \frac{1}{Ze} \iiint \rho(\mathbf{r}) e^{-iq^\vee r} d^\vee r \Rightarrow F(q^\vee) = \frac{1}{Ze} (2\pi) \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin q^\vee r}{q^\vee r} r^\vee dr \quad (19)$$

حالا  $\sin q^\vee r$  را بسط دهید

$$F(q^\vee) = \frac{1}{Ze} (2\pi) \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin q^\vee r}{q^\vee r} r^\vee dr = \frac{1}{Ze} (\varepsilon\pi) \int_0^\infty \rho(r) \frac{1}{q^\vee r} \left[ q^\vee r - \frac{(q^\vee r)^\vee}{\vee} + \dots \right] r^\vee dr \quad (20)$$

$$= \frac{1}{Ze} (\varepsilon\pi) \int_0^\infty \rho(r) \left[ 1 - \frac{(q^\vee r)^\vee}{\vee} + \dots \right] r^\vee dr$$

$$= \frac{1}{Ze} \underbrace{\int_0^\infty \rho(r) \varepsilon\pi r^\vee dr}_{=Ze} - q^\vee \left( \frac{1}{Ze} \int_0^\infty \rho(r) \varepsilon\pi r^\vee dr \right) + \dots = 1 - q^\vee \langle r^\vee \rangle + O(q^\vee) \quad (21)$$

و از این نتیجه دیده می‌شود که

$$\left. \frac{dF(q^\vee)}{dq^\vee} \right|_{q^\vee=0} = -\langle r^\vee \rangle \quad (22)$$

مثال ۲ برای توزیع بار نمایی  $\rho(r) = \rho_0 e^{-mr}/r$  عامل شکل را حساب کنید.

حل: این توزیع بار تقارن کروی دارد. بنابراین، می‌توانیم از رابطه‌ی (۱۹) استفاده کنیم. توجه کنید که به جای  $Ze$  این بار باید

از  $\int_0^\infty \rho(r) \varepsilon\pi r^\vee dr$  استفاده کنیم. پس

$$F(q^\vee) = \frac{\int_0^\infty \rho(r) [\sin q^\vee r / q^\vee r] \varepsilon\pi r^\vee dr}{\int_0^\infty \rho(r) \varepsilon\pi r^\vee dr} \quad (23)$$

اگر از جایگزینی  $x = mr \Rightarrow dr = dx/m$  استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$F(q^\nu) = \frac{(m/q) \int_0^\infty e^{-x} \sin(qx/m) dx}{\int_0^\infty x e^{-x} dx} \quad (23)$$

پاسخ انتگرال مخرج یک است. با انتگرال گیری از صورت خواهیم داشت

$$F(q^\nu) = \frac{1}{[1 + q^\nu/m^\nu]} \quad (24)$$

در جدول زیر شکل تابعی عامل شکل  $F(q^\nu)$  برای برخی توابع توزیع بار الکتریکی دیده می‌شوند

عامل شکل $F(q^\nu)$	توزیع بار الکتریکی $\rho(r)$
1	$\delta(r)$
$\sqrt{1 + \frac{q^\nu}{a^\nu}}$	$\rho_0 e^{-r/a}$
$e^{-q^\nu b^\nu}$	$\rho_0 e^{-r^\nu/b^\nu}$
$\frac{\nu(\sin qr - qr \cos qr)}{q^\nu r^\nu}$	$\begin{cases} \rho_0 & ; r < R \\ 0 & ; r > R \end{cases}$

مثال ۳ تابع شکل متناظر با توزیع بار  $\rho(r) = \rho_0 ; r < R$  و  $\rho(r) = 0 ; r > R$  در سطر پایین جدول بالا را حساب کنید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی (۱۹) برای توزیع بار کروی، داریم

$$F(q^\nu) = \frac{\int_0^R (\sin qr / qr) \epsilon \pi r^\nu dr}{\int_0^R \epsilon \pi r^\nu dr} \quad (25)$$

با استفاده از تغییر متغیر  $x = qr \Rightarrow dr = dx/q$  خواهیم داشت

$$F(q^\nu) = \frac{\int_0^{qR} (\sin x / x) \epsilon \pi (x^\nu / q^\nu) (dx/q)}{\int_0^{qR} \epsilon \pi (x^\nu / q^\nu) (dx/q)} = \frac{\int_0^{qR} x \sin x dx}{\int_0^{qR} x^\nu dx} = \frac{\nu(\sin qr - qr \cos qr)}{(qr)^\nu} \quad (26)$$

که در انتگرال آخر از  $\int x^n \sin x dx = -x^n + n \int x^{n-1} \cos x dx$  استفاده کردیم.

## ۲- عامل‌های شکل پروتون: پراکندگی الکترون- پروتون

به دو دلیل نمی‌توان گفتار بالا را برای پروتون به کار برد. نخست این که پروتون توزیع بار استاتیک نیست، بلکه در اثر برخورد

الکترون، پروتون پس‌زنی خواهد داشت. دوم، افزون بر بار الکتریکی، پروتون گشتاور مغناطیسی هم دارد و در برهم‌کنش با میدان الکترومغناطیسی شرکت می‌کند.

اگر پروتون بدون ساختار می‌بود و پس‌زنی هم نمی‌داشت، می‌توانستیم آن را یک جسم نقطه‌ای باردار بسیار سنگین بپنداریم. در این صورت می‌دانیم که سطح مقطع پراکندگی الکترون - پروتون همان سطح مقطع موت است و ما آن را در رابطه‌ی (۱۶۷) فصل قبل حساب کردیم. اگر پروتون را ذره‌ی نقطه‌ای با بار الکتریکی  $e$  و گشتاور مغناطیسی  $e/2m_p$  در نظر بگیریم، باز هم

سطح مقطع پراکندگی الکترون- پروتون را می‌دانیم. کافی است در سطح مقطع پراکندگی الکترون- میون، رابطه‌ی (۱۶۴) فصل پیش، جرم میون را با جرم پروتون جایگزین کنیم. بگذارید این رابطه را یک بار دیگر بنویسیم

$$\left. \frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} \right|_{\text{lab}} = \left( \frac{\alpha^2 \pi}{2E_\gamma \sin^2(\theta_{\text{lab}}/2)} \right) \frac{E_\gamma}{E_\gamma} \left( \cos^2(\theta_{\text{lab}}/2) - \frac{q^2}{2m_p^2} \sin^2(\theta_{\text{lab}}/2) \right) \quad (27)$$

در این رابطه ضریب

$$\frac{E_\gamma}{E_\gamma} = \left( 1 + \frac{2}{m_p} \sin^2(\theta/2) \right)^{-1} \quad (28)$$

اثر پس‌زنی است و جمله‌ی دوم در پرانتز سمت راست رابطه‌ی (۲۷)، به گشتاور مغناطیسی مربوط است.

### ۱-۲ پراکندگی کشسان الکترون- پروتون ناقطبیده

برای یافتن سطح مقطع پراکندگی کشسان الکترون- پروتون در پایین‌ترین مرتبه‌ی اختلال (تبادل یک فوتون) گام‌هایی را که به رابطه‌ی (۲۷) انجامید، تکرار کنیم. این فرایند در شکل (۲) نشان داده شده است. دامنه‌ی پراکندگی  $e^- + p \rightarrow e^- + p$  به صورت زیر است

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^e \left( -\frac{1}{q^2} \right) J_p^\mu d^4x \quad (29)$$

که در آن  $q = p_a - p_b = k_\gamma - k_\gamma$  جریانی گذار الکترون در فضای

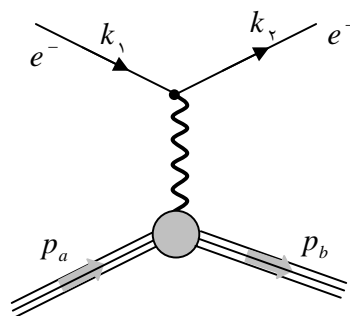
مکان عبارت است از

$$j_\mu^e = -e \bar{u}(k_\gamma) \gamma^\mu u(k_\gamma) e^{i(k_\gamma - k_\gamma) \cdot x} \quad (30)$$

اما برای جریانی گذار پروتون نمی‌توان جمله‌ای همانند رابطه‌ی (۳۰) نوشت. دلیل آن روشن است، در راس  $pp\gamma$  دایره‌ی توپر به معنی این است که پروتون ساختار دارد و جفت شدگی نقطه‌ای  $\gamma^\mu$  باید با چیز دیگری جایگزین شود. هنوز هم می‌توانیم پروتون حالت اولیه و نهایی را ذره‌ی دیراک در نظر بگیریم و با اسپینورهای دیراک توصیف کنیم.

همان‌گونه که از رابطه‌ی (۲۷) دیده می‌شود، در پراکندگی الکترون از بار نقطه‌ای، سطح مقطع دو جمله دارد، جمله‌ی متناسب با  $\cos(\theta/2)$  به پراکندگی کولمبی (از بار الکتریکی) مربوط است. جمله‌ی متناسب با  $\sin(\theta/2)$  سهم پراکندگی از گشتاور مغناطیسی ذره‌ی هدف است. در پراکندگی الکترون از پروتون دارای ساختار، بار نقطه‌ای نداریم. بنابراین یک عامل شکل برای توصیف غیر نقطه‌ای بودن بار الکتریکی لازم است و یک عامل شکل هم برای توصیف گشتاور مغناطیسی غیر نقطه‌ای بودن نیاز داریم. پس، می‌توان انتظار داشت که برای توصیف غیر نقطه‌ای بودن پروتون، دو عامل شکل برای توزیع بار الکتریکی و توزیع گشتاور مغناطیسی پروتون نیاز است. در زیر می‌خواهیم نشان دهیم که به راستی به دو عامل شکل برای توصیف پراکندگی کشسان الکترون- پروتون نیاز است.

پرسش پیش روی این است که جریانی گذار پروتون،  $J_p^\mu$ ، در رابطه‌ی (۲۹) چه شکلی ممکن است داشته باشد؟ شکل ممکن  $J_p^\mu$  را با توجه به اصول عمومی می‌توان فهمید. نخست توجه کنید که  $J_p^\mu$  باید یک چاربردار لورنتس باشد. بنابراین، بگذارید عمومی‌ترین چاربردار ممکن را بسازیم. چاربردارهایی که در راس پروتون در اختیار داریم و می‌توانیم برای ساختن  $J_p^\mu$  استفاده کنیم



شکل ۲ پراکندگی کشسان الکترون- پروتون



$p_a$ ،  $p_b$  و  $q$  اند. افزون بر این سه، ماتریس‌های  $\gamma$  دیراک را هم در اختیار داریم. اما بردارهای  $p_a$ ،  $p_b$  و  $q$  مستقل از هم نیستند، چون با  $p_a - p_b = q$  به هم مربوطند. پس، عمومی‌ترین شکل یک چاربردار لورنتس می‌تواند از جمله‌های متناسب با  $\gamma^\mu$ ،  $(p_b - p_a)$ ،  $(p_b + p_a)$  به صورت زیر ساخته بشود.  $p_a$  و  $p_b$  به تنهایی چاربردار لورنتس اند. ضرب آنها در ماتریس  $\gamma$  واقعیت را تغییر نمی‌دهد. پس، عمومی‌ترین چاربردار لورنتس (در  $x = 0$ ) می‌تواند به شکل زیر باشد

$$J_p^\mu = e\bar{u}(p_b) \left[ \begin{array}{l} \gamma^\mu k_\nu + i\sigma^{\mu\nu}(p_b - p_a)_\nu k_\nu + i\sigma^{\mu\nu}(p_b + p_a)_\nu k_\nu \\ + (p_b - p_a)^\mu k_\xi + (p_b + p_a)^\mu k_\circ \end{array} \right] u(p_a) \quad (31)$$

که در آن  $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{\hbar}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$  است و ضرایب  $k_i$  ها توابعی از متغیرهای اسکالر اند. تنها متغیر مستقل اسکالر موجود،  $q^\nu$  است. توجه کنید که  $p_a \cdot q$  یا  $p_b \cdot q$  هم کمیت‌های اسکالر اند، اما می‌توان آنها را برحسب  $q^\nu$  نوشت و در نتیجه، مستقل از  $q^\nu$  نیستند. برای مثال داریم

$$p_b = p_a + q \Rightarrow p_b^\nu = (p_a + q)^\nu \Rightarrow m_p^\nu = m_p^\nu + \nu p_a \cdot q + q^\nu \Rightarrow p_a \cdot q = -q^\nu / \nu \quad (32)$$

که نشان می‌دهد  $p_a \cdot q$  متغیر مستقل از  $q^\nu$  نیست.

رابطه‌ی (31) عمومی‌ترین چاربرداری است که می‌توان ساخت. می‌توان آن را ساده‌تر کرد: توجه کنید که با استفاده از جدا سازی گوردن جمله‌های شامل  $(p_b + p_a)^\mu$  را می‌توان به صورت ترکیب خطی  $\gamma^\mu$  و  $\sigma^{\mu\nu}(p_b - p_a)_\nu$  نوشت:

$$\bar{u}(p_b) \gamma^\mu u(p_a) = \frac{1}{\nu m} \bar{u}(p_b) \left[ (p_b + p_a)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p_b - p_a)_\nu \right] u(p_a) \quad (33)$$

پس، داریم

$$\frac{1}{\nu m} \bar{u}(p_b) \left[ (p_b + p_a)^\mu \right] u(p_a) = \bar{u}(p_b) \gamma^\mu u(p_a) - \frac{1}{\nu m} \bar{u}(p_b) \left[ i\sigma^{\mu\nu}(p_b - p_a)_\nu \right] u(p_a) \quad (34)$$

که با جا گذاری در رابطه‌ی (31) خواهیم داشت

$$J_p^\mu = e\bar{u}(p_b) \left[ \begin{array}{l} \gamma^\mu k_\nu + i\sigma^{\mu\nu}(p_b - p_a)_\nu k_\nu + i\sigma^{\mu\nu} \left[ \nu m \gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}(p_b - p_a)_\nu \right] k_\nu \\ + (p_b - p_a)^\mu k_\xi + \underbrace{\nu m \gamma^\mu k_\circ - i\sigma^{\mu\nu}(p_b - p_a)_\nu k_\circ}_{(p_b + p_a)^\mu k_\circ} \end{array} \right] u(p_a) \quad (35)$$

$$= e\bar{u}(p_b) \left[ \begin{array}{l} \gamma^\mu (k_\nu + \nu m k_\circ) + (k_\nu - k_\circ) i\sigma^{\mu\nu}(p_b - p_a)_\nu \\ + (p_b - p_a)^\mu (\nu k_\nu I + g_{\mu\nu} k_\xi) \end{array} \right] u(p_a) \quad (36)$$

توجه کنید که در جمله‌ی آخر رابطه‌ی (36) از  $\sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = \nu^2 I$  استفاده کردیم که در آن  $I$  ماتریس یکه است. پس، داریم

$$J_p^\mu = e\bar{u}(p_b) \left[ \gamma^\mu F_\nu(q^\nu) + \frac{iK}{\nu m_p} F_\nu(q^\nu) \sigma^{\mu\nu} q_\nu + q^\mu F_\nu(q^\nu) \right] u(p_a) \quad (37)$$

چون جریان پروتون پایسته است، یعنی  $\partial_\mu J_p^\mu = q_\mu J_p^\mu = 0$  است، بنابراین باید داشته باشیم

$$q_\mu J_p^\mu = e\bar{u}(p_b) \left[ \gamma^\mu q_\mu F_\nu(q^\nu) + \frac{iK}{\nu m_p} F_\nu(q^\nu) q_\mu \sigma^{\mu\nu} q_\nu + q_\mu q^\mu F_\nu(q^\nu) \right] u(p_a) = 0 \quad (38)$$

جمله‌ی اول سمت راست بنا به معادله‌ی دیراک، صفر است. برای دیدن آن از  $q = p_a - p_b$  استفاده کنید. خواهید داشت

$$e\bar{u}(p_b) [\not{p}_a - \not{p}_b] u(p_a) = 0 \quad (39)$$

چون، داریم  $(\not{p} - m)u(p) = 0$ . جمله‌ی دوم رابطه‌ی (۳۸) هم صفر است، چون  $\sigma^{\mu\nu}$  پادمتقارن است. جمله‌ی سوم برابر  $q^\nu F_\nu$  است. چون فوتون مجازی است، یعنی  $q^\nu \neq m = 0$ ، در نتیجه، پایستگی جریان لازم می‌دارد که  $F_\nu = 0$  باشد. سرانجام می‌توانیم جریان گذار پروتون را به صورت زیر بنویسیم

$$J_p^\mu = e\bar{u}(p_b) \left[ F_\nu(q^\nu) \gamma^\mu + \frac{i\kappa}{2m_p} F_\nu(q^\nu) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p_a) \quad (40)$$

در رابطه‌ی بالا  $F_\nu$  و  $F_\nu$  دو عامل شکل مستقل پروتون اند.

وقتی  $q^\nu \rightarrow 0$  میل می‌کند، طول موج فوتون متناظر بزرگ می‌شود و در نتیجه، پروتون به صورت جسم نقطه‌ای دیده می‌شود. به بیان دیگر، فوتون با طول موج بزرگ‌تر از حدود یک فرمی، پروتون را بدون ساختار می‌بیند. در این صورت، جریان آن هم باید به جریان جسم نقطه‌ای بدون ساختار (مانند جریان الکترون یا میون) کاهش پیدا کند. این شرط لازم می‌دارد که

$$F_\nu(q^\nu = 0) = 1, \quad F_\nu(q^\nu = 0) = 1 \quad (41)$$

باشند. برعکس گشتاور مغناطیسی الکترون یا میون، گشتاور مغناطیسی پروتون یک مگنتون بوهر،  $\mu_B \equiv e/2m_p$ ، نیست، بلکه مقداری آن  $2,79\mu_B$  است. به این دلیل  $\kappa$  را گشتاور مغناطیسی نابهنجار پروتون می‌نامند. وقتی پروتون با فوتون حقیقی (یعنی  $q^\nu \approx 0$ ) کاویده می‌شود، پروتون به صورت ذره‌ای با بار الکتریکی  $e$  و گشتاور مغناطیسی  $(1+\kappa)/2m_p$  دیده می‌شود که در آن  $\kappa = 1,79$  است.

**نکته:** برای نوشتن عمومی‌ترین شکل چاربردار جریان از  $\gamma^\mu$  استفاده نکردیم، چون جمله‌ی متناسب با  $\gamma^0$  پایستگی پارایته را نقض می‌کند. برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی پارایته را پایسته نگه می‌دارند. ♣

## ۲-۲ محاسبه‌ی سطح مقطع پراکندگی $e^- p \rightarrow e^- p$

محاسبه‌ی سطح مقطع پراکندگی از محاسبه‌ی عنصر ماتریسی کاهیده‌ی شکل (۲) آغاز می‌شود. داریم

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \frac{e^\nu}{q^\nu} \left[ \bar{u}(k_\nu) \gamma^\mu u(k_\nu) \right] \left\{ \bar{u}(p_b) \left[ F_\nu(q^\nu) \gamma^\mu + \frac{i\kappa}{2m_p} F_\nu(q^\nu) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p_a) \right\} \quad (42)$$

بگذارید نخست عبارت درون  $\{ \}$  را اندکی تغییر دهیم و  $\kappa$  را در  $F_\nu(q^\nu)$  جذب کنیم:  $F'_\nu \equiv \kappa F_\nu$ . خواهیم داشت

$$J_p^\mu = \bar{u}(p_b) \left[ F_\nu(q^\nu) \gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m_p} q_\nu F'_\nu(q^\nu) \right] u(p_a) \quad (43)$$

با استفاده از جداسازی گوردن، رابطه‌ی (۳۴)، می‌توان  $\sigma^{\mu\nu} q_\nu$  را از رابطه‌ی (۴۳) حذف کرد. به دست می‌آید

$$\begin{aligned} J_p^\mu &= \bar{u}(p_b) \left[ F_\nu(q^\nu) \gamma^\mu + (F'_\nu/2m_p) \{ 2m_p \gamma^\mu - (p_b + p_a)_\mu \} \right] \\ &= \bar{u}(p_b) \left[ (F_\nu + F'_\nu) \gamma^\mu - (K_\mu/2m_p) F'_\nu \right] u(p_a) \end{aligned} \quad (44)$$

که در آن  $K \equiv p_a + p_b$  است. بنابراین،  $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \frac{e^\nu}{q^\nu} \left[ \bar{u}(k_\nu) \gamma^\mu u(k_\nu) \right] \left\{ \bar{u}(p_b) \left[ (F_\nu + F'_\nu) \gamma^\mu - (K_\mu/2m_p) F'_\nu \right] u(p_a) \right\} \quad (45)$$

حال می‌توان  $|\overline{\mathcal{M}}|^\nu$  را حساب کرد. داریم

$$|\overline{\mathcal{M}}|^\gamma = \frac{1}{\xi} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M}_{i \rightarrow f}^* \mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \left( \frac{e^\gamma}{q^\gamma} \right)^\gamma \ell_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^p \quad (46)$$

در رابطه‌ی بالا ضریب  $1/\xi = (\sqrt{2})(\sqrt{2})$  نتیجه‌ی میانگین‌گیری بر روی اسپین الکترون و پروتون فرودی است.  $L_{\mu\nu}^p$  و  $\ell_e^{\mu\nu}$  تانسورهای جریان الکترون و پروتون اند. تانسور لپتونی  $\ell_e^{\mu\nu}$  را پیش‌تر حساب کردیم (نگاه کنید به بخش پراکندگی الکترون-میون در فصل پیش)، با این حال آن را برای یادآوری در اینجا تکرار می‌کنم.

$$\ell_e^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\gamma} \sum_{s_\gamma, s_\gamma'} [\bar{u}(k_\gamma) \gamma^\mu u(k_\gamma)] [\bar{u}(k_\gamma) \gamma^\nu u(k_\gamma)]^* = \frac{1}{\gamma} \sum_{s_\gamma, s_\gamma'} [\bar{u}(k_\gamma) \gamma^\mu u(k_\gamma)] [\bar{u}(k_\gamma) \gamma^\nu u(k_\gamma)] \quad (47)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \sum_{s_\gamma} \bar{u}(k_\gamma) \gamma^\mu (\not{K}_\gamma + m_e) \gamma^\nu u(k_\gamma) = \frac{1}{\gamma} \sum_{s_\gamma} \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{K}_\gamma + m_e) \gamma^\nu u(k_\gamma) \bar{u}(k_\gamma)] \quad (48)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{K}_\gamma + m_e) \gamma^\nu (\not{K}_\gamma + m_e)] \quad (49)$$

با استفاده از رد حاصل ضرب ماتریس‌های گاما، رابطه‌ی (49) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \ell_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{\gamma} \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{K}_\gamma + m_e) \gamma^\nu (\not{K}_\gamma + m_e)] = \frac{1}{\gamma} [\xi k_\gamma^\mu k_\gamma^\nu - \xi g^{\mu\nu} k_\gamma \cdot k_\gamma + \xi k_\gamma^\mu k_\gamma^\nu + \xi g^{\mu\nu} m_e^\gamma] \\ &= 2 \left[ k_\gamma^\mu k_\gamma^\nu + k_\gamma^\mu k_\gamma^\nu + g^{\mu\nu} (-k_\gamma \cdot k_\gamma + m_e^\gamma) \right] = 2 \left( k_\gamma^\mu k_\gamma^\nu + k_\gamma^\mu k_\gamma^\nu + \frac{q^\gamma g^{\mu\nu}}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

برای نوشتن جمله‌ی سوم در تساوی آخری از  $k_\gamma - k_\gamma = q$  استفاده کردیم:

$$(k_\gamma - k_\gamma)^\gamma = q^\gamma \Rightarrow k_\gamma^\gamma + k_\gamma^\gamma - 2k_\gamma \cdot k_\gamma = q^\gamma \Rightarrow 2m_e^\gamma - 2k_\gamma \cdot k_\gamma = q^\gamma \Rightarrow -k_\gamma \cdot k_\gamma + m_e^\gamma = q^\gamma/2 \quad (51)$$

تانسور هادرونی  $L_{\mu\nu}^p$  هم به همین صورت حساب می‌شود. داریم:

$$L_{\mu\nu}^p =$$

$$\frac{1}{\gamma} \sum_{s_a, s_b} \left\{ \bar{u}(p_b) \left[ (F_\gamma + F_\gamma') \gamma^\mu - \frac{K_\mu}{\gamma m_p} F_\gamma' \right] u(p_a) \right\} \cdot \left\{ \bar{u}(p_b) \left[ (F_\gamma + F_\gamma') \gamma^\nu - \frac{K_\nu}{\gamma m_p} F_\gamma' \right] u(p_a) \right\}^* \quad (52)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left\{ \begin{aligned} &(F_\gamma + F_\gamma')^\gamma \text{Tr} [\not{p}_b \gamma^\mu \not{p}_a \gamma^\nu + m_p^\gamma \gamma^\mu \gamma^\nu] + F_\gamma'^\nu \frac{K_\mu K_\nu}{\xi m_p^\gamma} \text{Tr} [\not{p}_b \not{p}_a + m_p^\gamma] \\ &- \xi F_\gamma' (F_\gamma + F_\gamma') K_\mu K_\nu \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

با توجه به این که  $s = (p_a + k_\gamma)^\gamma$  است، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^\gamma &= \frac{1}{\xi} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M}_{i \rightarrow f}^* \mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \xi \left( \frac{e^\gamma}{q^\gamma} \right)^\gamma \left\{ \begin{aligned} &(F_\gamma + F_\gamma')^\gamma \left[ (s - m_p^\gamma - m_e^\gamma)^\gamma + q^\gamma \left( s + \frac{q^\gamma}{\gamma} \right) \right] \\ &- \left[ \gamma F_\gamma F_\gamma' + \left( 1 + \frac{q^\gamma}{\xi m_p^\gamma} F_\gamma'^\nu \right) \right] \left[ (s - m_p^\gamma - m_e^\gamma)^\gamma + q^\gamma (s - m_e^\gamma) \right] \end{aligned} \right\} \\ &= \xi \left( \frac{e^\gamma}{q^\gamma} \right)^\gamma \left\{ \left[ F_\gamma^\gamma - \frac{q^\gamma}{\xi m_p^\gamma} F_\gamma'^\nu \right] \left[ (s - m_p^\gamma - m_e^\gamma)^\gamma + q^\gamma (s - m_e^\gamma) \right] + (F_\gamma + F_\gamma')^\gamma q^\gamma \left( m_e^\gamma + \frac{q^\gamma}{\gamma} \right) \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

در عمل بهتر است از ترکیب‌های خطی  $F_1$  و  $F_1'$  استفاده شود. با پیروی از رابرت سکس، عامل‌های شکل الکتریکی  $G_E(q^\vee)$  و مغناطیسی  $G_M(q^\vee)$  را با ترکیب‌های خطی  $F_1$  و  $F_1'$  به صورت زیر تعریف کنید

$$G_E(q^\vee) = F_1(q^\vee) + \frac{q^\vee}{\xi m_p^\vee} F_1'(q^\vee) \quad , \quad G_M(q^\vee) = F_1(q^\vee) + F_1'(q^\vee) \quad (55)$$

همچنین داریم:

$$G_E^\vee - \frac{q^\vee}{\xi m_p^\vee} G_M^\vee = \left(1 - \frac{q^\vee}{\xi m_p^\vee}\right) F_1^\vee - \frac{q^\vee}{\xi m_p^\vee} \left(1 - \frac{q^\vee}{\xi m_p^\vee}\right) F_1'^\vee \Rightarrow F_1^\vee - \frac{q^\vee}{\xi m_p^\vee} F_1'^\vee = \frac{G_E^\vee - (q^\vee/\xi m_p^\vee) G_M^\vee}{1 - (q^\vee/\xi m_p^\vee)} \quad (56)$$

برای پروتون و نوترون، روشن است که

$$G_E^p(\circ) = 1, \quad G_E^n(\circ) = \circ \quad ; \quad G_M^p(\circ) = 2, 79, \quad G_M^n(\circ) = -1, 91 \quad (57)$$

برای این که سطح مقطع پراکندگی را حساب کنیم، باید جمله‌های رابطه‌ی (54) را برحسب کمیت‌های قابل اندازه‌گیری یا داده شده بنویسیم. در چارچوب آزمایشگاه داریم:  $p_a = (m_p, \mathbf{0})$  و  $k_1 = (E, \mathbf{k}_1)$  و  $k_2 = (E', \mathbf{k}_2)$  با استفاده از

$$p_b^\vee = m_p^\vee = (p_a + q)^\vee$$

$$M^\vee = (p_a + q)^\vee = p_a^\vee + q^\vee + 2p_a \cdot q \Rightarrow q^\vee = -2(m_p, \mathbf{0}) \cdot (E - E', \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \quad (58)$$

$$\Rightarrow q^\vee = -2m_p (E - E') = -2m_p v \quad ; \quad v \equiv (E - E') \quad (59)$$

در حد  $s \gg m_e^\vee$  الکترون‌های فرودی و خروجی نسبیتی اند و می‌توان از جرم آنها چشم‌پوشی کرد. در این صورت خواهیم داشت (توجه کنید که به ازای  $m = \circ$  داریم  $E = |\mathbf{k}|$ ):

$$q^\vee = (k_1 - k_2)^\vee = (E - E', \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot (E - E', \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = (E - E')^\vee - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^\vee \\ = \underbrace{E'^\vee - k_2^\vee}_{m_e^\vee \rightarrow \circ} + \underbrace{E^\vee - k_1^\vee}_{m_e^\vee \rightarrow \circ} - 2E'E - 2\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \approx -2E'E - 2\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \approx -2E'E - 2E'E \cos \theta \quad (60)$$

$$\approx -2EE (\vee - \cos \theta) = -\varepsilon E'E \sin^\vee \theta / 2 \Rightarrow Q^\vee = \varepsilon E'E \sin^\vee \theta / 2 \quad (61)$$

از رابطه‌های (59) و (61) دیده می‌شود که

$$-2m_p (E - E') = -2EE (\vee - \cos \theta) \Rightarrow \frac{E'}{E} = \frac{\vee}{\left[1 + (E/m_p)(\vee - \cos \theta)\right]} \\ \Rightarrow \frac{E'}{E} = \frac{\vee}{1 + (2E/m_p) \sin^\vee \theta / 2} \quad (62)$$

این رابطه نشان می‌دهد که به ازای  $E$  معین،  $\cos \theta$  و  $E'$  متغیرهای مستقل نیستند.

رابطه‌ی (62) به ویژه نشان می‌دهد که برای هدف با جرم بزرگ، یعنی  $E/m_p \ll 1$ ، انرژی انتقالی به هدف،  $E - E' \approx \circ$  و قابل چشم‌پوشی است، اما تکانه‌ی انتقالی را نمی‌توان نادیده گرفت.

حال می‌توانیم به جمله‌های سمت راست رابطه‌ی (54) برگردیم. ناگزیر کمیت‌های سینماتیکی را در شکل دلخواه بازنویسی

کنیم. جمله‌ی  $(s - m_p^\vee - m_e^\vee)^\vee + q^\vee (s - m_e^\vee)$  را می‌توان ساده کرد. در چارچوب آزمایشگاه خواهیم داشت

$$s = (p_a + k_1)^\vee = p_a^\vee + k_1^\vee + 2p_a \cdot k_1 = m_p^\vee + m_e^\vee + 2(m_p, \mathbf{0}) \cdot (E, \mathbf{k}_1) = m_p^\vee + m_e^\vee + 2m_p E \quad (63)$$

در نتیجه،

$$(s - m_p^\gamma - m_e^\gamma)^\gamma = (m_p^\gamma + m_e^\gamma + \gamma m_p E - m_p^\gamma - m_e^\gamma)^\gamma = \varepsilon m_p^\gamma E^\gamma \approx \varepsilon m_p^\gamma EE' \quad (74)$$

و با استفاده از رابطه‌ی (71) برای  $q^\gamma$  به دست می‌آید

$$q^\gamma (s - m_e^\gamma) = -\varepsilon EE' \sin \theta / \gamma (m_p^\gamma + m_e^\gamma + \gamma m_p E - m_e^\gamma) = -\varepsilon EE' \sin \theta / \gamma (m_p^\gamma + \gamma m_p E) \quad (75)$$

اگر رابطه‌های (74) و (75) را با هم جمع کنیم خواهیم داشت

$$(s - m_p^\gamma - m_e^\gamma)^\gamma + q^\gamma (s - m_e^\gamma) = \varepsilon m_p^\gamma EE' - \varepsilon m_p^\gamma EE' \sin^\gamma \theta / \gamma \left( 1 + \gamma \underbrace{(E/m_p)}_{\ll 1} \right) \approx \varepsilon m_p^\gamma EE' \cos^\gamma \theta / \gamma \quad (76)$$

همچنین جمله‌ی  $q^\gamma (m_e^\gamma + q^\gamma / \gamma) \approx q^\gamma (q^\gamma / \gamma)$  را می‌توان به صورت دلخواه نوشت

$$\begin{aligned} q^\gamma (q^\gamma / \gamma) &= -\varepsilon EE' \sin^\gamma \theta / \gamma (q^\gamma / \gamma) = \varepsilon EE' \sin^\gamma \theta / \gamma (-q^\gamma / \gamma) \\ &= \varepsilon m_p^\gamma EE' \sin^\gamma \theta / \gamma (-q^\gamma / \gamma m_p^\gamma) = \varepsilon m_p^\gamma EE' \cos^\gamma \theta / \gamma (-q^\gamma / \gamma m_p^\gamma) \tan^\gamma \theta / \gamma \end{aligned} \quad (77)$$

با جایگزینی رابطه‌های (54)، (55)، (75) و (76) در رابطه‌ی (53) برای  $|\overline{\mathcal{M}}|^\gamma$  خواهیم داشت

$$|\overline{\mathcal{M}}|^\gamma = \varepsilon \left( \frac{e^\gamma}{q^\gamma} \right)^\gamma \varepsilon m_p^\gamma EE' \cos^\gamma \theta / \gamma \left\{ \frac{G_E^\gamma(q^\gamma) - \frac{q^\gamma}{\varepsilon m_p^\gamma} G_M^\gamma(q^\gamma)}{1 - \frac{q^\gamma}{\varepsilon m_p^\gamma}} - \frac{q^\gamma}{\gamma m_p^\gamma} G_M^\gamma(q^\gamma) \tan^\gamma \theta / \gamma \right\} \quad (78)$$

حال در شرایطی هستیم که می‌توانیم سطح مقطع جزیی پراکندگی را در چارچوب آزمایشگاه حساب کنیم. با استفاده از رابطه‌ی (161-5) برای پراکندگی  $e\mu \rightarrow e\mu$  می‌دانیم که

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} &= \frac{|\mathbf{k}_\gamma|^\gamma}{|\mathbf{k}_\gamma|^\gamma} \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^\gamma}{\gamma \varepsilon \pi^\gamma m_p^\gamma} \\ &= \frac{E'^\gamma}{E^\gamma} \frac{1}{\gamma \varepsilon \pi^\gamma m_p^\gamma} \varepsilon \left( \frac{e^\gamma}{q^\gamma} \right)^\gamma \varepsilon m_p^\gamma EE' \cos^\gamma \theta / \gamma \left\{ \frac{G_E^\gamma(q^\gamma) - \frac{q^\gamma}{\varepsilon m_p^\gamma} G_M^\gamma(q^\gamma)}{1 - \frac{q^\gamma}{\varepsilon m_p^\gamma}} - \frac{q^\gamma}{\gamma m_p^\gamma} G_M^\gamma(q^\gamma) \tan^\gamma \theta / \gamma \right\} \end{aligned} \quad (79)$$

با جایگذاری  $q^\gamma = -\varepsilon EE' \sin^\gamma \theta / \gamma$  و  $|\mathbf{k}_\gamma| = E'$ ،  $|\mathbf{k}_\gamma| = E$  در رابطه‌ی بالا، به دست می‌آید

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \frac{E'^\gamma}{(-\varepsilon EE' \sin^\gamma \theta / \gamma)^\gamma} \frac{e^\gamma}{\gamma \varepsilon \pi^\gamma m_p^\gamma} (1 \gamma m_p^\gamma) \frac{EE'}{E^\gamma} \cos^\gamma \theta / \gamma \{ \dots + \dots \} \quad (70)$$

$$= \frac{1}{1 \gamma E^\gamma \sin^\gamma \theta / \gamma} \left( \frac{e^\gamma}{\varepsilon \pi^\gamma} \right) \frac{E'}{E} \cos^\gamma \theta / \gamma \left\{ \frac{G_E^\gamma(q^\gamma) - \frac{q^\gamma}{\varepsilon m_p^\gamma} G_M^\gamma(q^\gamma)}{1 - \frac{q^\gamma}{\varepsilon m_p^\gamma}} - \frac{q^\gamma}{\gamma m_p^\gamma} G_M^\gamma(q^\gamma) \tan^\gamma \theta / \gamma \right\} \quad (71)$$

اگر تعریف کنیم  $\tau \equiv -q^\gamma / \varepsilon m_p^\gamma$  و از  $\alpha \equiv e^\gamma / \varepsilon \pi^\gamma$  استفاده کنیم، رابطه‌ی بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \left( \frac{\alpha^\gamma}{\varepsilon E^\gamma \sin^\gamma \theta / \gamma} \right) \frac{E'}{E} \left\{ \frac{G_E^\gamma(q^\gamma) + \tau G_M^\gamma(q^\gamma)}{1 + \tau} \cos^\gamma \theta / \gamma + \gamma \tau G_M^\gamma(q^\gamma) \sin^\gamma \theta / \gamma \right\} \quad (72)$$

رابطه‌ی (72) را به شکل‌های متفاوت هم می‌نویسند. به ویژه، برای مقایسه با سطح مقطع پراکندگی الکترون از پروتون بدون

ساختار، آن را برحسب سطح مقطع موت می‌توان نوشت. اگر به یاد بیاوریم که سطح مقطع موت به صورت زیر است

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} = \frac{\xi \alpha^2 E'^2}{16 E^2 E'^2 \sin^2 \theta/2} \cos^2 \theta/2 = \frac{\alpha^2}{4 E^2 \sin^2 \theta/2} \cos^2 \theta/2 \quad (73)$$

آنگاه، رابطه‌ی (72) به صورت زیر درمی‌آید

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left\{ \frac{G_E^2(q^2) + \tau G_M^2(q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(q^2) \tan^2 \theta/2 \right\} \quad (74)$$

و با جایگزینی  $E'/E$  از رابطه‌ی (62) خواهیم داشت

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \frac{(d\sigma/d\Omega)_{\text{Mott}}}{1 + \frac{E}{M} \sin^2 \theta/2} \left\{ \frac{G_E^2(q^2) + \tau G_M^2(q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(q^2) \tan^2 \theta/2 \right\} \quad (75)$$

$$= \left( \frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{lab}}} \right)_{\text{NS}} \left\{ \frac{G_E^2(q^2) + \tau G_M^2(q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(q^2) \tan^2 \theta/2 \right\} \quad (76)$$

که در آن زیرنویس  $NS$  به معنی "بدون ساختار" بودن است. سطح مقطع پراکندگی کشسان الکترون-پروتون، رابطه‌ی (76)، را سطح مقطع روزنبلات\* می‌نامند.  $G_E(q^2)$  و  $G_M(q^2)$  به ترتیب، عامل شکل الکتریکی و مغناطیسی نامیده می‌شوند. پیش از این که خواهیم شکل دیگری از رابطه‌ی (75) را بنویسیم، به چند نکته در باره‌ی آن توجه کنید.

#### • چند نکته

**نکته ۱:** به جای  $F_1$  و  $F_2' = \kappa F_2$  از ترکیب‌های خطی آنها استفاده کردیم. با این کار در رابطه‌ی سطح مقطع جمله‌های تقاطعی،  $F_1 F_2'$  ظاهر نمی‌شود و در نتیجه، توصیف سطح مقطع ساده‌تر می‌شود. می‌توان  $G_E(q^2)$  و  $G_M(q^2)$  را تعمیم عامل‌های شکل غیر نسبیتی پنداشت که در آغاز این فصل به آنها پرداختیم. بنابراین، شاید گمان کنید که می‌توان آنها را تبدیل فوری‌هی بار الکتریکی و گشتاور مغناطیسی پروتون توصیف کرد. متأسفانه، پس‌زنی پروتون این توصیف را نشدنی می‌کند. اما می‌توان نشان داد که در چارچوب لورنتس خاصی به نام چارچوب بریت<sup>◇</sup> (یا دیوار آجری) که با  $\mathbf{p}_b = -\mathbf{p}_a$  تعریف می‌شود  $G_E(q^2)$  و  $G_M(q^2)$  رابطه‌ی تنگاتنگی با توزیع بار و گشتاور مغناطیسی پروتون دارند. ♣

**نکته ۲:** برای نوکلئون بدون ساختار  $F_1^p(q^2) = 1$  و  $F_2^p(q^2) = 0$  و  $F_1^n(q^2) = 0$  و  $F_2^n(q^2) = 1$  اند. در نتیجه،  $G_E^p(q^2) = 1$  و  $G_M^p(q^2) = 0$  اند. همچنین  $G_E^n(q^2) = 0$  و  $G_M^n(q^2) = 1$  است. پس، سطح مقطع پراکندگی الکترون با نوترون نقطه‌ای (بدون ساختار) صفر است. روشن است که ما همچنین سطح مقطع پراکندگی الکترون و پروتون نقطه‌ای، رابطه‌ی (27)، و سطح مقطع پراکندگی، رابطه‌ی (5-164) را باز یافتیم. ♣

**نکته ۳:** همان‌گونه که گفتیم، در رابطه‌ی (76) زیرنویس  $NS$  به معنی بدون ساختار بودن است.  $(d\sigma/d\Omega_{\text{lab}})_{\text{NS}}$  از ضرب دو جمله تشکیل شده است:  $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Mott}} = \left[ (\alpha \cos \theta/2) / 2E \sin^2 \theta/2 \right]^2$  که پیش‌تر در فصل 5 و در رابطه‌ی (5-167) (با تقسیم بر  $2\pi$ ) با آن روبرو شدیم و به پراکندگی ذره‌ی باردار نقطه‌ای با اسپین  $1/2$  از هدف با بار الکتریکی  $\pm e$  مربوط است. جمله‌ی دوم  $\sqrt{1 + 2E/M \sin^2 \theta/2}$  در  $(d\sigma/d\Omega_{\text{lab}})_{\text{NS}}$  تصحیحی برای پس‌زنی هدف با جرم  $M$  است. سطح مقطع موت

\* Rosenbluth Cross-section

◇ Breit (or brick wall) Frame

بدون  $\cos^2 \theta/2$  همانا سطح مقطع پراکندگی راثر فرورد  $\sigma_R \equiv [\alpha/2E \sin^2 \theta/2]^2$  است. سطح مقطع راثر فرورد، پراکندگی ذره‌ی نقطه‌ای با بار  $\pm e$  بدون اسپین از هدف خیلی سنگین بدون اسپین و با بار  $\pm e$  را توصیف می‌کند. توزیع زاویه‌ای  $\cos^2 \theta/2$  در  $(d\sigma/d\Omega)_{Mott}$  سرشت اسپین  $1/2$  ذره‌ی فرودی را نشان می‌دهد. ♣

**نکته ۴:** ضرب  $\tan^2 \theta/2$  در رابطه‌ی (۷۶) از  $G_M^2 \equiv (F_1 + F_2')^2$  در جمله‌ی آخر رابطه‌ی (۵۴) می‌آید و به واسطه‌ی گشتاور مغناطیسی، سرشت اسپین هدف را نشان می‌دهد. به یاد بیاورید که گشتاور مغناطیسی هر ذره‌ی دیراک (حتی ذره‌ی نقطه‌ای) برابر یک مگنتون بوهر دارد. ضرب  $\tan^2 \theta/2$  با اسپین  $1/2$  هدف متناظر است: اگر هدف بدون اسپین، مثلاً پایون می‌بود، این جمله وجود نمی‌داشت و ما سطح مقطع پراکندگی موت را باز می‌یافتیم. در  $q^2$  های بزرگ، ضرب  $\tau \equiv -q^2/\epsilon m_p^2$  در جمله‌ی مغناطیسی پر اهمیت می‌شود. کوتاه آنکه،  $\cos^2 \theta/2$  سرشت اسپین  $1/2$  ذره‌ی فرودی و  $\tan^2 \theta/2$  سرشت اسپین  $1/2$  هدف را نشان می‌دهند. بنابراین، سطح مقطع پراکندگی الکترون- پایون را می‌توان به سادگی از رابطه‌ی (۷۵) نتیجه‌گیری کرد:

$$\left. \frac{d\sigma(e^- + \pi^\pm \rightarrow e^- + \pi^\pm)}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{lab}}} \right)_{NS} \left| F_\pi(q^2) \right|^2 \quad (77)$$

به همین ترتیب، سطح مقطع پراکندگی الکترون از هسته‌ی بدون اسپین  $N$  با بار الکتریکی  $Ze$  که در بخش ۱ به عنوان مثالی از عامل شکل در نظر گرفته شد، عبارت است از

$$\left. \frac{d\sigma(e^- + N \rightarrow e^- + N)}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{lab}}} \right)_{NS} \left| F_N(q^2)/e \right|^2 \quad (78)$$

که برای هسته‌ی نقطه‌ای بدون اسپین به  $Z^2 (d\sigma/d\Omega_{\text{lab}})_{NS}$  میل می‌کند.

در بخش بعدی به پراکندگی ژرف ناکشسان لپتون- نوکلئون خواهیم پرداخت. در آنجا خواهیم دید که کوارک‌ها را به عنوان اندرونه‌ی سازنده‌ی نوکلئون با  $\tan^2 \theta/2$  آشکار خواهند شد. ♣

**نکته ۵:** توزیع زاویه‌ای  $[\sin^4 \theta/2]^{-1}$  که در  $(d\sigma/d\Omega_{\text{lab}})_{NS}$  نهفته است (در واقع، بخشی از  $(d\sigma/d\Omega)_{Mott}$  است) با کشف هسته رابطه‌ی نزدیکی دارد. تا به امروز لایه‌های ظریف و ظریف‌تر ماده، از اتم تا هسته تا نوکلئون، و از نوکلئون تا کوارک، همگی به همان روشی که راثر فرورد هسته را کشف کرد، آشکار سازی شده‌اند. پیش از راثر فرورد، اتم بنیادی‌ترین جزء ماده پنداشته می‌شد. چون اتم از نظر الکتریکی خنثی است و شامل ذره‌های سبک با بار منفی (الکترون‌ها) است، پرسش این بود که ذره‌های مثبت و سنگین (در مقایسه با الکترون) آن چگونه توزیع شده‌اند. اگر بارهای مثبت به طور یکنواخت در تمامی حجم اتم توزیع شده بودند (چیزی که تامسون، یابنده‌ی الکترون، می‌پنداشت) می‌بایست با تابانیدن یون‌های He (ذره‌های  $\alpha$ ) بر روی ورقه‌ی نازک فلزی باریکه‌ی  $\alpha$  با زاویه‌ی اندکی در آزمایش گایگر و مرسدن منحرف می‌شدند. برعکس تصور آنها تعداد قابل توجهی از ذره‌های  $\alpha$  با زاویه‌ی  $\theta \geq 90^\circ$  منحرف شدند. دو سال طول کشید تا راثر فرورد بتواند آن را توصیف کند.

اگر مدل تامسون درست می‌بود، پراکندگی‌های با زاویه‌ی بزرگ فقط می‌توانست بر اثر پراکندگی‌های پی‌درپی از تعداد زیادی از اتم‌ها به وجود بیاید. اما محاسبه‌ی ساده‌ای بر پایه‌ی احتمالات نشان داد برای این که یک پراکندگی با زاویه‌ی  $\theta \geq 90^\circ$  روی بدهد، احتمال از مرتبه‌ی  $10^{-2000}$  است و نه از مرتبه‌ی  $1/20000$  که گایگر و مرسدن در آزمایش خود یافته بودند. قاعده‌ی

ساده‌ی  $[\sin^4 \theta/2]^{-1}$  که راثر فرورد پیدا کرد و گروه همکارهایش به طور تجربی درستی آن را آزمودند، فقط وقتی قابل توجهی است که ذره‌های فرودی با مانع سختی برخورد کنند و بار این مانع به ناحیه‌ی بسیار کوچکی در حجم اتم محدود باشد. بار آن

نمی‌تواند در حجم بزرگ اتم پخش شود. معنی فیزیکی توزیع زاویه‌ای  $[\sin^2 \theta / 2]^{-1}$  روشن است. این جمله با  $(\sqrt{q^2})^2$  متناسب است. به یاد بیاورید که  $1/q^2$  انتشارگر فوتونی است که هدف باردار نقطه‌ای را در مرکز اتم خیلی بزرگ می‌کاود. اگر این چنین نمی‌بود و بار الکتریکی به طور تصادفی در حجم اتم توزیع شده بود و فوتون با یک چنین توزیع باری برخورد می‌کرد، عامل شکل اتم که در  $q^2$  های بزرگ (زاویه‌ی  $\theta$  بزرگ) خیلی سریع فروافت می‌کند، احتمال مشاهده‌ی یک رویداد پراکندگی با زاویه‌ی بزرگ را به طور فزاینده نامحتمل می‌کرد. به این ترتیب، مفهوم هسته‌ی نقطه‌ای اتم زاده شد. پس از حدود یک صد سال، هنوز هم این ویژگی چشم‌گیر با ماست. در همه‌ی فرایندهای پراکندگی، انحراف بزرگ ذره‌ی فرودی به معنی وجود جزء سازنده‌ی سخت نقطه مانند در هدف است. ♣

به معادله‌ی (۷۶)، سطح مقطع پراکندگی روزنبلاث، برگردیم. اگر برای هر  $q^2$  معینی داده‌های تجربی  $(d\sigma/d\Omega)_{lab}$  را برحسب  $\tan^2 \theta / 2$  رسم کنیم، با استفاده از شکل خطی آن،  $A(q^2) + B(q^2) \tan^2 \theta / 2$ ، می‌توانیم  $A(q^2)$  و  $B(q^2)$  را از روی شکل حساب و از یکدیگر جدا کنیم و در نتیجه، عامل‌های شکل  $G_E(q^2)$  و  $G_M(q^2)$  را به دست بیاوریم. بررسی‌های تجربی در پراکندگی کشسان الکترون-نوکلئون نشان می‌دهند که  $G_E(q^2)$  و  $G_M(q^2)$  با افزایش  $q^2$  به صورت زیر کاهش می‌یابند.

$$\frac{G_E^p(q^2)}{G_E^p(0)} = \frac{G_M^p(q^2)}{G_M^p(0)} = \frac{G_M^n(q^2)}{G_M^n(0)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{q^2}{\Lambda^2}\right)^2} \quad ; \quad G_E^n(q^2) = 0 \quad (79)$$

رفتار بالا رفتار یک تابع دوقطبی با  $\Lambda = 0.8 \text{ GeV}$  است. با تبدیل وارون فوریه‌ی  $[1 - (q^2/\Lambda^2)]^{-2}$  در حد غیر نسبیتی (یعنی  $|\mathbf{q}|^2 \rightarrow q^2$ ) توزیع بار الکتریکی پروتون،  $\rho(r = |\mathbf{x}|)$ ، و میانگین مربع شعاع آن به دست می‌آید:

$$\rho(r) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{\left(1 + \frac{|\mathbf{q}|^2}{\Lambda^2}\right)^2} = \frac{\Lambda^3}{\pi^2} e^{-\Lambda r}, \quad \int d^3x \rho(r) = 1 \quad (80)$$

$$\langle r^2 \rangle = 6 \left( dG_E(q^2) / dq^2 \right)_{q^2=0} = 6 \frac{d}{dq^2} \left( 1 - \frac{q^2}{\Lambda^2} \right)^{-2} \approx (0.81 \times 10^{-13} \text{ cm})^2 \quad (81)$$

توزیع بالا،  $\rho(r) = \Lambda^3 e^{-\Lambda r} / (\pi^2)$  با  $r \rightarrow 0$  به مقدار ثابتی میل می‌کند. این رفتار نشان می‌دهد که هسته‌ی سختی در درون نوکلئون وجود ندارد. نوکلئون مانند گیلای هسته‌دار نیست. هسته‌ی سخت با تابع تک قطبی کاهشی برای عامل شکل توصیف می‌شود و به توزیع فضایی بار  $\rho(r) = \Lambda^3 e^{-\Lambda r} / (\pi^2 r)$  می‌انجامد. این تابع به ازای  $r \rightarrow 0$  به بینهایت میل می‌کند. حال پرسش این است که آیا پروتون مانند انار است یا مثل یک گوی ژله است؟ شم فیزیکی پیکربندی اناری را پیشنهاد می‌کند و در بخش بعدی خواهیم دید که نوکلئون از ذره‌های باردار نقطه‌ای به نام کوآرک ساخته شده است.

همان‌گونه که رابطه‌ی (۶۲) نشان می‌دهد و ما بر آن تاکید کردیم،  $E'$  و  $\cos \theta$  دو متغیر مستقل نیستند. این به ما اجازه می‌دهد که سمت چپ رابطه‌ی (۷۶) را به گونه‌ی دیگری هم بنویسیم. نخست توجه کنید که از  $q^2 = -2EE'(\mathbf{1} - \cos \theta)$  داریم

$$dq^2 = 2EE' d(\cos \theta) + (\mathbf{1} - \cos \theta)(-2E) \frac{dE'}{d(\cos \theta)} d(\cos \theta) \quad (82)$$

از طرف دیگر، اگر رابطه‌ی (۶۲) را به صورت زیر بنویسیم



$$E' = \frac{E}{\left[1 + \left(\frac{E}{m_p}\right)(1 - \cos\theta)\right]} \quad (82)$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{dE'}{d(\cos\theta)} = \frac{E'/m_p}{\left[1 + \left(\frac{E}{m_p}\right)(1 - \cos\theta)\right]} = \frac{1}{m_p} \frac{E'}{\left[1 + \left(\frac{E}{m_p}\right)(1 - \cos\theta)\right]} = \frac{E''}{m_p} \quad (84)$$

با جایگذاری در رابطه‌ی (82) به دست می‌آید

$$dq' = \left[ \sqrt{EE'} - \sqrt{\frac{E}{m_p}}(1 - \cos\theta)E'' \right] d(\cos\theta) = \left[ \sqrt{EE'} - \underbrace{\sqrt{\frac{EE'}{m_p}}(1 - \cos\theta)E'}_{=E-E'} \right] d(\cos\theta) \quad (85)$$

$$\Rightarrow dq' = \left[ \sqrt{EE'} - \sqrt{EE'} + \sqrt{E''} \right] d(\cos\theta) = \sqrt{E''} d(\cos\theta) \quad (86)$$

در تساوی آخر رابطه‌ی (85) برای جایگزینی  $E - E'$  از رابطه‌ی (82) استفاده کردیم.

بنابراین،  $d\Omega_{\text{lab}}$  را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$d\Omega_{\text{lab}} = \sqrt{2} \pi d(\cos\theta) = \sqrt{2} \pi (dq' / \sqrt{E''}) \Rightarrow d\Omega_{\text{lab}} = \pi dq' / E'' \quad (87)$$

و در نتیجه، رابطه‌ی (86) به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d\sigma}{dq'} = \frac{\pi (d\sigma/d\Omega)_{\text{Mott}}}{EE'} \left\{ \frac{G_E^2(q') + \tau G_M^2(q')}{1 + \tau} + \sqrt{2} \tau G_M^2(q') \tan^2 \theta / 2 \right\} \quad (88)$$

سرانجام، اگر از کمیت  $v$  که برای پراکندگی کشسان در رابطه‌ی (89) با  $-q' \equiv \sqrt{2} m_p v = \sqrt{2} k \cdot q$  تعریف شد، استفاده کنیم، با

توجه به رابطه‌ی (86) خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} dq' &= \sqrt{2} E' d(\cos\theta) \\ dv &= -dq' / \sqrt{2} m_p \end{aligned} \right\} \Rightarrow dv = \frac{E''}{m_p} d(\cos\theta) \quad (89)$$

برای پراکندگی کشسان گاهی از کمیت  $y = v/E$  هم استفاده می‌شود. در این صورت، برای پراکندگی کشسان داریم

$$dy = \frac{E''}{\sqrt{2} \pi E m_p} d\Omega \quad (90)$$

توجه کنید که  $m_p$  جرم ذره‌ی هدف است و لازم نیست که حتما پروتون باشد.

بگذارید با یک نکته این بخش را به پایان برسانیم. در برخورد دهنده الکترون-پروتون HERA بازه تجربی تکانه‌ی انتقالی  $q^2$

به  $Q^2 \geq 2000 \text{ GeV}^2$  رسید و دیده شد که عامل شکل  $G_M^2(q^2)$  آنگونه که در رابطه‌ی (78) داده شده است از یک به  $10^{-4}$

کاهش یافت. این رفتار با رفتار به تقریب ثابت توابع ساختار که در بخش بعدی به آن خواهیم پرداخت خیلی متفاوت است. همان

گونه که در بخش بعدی خواهیم دید، دلیل این رفتار توابع ساختار آن است که پروتون از ذره‌های نقطه‌ای ساخته شده است.

مثال 4 عامل شکل الکترومغناطیسی  $\pi^\pm$  را می‌توان با فرایند  $e^- + \pi^\pm \rightarrow e^- + \pi^\pm$  اندازه‌گیری کرد. عمومی‌ترین شکل دامنه‌ی

پراکندگی کشسان پایون باردار  $\pi^\pm$  با چارتکانه‌ی اولیه‌ی  $k$  و چارتکانه‌ی نهایی  $k'$  و فوتون،  $T^\mu(k', k) \pm e \varepsilon_\mu(q)$  است که

در آن  $T^\mu(k', k) \equiv \langle \pi^\pm(k') | J_{\text{em}}^\mu(0) | \pi^\pm(k) \rangle$  است. شکل عمومی  $T^\mu(k', k)$  را بنویسید.

**حل:** چگالی جریان در برهمکنش الکترومغناطیسی پایسته است. پس،  $T^\mu$  باید در شرط  $\partial_\mu J_{em}^\mu = 0$  صدق کند. این بدان معنی است که  $q_\mu J_{em}^\mu = 0$  است. چون اسپین پایون صفر است، عمومی‌ترین چاربردار لورنتس برای راس پایون را فقط می‌توان از تکانه‌های  $k$  و  $k'$  ساخت، بردار دیگری در دسترس نیست. از این دو بردار، فقط کمیت‌های  $(k'+k)^\mu$  و  $(k'-k)^\mu$  را می‌توان ساخت. در نتیجه، عمومی‌ترین شکل  $T^\mu$  می‌تواند ترکیب خطی  $A(k'+k)^\mu + B(k'-k)^\mu$  باشد. حال اگر شرط پایستگی جریان،  $q_\mu J_{em}^\mu = 0$  را به کار ببریم، خواهیم داشت

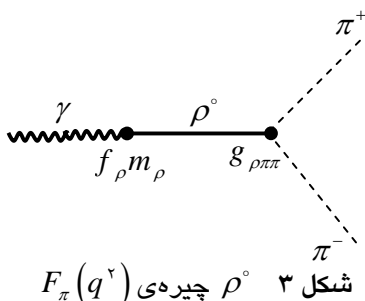
$$q_\mu J_{em}^\mu = 0 \Rightarrow (k'-k)_\mu [A(k'+k)^\mu + B(k'-k)^\mu] \quad (91)$$

$$= A(k'-k)_\mu (k'+k)^\mu + Bq_\mu (k'-k)^\mu = A(k^\nu - k^\nu) + Bq_\mu q^\mu = 0 \quad (92)$$

چون فوتون مجازی است،  $q^\nu = q_\mu q^\mu \neq 0$  است، اما  $k^\nu - k^\nu = m_\pi^\nu - m_\pi^\nu = 0$  است. پس، برای برقراری  $q_\mu J_{em}^\mu = 0$  باید  $B = 0$  باشد. در نتیجه،  $T^\mu(k', k) = (k'+k)^\mu F_\pi(q^\nu)$  (جایگزین  $A$ ) عامل شکل الکترومغناطیسی پایون باردار است. با بهنجارش  $F_\pi(0) = 1$  دامنه‌ی گذار به صورت زیر درمی‌آید

$$T^\mu(k', k) \equiv \langle \pi^\pm(k') | J_{em}^\mu(0) | \pi^\pm(k) \rangle = (k'+k)^\mu F_\pi(q^\nu); \quad F_\pi(0) = 1 \quad (93)$$

**نکته:** همان‌گونه که می‌دانید، برهمکنش الکترومغناطیسی ذره‌ی نقطه‌ای بدون اسپین  $\pm e \varepsilon_\mu(q)(k'+k)^\mu$  است. این برهمکنش برای مزون  $\pi^\pm$  غیر نقطه‌ای به  $\pm e \varepsilon_\mu(q)(k'+k)^\mu F_\pi(q^\nu)$  اثرهای برهمکنش قوی کوارک‌ها و گلئون‌های درون پایون در  $F_\pi(q^\nu)$  را به وجود می‌آورند. در پراکندگی  $e^- + e^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+$  این عامل شکل اندازه گرفته شده است و در فرایندهای دیگر، مانند پراکندگی پایون از الکترون‌های اتم،  $e^- + \pi^\pm \rightarrow e^- + \pi^\pm$  یا درتولید جفت  $\pi^+ \pi^-$  از فوتون\* حقیقی هم قابل اندازه‌گیری است. فرایند دوم فضاگونه،  $q^\nu \leq 0$  است. نمودار فاینمن این فرایند در



شکل (۳) دیده می‌شود. اندازه‌ی پایون  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\langle r^2 \rangle = 6 \left. \frac{dF_\pi(q^\nu)}{dq^\nu} \right|_{q^\nu=0} \quad (94)$$

عامل شکل الکترومغناطیسی مزون‌های باردار بدون اسپین دیگر  $K^\pm, D^\pm, B^\pm$  هم مانند پایون  $F_\pi(q^\nu)$ ،  $F_D(q^\nu)$  و  $F_B(q^\nu)$  با بهنجارش  $F_{K,D,B}(0) = 1$  اند. به علت پایستگی جریان الکترومغناطیسی، این بهنجارش مستقل از مدل است. اثرهای برهمکنش قوی سازنده‌های این ذره‌ها (کوارک و گلئون) این مقادیر را فقط و فقط در  $q^\nu = 0$  تغییر نمی‌دهند. این نتیجه‌ی مهم با نام عامل‌های شکل بهنجار شده  $\diamond$  شناخته می‌شوند. ♣

### ۳- پراکندگی ژرف ناکشسان: مدل کوارک-پارتون

در دو فصل پیش قاعده‌های محاسبه‌ی فرایندهای الکترودینامیک کوانتومی را برای ذره‌های با اسپین صفر و اسپین ۱/۲ را آموختیم و آنها را برای فرایندهای ساده به کار بردیم. در این بخش، از آنها استفاده خواهیم کرد تا موضوع مهم ساختار هادرون را در فیزیک ذرات بشناسانیم. این ساختار در آزمایش‌های پراکندگی ژرف ناکشسان لپتون‌ها از هادرون آشکار شدند.

\* Electroproduction

◊ Normalized Form factors

در این بخش، خود را به لپتون باردار (به ویژه الکترون) محدود خواهیم کرد؛ چون محاسبه سرراست و کاربرد مهم قاعده‌های الکتروپوینامیک کوانتومی است که اینک می‌دانیم. مقایسه‌ی این محاسبه‌ها با نتایج آزمایش بود که گواه وجود اجزاء سازنده‌ی هادرون‌ها، یعنی کوارک‌ها، را آشکار کرد. اما آزمایش با نوترینو هم به همان اندازه مهم است و در جای دیگر و پس از فهمیدن برهم‌کنش ضعیف، به آن خواهیم پرداخت.

حال که می‌دانیم چگونه ابعاد پروتون را اندازه بگیریم، می‌خواهیم اندرون‌ی پروتون (یا هر هادرون دیگری) را با جزئیات بیشتری بررسی کنیم. می‌توان این کار را با بزرگ‌تر کردن  $q^2$  فوتون انجام داد. همان‌گونه که از رابطه‌ی عدم قطعیت می‌دانیم  $q^2$  های بزرگ با فاصله‌های کوچک متناظر است. به بیان دیگر، با بزرگ شدن  $q^2$  طول موج فوتون کوتاه می‌شود و توان تفکیک آن بالا می‌رود. در واقع،  $q^2$  مانند توان تفکیک ذره‌بین است. هر چه  $q^2$  بزرگ باشد، درشت‌نمایی ذره‌بین (توان تفکیک فوتون) هم زیاد می‌شود. برای این که  $q^2$  بزرگ باشد، الکترون‌هایی که با هدف برهم‌کنش می‌کنند، باید انرژی بیشتری از دست بدهند.

وقتی مقدار انرژی که الکترون از دست می‌دهد، بزرگ باشد، انرژی بیشتری به هدف منتقل می‌شود و در نتیجه، هدف می‌تواند از هم بپاشد. برای  $q^2$  های نه چندان زیاد، ممکن است هدف پروتون برانگیخته بشود و به حالت  $\Delta$  برود و یک مزون  $\pi$  تولید کند:  $ep\pi^0 \rightarrow e\Delta^+ + p$ . در این حالت، جرم ناورد  $W \approx m_\Delta$  است. وقتی  $q^2$  خیلی بزرگ باشد، تعداد ذره‌های نهایی که در راس پروتون تولید می‌شوند زیاد می‌شود و پروتون حالت اولیه به کلی هویت خودش را از دست می‌دهد. بنابراین، برای این بتوان از آزمایش اطلاعات سودمندی استخراج کرد، فرمول‌بندی تازه‌ای لازم است.

در پراکندگی کشسان الکترون از پروتون با ساختار، از پراکندگی الکترون-میون استفاده کردیم: جرم میون را با جرم پروتون جایگزین کردیم و به جای جریان لپتونی  $\bar{u}\gamma^\mu u \sim j^\mu$  چگالی جریان هادرونی  $J_p^\mu$ ، رابطه‌ی (۳۷) را ساختیم. اما این شیوه برای توصیف رویدادهای ناکشسان که حالت نهایی آنها فقط یک فرمیون نیست، ناکافی است؛ چون حالت نهایی با تعداد زیادی از ذره‌ها را نمی‌توان با اسپینور دیراک  $\bar{u}$  در عنصر ماتریسی نشان داد. بنابراین، ساختار  $J_p^\mu$  باید پیچیده‌تر از رابطه‌ی (۳۷) باشد. در بخش بعدی نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان با این دشواری کنار آمد.

### ۳-۱ پراکندگی ناکشسان الکترون-پروتون: سینماتیک و توابع ساختار

فرایندهای انحصاری\* آنها هستند که تعداد محدودی ذره در حالت نهایی تولید می‌شوند و همه‌ی آنها مشاهده (یا اندازه‌گیری) می‌شوند. پراکندگی کشسان الکترون-نوکلئون،  $e + N \rightarrow e + N$ ، پراکندگی شبه کشسان\*  $e + N \rightarrow e + N$ . پراکندگی  $\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + N + \pi$  نمونه‌هایی از فرایندهای انحصاری اند. در فرایندهای همه‌گیر (غیر انحصاری)\* لپتون-نوکلئون،  $\ell + N \rightarrow \ell' + X$  فقط لپتون حالت نهایی،  $\ell'$ ، مشاهده و اندازه‌گیری می‌شود و هیچ تلاشی برای مشاهده‌ی هادرون خاصی در حالت نهایی نمی‌شود. نماد  $X$  جمع همه‌ی هادرون‌های مشاهده نشده (اما تولید شده) حالت نهایی است.

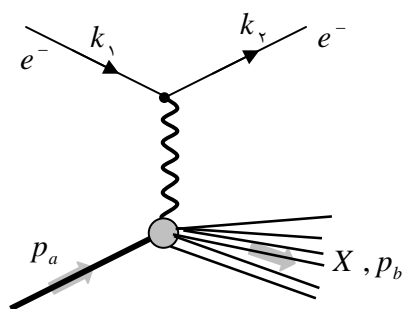
سطح مقطع هر فرایند انحصاری خیلی سریع با مربع عامل شکل یا با  $q^2$  کاهش می‌یابد. بنابراین، در پراکندگی‌های با تکانه‌ی انتقالی بزرگ، به سختی می‌توان پراکندگی کشسان یافت. در پراکندگی‌های با تکانه‌ی انتقالی بزرگ احتمال رویدادهای ناکشسان

\* Exclusive Processes

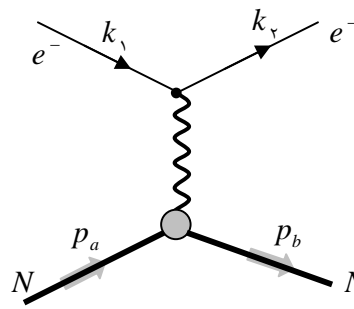
♦ Inclusive processes

که در حالت نهایی آن‌ها ذرات دیگری به غیر از لپتون و پروتون وجود دارد، بسیار بزرگتر است. ساده‌ترین فرایند ناکشسان که می‌توان سطح مقطع آن را اندازه‌گیری کرد، فرایند همه‌گیر است که فقط الکترون (لپتون) نهایی اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین، در این گونه فرایندها، بدون این که حالت نهایی خاصی در راس نوکلئون انتخاب بشود، بر روی سطح مقطع تولید همه‌ی هادرون‌های نهایی ممکن جمع بسته می‌شود. از طرفی، چون پراکندگی همه‌گیر چیزی به جز جمع حالت‌های انحصاری ممکن نیست. در نگاه نخست، شاید به نظر برسد که در  $q^2$  های بزرگ سطح مقطع یا احتمال روی دادن این فرایند هم باید ناچیز باشد. در واقع، هنگامی که پراکندگی همه‌گیر  $e + N \rightarrow e + X$  در سال‌های ۱۹۶۰ در SLAC آماده می‌شد، انتظار نمی‌رفت که بتوان به اندازه‌ی کافی رویداد جمع‌آوری کرد. بیورکن<sup>۵</sup> از نخستین کسانی بود که نشان داد پراکندگی ژرف ناکشسان (پراکندگی همه‌گیر در  $q^2$  های بزرگ) بهترین روش برای کاویدن اندرونی نوکلئون است. او قانون مقیاس‌بندی<sup>۶</sup> را برای توابع ساختار نوکلئون پیش‌بینی کرد. درستی آن را بعداً آزمایش نشان داد. این قاعده می‌گوید اگر جمله‌ی  $1/Q^2$  را از سطح مقطع پراکندگی کم کنیم، سطح مقطع پراکندگی ژرف ناکشسان مقدار ثابتی می‌شود و با مربع عامل شکل کاهش پیدا نمی‌کند. جمله‌ی  $1/Q^2$  نتیجه‌ی تبادل تک فوتون است و در سطح مقطع فرایند انحصاری و همه‌گیر، هر دو، وجود دارد. ما در این بخش آن را روشن‌تر خواهیم دید. کشف قانون مقیاس‌بندی سرچشمه‌ی مدل پارتون است. پارتون نامی است که فاینمن در توصیف قانون مقیاس‌بندی بیورکن به ذره‌های نقطه‌ای درون هادرون داد.

پیش از پرداختن به دینامیک پراکندگی ژرف ناکشسان، بگذارید سینماتیک پراکندگی کشسان (انحصاری) و ناکشسان الکترون-پروتون را بررسی کنیم. این دو فرایند در شکل‌های (۴-الف) و (۴-ب) نشان داده شده‌اند. در پراکندگی دو ذره  $\leftarrow$  ذره، مانند  $e(k_1) + N(p_a) \rightarrow e(k_2) + N(p_b)$  یا  $e(k_1) + N(p_a) \rightarrow e(k_2) + N^*(p_b)$  سطح مقطع به دو متغیر مستقل سینماتیکی بستگی دارد. می‌توان آن‌ها را متغیرهای مندلیستوم  $s = (k_1 + p_a)^2 = (k_2 + p_b)^2$  و  $t = q^2 = (k_1 - k_2)^2 = -Q^2$



شکل ۴-ب پراکندگی ژرف ناکشسان الکترون-پروتون



شکل ۴-الف پراکندگی کشسان الکترون-نوکلئون

برگزید. در چارچوب آزمایشگاه که  $p_a = (M, \mathbf{0})$ ،  $k_1 = (E, \mathbf{k}_1)$  و  $k_2 = (E', \mathbf{k}_2)$  اند، از متغیر  $v = p_a \cdot q / M = E - E'$  استفاده می‌شود که اختلاف انرژی الکترون اولی و نهایی است. به جای متغیرهای مستقل  $s$  و  $t$  می‌توان  $v$  و  $E$  را برگزید. چون در حالت نهایی پراکندگی همه‌گیر  $e(k_1) + N(p_a) \rightarrow e(k_2) + X$  هیچ هادرون خاصی مشاهده نمی‌شود، مربع جرم ناوردای حالت هادرون‌های  $X$  مشاهده نشده می‌تواند همه‌ی مقدارهای پیوسته‌ی بزرگ‌تر یا مساوی  $M_X^2$  را داشته باشد. به بیان دیگر، برعکس رابطه‌ی (۵۸)، حالا  $v = M^2 + q^2 + 2Mv$ ، لازم نیست که با مربع جرم هیچ یک از

<sup>۵</sup> Bjorken  
<sup>۶</sup> Scaling Law

هادرون‌های حالت نهایی که در یک فرایند دو ذره‌ی  $\leftarrow$  دو ذره‌ی می‌توان دید، برابر باشد. یعنی،  $q^\gamma$  و  $\nu$  دو متغیر مستقل اند. سطح مقطع همه‌گیر به سه متغیر سینماتیکی بستگی دارد. یک گزینه برای این متغیرها ممکن است  $q^\gamma, s$  و  $\nu$  باشند. اگر در فرایند همه‌گیر  $e(k_\gamma) + N(p_a) \rightarrow e(k_\nu) + X$  می‌دانستیم که  $X$  دقیقاً چیست، با فرض این که تبادل یک فوتون، دینامیک چیره است، می‌توانستیم، سطح مقطع دو ذره‌ای را برای همه‌ی حالت‌ها حساب کنیم و سپس آنها را باهم جمع کنیم. این کار دشواری است، چون، تعداد ذره‌ها در را برای حالت  $X$  نمی‌دانیم و آنها را اندازه نمی‌گیریم. به جای این رویکرد، از روش دیگری استفاده می‌کنیم: بر روی همه‌ی حالت‌های ممکن در  $X$  جمع می‌بندیم. آزمایش نشان می‌دهد که فرض تبادل یک فوتون تقریب خوبی است و این بدان معنی است که سطح مقطع باید با حاصل ضرب تانسور لپتونی و تانسور هادرونی متناسب باشد. بنابراین، در تقریب تبادل یک فوتون داریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^x}{2m_N q^\xi} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu}(N) \quad (95)$$

که در آن  $L_{\mu\nu}^e$  تانسور لپتونی است.

در آغاز این بخش گفتیم که چگالی جریان هادرونی  $J_p^\mu$  رابطه‌ی (۳۷) برای توصیف رویدادهای ناکشسان که حالت نهایی آنها از تعداد زیادی ذره تشکیل شده است، ناکافی است؛ نمی‌توان آن را با اسپینور دیراک  $\bar{u}$  در عنصر ماتریسی نشان داد. بنابراین، ساختار  $J_p^\mu$  باید پیچیده‌تر از رابطه‌ی (۳۶) باشد. به جای این که بکشیم  $J_p^\mu$  را باز سازی کنیم، بهتر است که سطح مقطع فرایند را تعمیم دهیم.

همان‌گونه که از شکل (۲-ب) پیداست، تانسور لپتونی  $L_{\mu\nu}^e$  با QED توصیف می‌شود و مانند پیش است:

$$L_{\mu\nu}^e = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spin } e} [\bar{u}(k_\nu) \gamma_\mu u(k_\gamma)] [\bar{u}(k_\gamma) \gamma_\nu u(k_\nu)]^* \\ = 2(k_{\nu\mu} k_{\gamma\nu} + k_{\nu\nu} k_{\gamma\mu} - (k_\nu \cdot k_\gamma - m_e^2) g_{\mu\nu}) = 2(k_{\nu\mu} k_{\gamma\nu} + k_{\nu\nu} k_{\gamma\mu} + (q^2/2) g_{\mu\nu}) \quad (96)$$

اما در تانسور هادرونی،  $W^{\mu\nu}$ ، انتظار می‌رود که برهم‌کنش قوی نقش مهمی داشته باشد. شکل عمومی آن را می‌توان با توجه به بحث عمومی ناوردایی ساخت.  $W^{\mu\nu}$  گذار نوکلئون به همه‌ی حالت‌های ممکن نهایی است. در اینجا حالتی را بررسی می‌کنیم که پروتون اولیه ناقطبیده است و اسپین هیچ یک از هادرون‌های نهایی اندازه‌گیری نمی‌شود. دامنه‌ی گذار از  $N \rightarrow X$  عبارت از  $\langle X | J^\mu | N \rangle$  است. وقتی بر روی همه‌ی حالت‌های ممکن  $X$  جمع ببندیم و بر روی اسپین نوکلئون اولیه میانگین بگیریم، تانسور هادرونی  $W^{\mu\nu}$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$W^{\mu\nu}(N) = \frac{1}{4} \sum_{\text{final spin}} \sum_{\text{all states } X} \langle X | J^\mu | N \rangle \langle X | J^\nu | N \rangle^* (2\pi)^\xi \delta(p_a + q - p_x) \quad (97)$$

توجه کنید که در  $\sum_X$  انتگرال فضای فاز  $\int d^3\mathbf{p}_j / [(2\pi)^3 2E_j]$  هر یک از ذره‌های  $j$  که  $X$  را می‌سازند، نهفته است. علیرغم این که سهم هر یک از حالت‌های نهایی در  $W^{\mu\nu}$  پیچیده است، اما وقتی بر روی اسپین حالت‌های نهایی جمع بسته شود، نتیجه‌ی به نسبت ساده‌ای به دست می‌آید.

پیش از آنکه بخواهیم فراتر برویم، مناسب است که ببینیم آیا وقتی  $X$  و نوکلئون اولیه، هر دو فقط یک پروتون است، رابطه‌ی بالا به رابطه‌ی (۵۲) کاهش می‌یابد یا نه؟ روشن است که برای این وضعیت،  $\sum_X$  فقط پروتون خواهد بود و خواهیم داشت

$$\sum_X \rightarrow \int d^3\mathbf{p}_b / [(2\pi)^3 2E_b] \quad \text{و در نتیجه،}$$

$$W^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s_a, s_b} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} (2\pi)^\xi \delta^\xi(p_a - q - p_b) [\bar{u}(p_b) \Gamma^\mu u(p_a)] [\bar{u}(p_b) \Gamma^\nu u(p_a)]^* \quad (98)$$

$$= \frac{\delta(E_a - q_0 - E_b)}{\sqrt{2} E_b} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s_a, s_b} [\bar{u}(p_b) \Gamma^\mu u(p_a)] [\bar{u}(p_b) \Gamma^\nu u(p_a)]^* = L_p^{\mu\nu} \quad (99)$$

که در آن  $\Gamma^\mu \equiv (F_\mu + F'_\mu) \gamma^\mu - (K_\mu / \sqrt{2} m_p) F'_\mu$  است و ما رابطه‌ی (92) را دوباره به دست آوردیم.

چون  $J^\mu$  هرمیتی است، رابطه‌ی (97) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$W^{\mu\nu}(N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_X \langle N | J^\mu | X \rangle \langle X | J^\nu | N \rangle (2\pi)^\xi \delta^\xi(p_a + q - p_x) \quad (100)$$

بنابراین، دیده می‌شود که  $W^{\mu\nu}(N) = W^{\nu\mu}(N)$  است.

در رابطه‌ی (100) جمع بر روی اسپین حالت‌های نهایی نهفته است و میانگین‌گیری بر روی اسپین نوکلئون اولیه به روشنی با ضریب  $(1/\sqrt{2})$  نشان داده شده است.

تانسور  $W^{\mu\nu}$  را چگونه می‌توان پارامتری کرد و عمومی‌ترین شکل آن چیست؟ این تانسور را باید از چارته‌های مستقل  $p_a$ ،  $q$  و تانسورهای موجود  $g^{\mu\nu}$  و تانسور پادمتقارن  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  اند. چون  $W^{\mu\nu}$  تحت  $\nu \leftrightarrow \mu$  متقارن است، از تانسور پادمتقارن  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  نمی‌توان استفاده کرد. چون وقتی می‌خواهیم سطح مقطع را حساب کنیم،  $W^{\mu\nu}$  را باید در  $L_{\mu\nu}^e$  ضرب کنیم. از آنجا که  $L_{\mu\nu}^e$  متقارن است، ضرب آن در یک جمله‌ی پادمتقارن صفر خواهد شد. از ماتریس‌های  $\gamma^\mu$  هم نمی‌توان استفاده کرد، چون بر روی اسپین‌ها جمع بسته‌ایم. بنابراین، تنها چاربردارها و ماتریس‌هایی که برای ساختن  $W^{\mu\nu}$  باقی می‌مانند  $p_a$ ،  $q$  و  $g^{\mu\nu}$  است. توجه کنید که  $p_x = p_a + q$  و در نتیجه، چاربردار مستقل نیست.  $W^{\mu\nu}$  تانسور لورنتس است. تانسورهای لورنتس که از  $p_a$ ،  $q$  می‌توان ساخت  $q^\mu q^\nu$ ،  $p_a^\mu p_a^\nu$ ،  $q^\mu q^\nu$  و  $p_a^\nu q^\mu$  اند. البته، تانسور  $i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{a\rho} q_\sigma$  هم وجود دارد، اما همان‌گونه که گفتیم، نمی‌توان از آن برای ساختن  $W^{\mu\nu}$  استفاده کرد. بنابراین، عمومی‌ترین شکل  $W^{\mu\nu}$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$W^{\mu\nu} = -W_\gamma g^{\mu\nu} + \frac{W_\gamma}{m_p} p^\mu p^\nu + \frac{W_\xi}{m_p} q^\mu q^\nu + \frac{W_\circ}{m_p} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) \quad (101)$$

توجه کنید که در رابطه‌ی بالا  $W_\gamma$  وجود ندارد. این فقط یک قرارداد نمادگذاری است. وقتی به جای الکترون از باریکه‌ی نوترینو برای کاویدن اندرونه‌ی نوکلئون استفاده شود، جمله‌ی دیگری با ضریب  $W_\gamma$  هم به رابطه‌ی (101) افزوده می‌شود. این جمله پارایته را نقض می‌کند. برهم‌کنش نوترینو ضعیف است و برهم‌کنش ضعیف پارایته را پایسته نگه نمی‌دارد، اما در برهم‌کنش الکترومغناطیسی پارایته پایسته می‌ماند.

پایستگی جریان،  $\partial_\mu J^\mu \sim q_\mu J_p^\mu = 0$ ، لازم می‌دارد که شرط زیر برقرار باشد

$$q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0 \quad (102)$$

تانسورهای لورنتس که در این شرط صدق می‌کنند، عبارتند از

$$\left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right), \quad \left( p_a^\mu - \frac{(p_a \cdot q) q^\mu}{q^2} \right) \left( p_a^\nu - \frac{(p_a \cdot q) q^\nu}{q^2} \right), \quad i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{a\rho} q_\sigma \quad (103)$$

نگران نباشید که این تانسورها را از کجا آوردیم. به زودی در زیر آن را نشان خواهیم داد. قصد من از نوشتن زود هنگام آنها فقط بیان یک نکته و روشن‌گری در باره‌ی جمله‌ی متناسب با  $W_\gamma$  است.

تانسور  $i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{a\rho} q_\sigma$  پادمتقارن است و نسبت به دو دیگر پاریتتهی مخالف دارد. چون برهمکنش الکترومغناطیسی پاریتته را ثابت نگه می‌دارد، این جمله در رابطه‌ی (۱۰۱) وجود ندارد. همانگونه که گفتیم با ضرب آن در  $L_{\mu\nu}^e$  دیده می‌شود که این جمله صفر خواهد شد.

بگذارید، رابطه‌ی (۱۰۱) را از آغاز به دست بیاوریم. اگر تانسور پادمتقارن  $i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{a\rho} q_\sigma$  را در نظر بگیریم، پنج تانسور  $g^{\mu\nu}$ ،  $q^\mu q^\nu$ ،  $p_a^\mu p_a^\nu$ ،  $p_a^\mu q^\nu$  و  $p_a^\nu q^\mu$  باقی می‌ماند. بنابراین، بخش متقارن  $W^{\mu\nu}$  را می‌توان به صورت ترکیبی از آنها نوشت:

$$W^{\mu\nu(S)} = A g^{\mu\nu} + B q^\mu q^\nu + C (q^\mu p_a^\nu + q^\nu p_a^\mu) + D p_a^\mu p_a^\nu \quad (10.4)$$

با اعمال شرط رابطه‌ی (۱۰۲) به دست می‌آید

$$q_\mu W^{\mu\nu(S)} = 0 \Rightarrow A q_\mu g^{\mu\nu} + B q_\mu q^\mu q^\nu + C q_\mu q^\mu p_a^\nu + C q_\mu q^\nu p_a^\mu + D q_\mu p_a^\mu p_a^\nu = 0 \quad (10.5)$$

$$= A q^\nu + B q^\nu q^\nu + C q^\nu p_a^\nu + C (q \cdot p_a) q^\nu + D (q \cdot p_a) p_a^\nu = 0 \quad (10.6)$$

$$= (A + B q^\nu + C q \cdot p_a) q^\nu + (C q^\nu + D q \cdot p_a) p_a^\nu = 0 \quad (10.7)$$

چون  $q$  و  $p_a$  متغیرهای مستقل اند، ضرایب آنها در رابطه‌ی (۱۰۷) باید جداگانه صفر شوند. به دست می‌آید

$$C q^\nu + D q \cdot p_a = 0 \Rightarrow C = -\frac{q \cdot p_a}{q^\nu} \quad (10.8)$$

$$A + B q^\nu + C q \cdot p_a = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{q^\nu} A - \frac{1}{q^\nu} \left( -\frac{q \cdot p_a}{q^\nu} \right) q \cdot p_a D = -\frac{1}{q^\nu} A + \frac{(q \cdot p_a)^\nu}{q^\nu} D \quad (10.9)$$

با جایگزینی  $C$  و  $B$  بالا در رابطه‌ی (۱۰۴) به دست می‌آید

$$W^{\mu\nu(S)} = \left[ g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^\nu} \right] A + \left[ p_a^\mu p_a^\nu - \frac{q \cdot p_a}{q^\nu} (p_a^\mu q^\nu + p_a^\nu q^\mu) + \frac{(q \cdot p_a)^\nu}{q^\nu} q^\mu q^\nu \right] D \quad (11.0)$$

معمول است که به جای  $A$  و  $D$  از نمادگذاری زیر استفاده شود:

$$\frac{A}{2m_p} \equiv -W_\nu, \quad \frac{D}{2m_p} \equiv \frac{1}{m_p^\nu} W_\nu \quad (11.1)$$

که اگر در رابطه‌ی (۱۰۹) جایگزین کنیم، خواهیم داشت

$$W^{\mu\nu(S)} = \left[ -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^\nu} \right] 2m_p W_\nu + \left[ p_a^\mu p_a^\nu - \frac{q \cdot p_a}{q^\nu} (p_a^\mu q^\nu + p_a^\nu q^\mu) + \frac{(q \cdot p_a)^\nu}{q^\nu} q^\mu q^\nu \right] \frac{2}{m_p} W_\nu \quad (11.2)$$

یا این که

$$\frac{1}{2m_p} W^{\mu\nu(S)} = \left[ -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^\nu} \right] W_\nu + \frac{1}{m_p^\nu} \left[ \left( p_a^\mu - \frac{q \cdot p_a}{q^\nu} q^\mu \right) \left( p_a^\nu - \frac{q \cdot p_a}{q^\nu} q^\nu \right) \right] W_\nu \quad (11.3)$$

ضرایب  $W_\nu$  و  $W_\nu$  توابعی از متغیرهای اسکالر لورنتس هستند که می‌توان با چارتکانه‌ها در راس هادرونی ساخت. در مقایسه با عامل‌های شکل در پراکندگی کشسان الکترون- پروتون اینک یک تفاوت مهم وجود دارد. در پراکندگی کشسان فقط یک کمیت

اسکالر،  $q^\nu$ ، وجود داشت. اما حالا دو کمیت اسکالر مستقل وجود دارد. رابطه‌ی  $p_x = p_a + q$  به

$$p_x^\nu = p_a^\nu + 2p_a \cdot q + q^\nu = m_p^\nu + 2p_a \cdot q + q^\nu \quad (11.4)$$

می‌انجامد.  $p_x^\nu \equiv W$  جرم ناوردای حالت هادرونی نهایی و یک متغیر مستقل است. از رابطه‌ی (۱۱۴) روشن است که جرم

ناوردای حالت هادرونی نهایی با رابطه‌های زیر به متغیرهای اسکالر  $Q^\gamma$  و  $\nu$  مربوط است:

$$p_a \cdot q = m_p \nu \quad , \quad q^\gamma = -Q^\gamma \quad (115)$$

به بیان دیگر،

$$2m_p \nu = Q^\gamma + W^\gamma - m_p^\gamma \quad (116)$$

پس، متغیرهای اسکالر مستقل را می‌توان  $q^\gamma$  و  $W$  یا  $Q^\gamma$  و  $\nu$  برگزید. ما دومی را برمی‌گزینیم. در نتیجه،  $W_\gamma = W_\gamma(Q^\gamma, \nu)$  و

$$W_\gamma = W_\gamma(Q^\gamma, \nu) \quad \text{اند. آنها توابع ساختار هادرون (نوکلئون) اند.}$$

پس می‌بینیم که ساختار تانسور هادرونی  $W^{\mu\nu}$  همانند ساختار تانسور لپتونی  $L_{\mu\nu}$  است. فرق آنها در این است که توابع عامل

شکل  $F_\gamma(q^\gamma)$  و  $F_\gamma(q^\gamma)$  اینک با توابع ساختار جایگزین شده‌اند که توابعی از دو متغیر اسکالر اند.

حالا می‌توان سطح مقطع پراکندگی  $X(p_X) + e^-(k_\gamma) \rightarrow e^-(k_\gamma) + p(p_a)$  را حساب کرد. داریم

$$\frac{d^\gamma \sigma}{d\Omega dE'} = \frac{1}{2m_p} \frac{\alpha^\gamma E'}{q^\gamma E} L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu} \quad (117)$$

و بنابراین، کار نخست، محاسبه‌ی  $L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu}$  است. چون جریان لپتونی پایسته است،  $q^\nu L_{\mu\nu} = q^\nu L_{\mu\nu} = 0$  است. در نتیجه، فقط

جمله‌های متناسب با  $g^{\mu\nu}$ ،  $p_a^\mu p_a^\nu$  در  $W^{\mu\nu}$  غیر صفر خواهند شد. به بیان دیگر،

$$\frac{1}{2m_p} L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu(S)} = L_{\mu\nu}^e \left[ -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^\gamma} \right] W_\gamma + \frac{1}{m_p} L_{\mu\nu}^e \left[ \left( p_a^\mu - \frac{q \cdot p_a}{q^\gamma} q^\mu \right) \left( p_a^\nu - \frac{q \cdot p_a}{q^\gamma} q^\nu \right) \right] W_\gamma \quad (118)$$

$$= -g^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^e W_\gamma + \frac{1}{m_p} p_a^\mu p_a^\nu L_{\mu\nu}^e W_\gamma \quad (119)$$

حالا می‌توانیم دو جمله‌ی رابطه‌ی (118) را حساب کنیم.  $L_{\mu\nu}^e = 2(k_{\gamma\mu} k_{\nu\gamma} + k_{\nu\mu} k_{\gamma\nu} + (q^\gamma / 2) g_{\mu\nu})$  در رابطه‌ی (96) داده

شده است. در نتیجه، به دست می‌آید

$$g^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^e = 2g^{\mu\nu} (k_{\gamma\mu} k_{\nu\gamma} + k_{\nu\mu} k_{\gamma\nu} + (q^\gamma / 2) g_{\mu\nu}) = 2(2k_\gamma \cdot k_\gamma + 2q^\gamma) = 2q^\gamma \quad (120)$$

که در آن از  $\varepsilon = g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$  و  $E = |\mathbf{k}_\gamma|$  و  $E' = |\mathbf{k}_\gamma|$  اند (به یاد بیاورید:  $E^\gamma = m^\gamma + \mathbf{k}^\gamma$ ). در نتیجه،

$$g^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^e = 2q^\gamma = 2(-2k_\gamma \cdot k_\gamma) = -\varepsilon (E, \circ, \circ, |\mathbf{k}_\gamma|) \cdot (E', \circ, \circ, |\mathbf{k}_\gamma| \sin \theta, |\mathbf{k}_\gamma| \cos \theta)$$

$$= -\varepsilon (EE' - |\mathbf{k}_\gamma| |\mathbf{k}_\gamma| \cos \theta) = -\varepsilon (EE' - EE' \cos \theta) = -\varepsilon EE' (1 - \cos \theta) = -8EE' \sin^2 \theta / 2 \quad (121)$$

و برای جمله‌ی  $p_a^\mu p_a^\nu L_{\mu\nu}^e$  در رابطه‌ی (119) داریم:

$$p_a^\mu p_a^\nu L_{\mu\nu}^e = 2p_a^\mu p_a^\nu (k_{\gamma\mu} k_{\nu\gamma} + k_{\nu\mu} k_{\gamma\nu} + (q^\gamma / 2) g_{\mu\nu}) = 2 \left[ 2(p_a \cdot k_\gamma)(p_a \cdot k_\gamma) + \frac{q^\gamma p_a^\gamma}{2} \right] \quad (122)$$

محاسبه‌ی سمت راست رابطه‌ی (122) در چارچوب آزمایشگاه ساده‌تر است. در این چارچوب  $p_a = (m_p, \mathbf{0})$  است و در نتیجه

$p_a \cdot k_\gamma = (m_p, \mathbf{0}) \cdot (E, \mathbf{k}_\gamma) = m_p E$  و  $p_a \cdot k_\nu = (m_p, \mathbf{0}) \cdot (E', \mathbf{k}_\nu) = m_p E'$  هم‌چنین از رابطه‌ی (121) دیده می‌شود

که  $q^\gamma = -\varepsilon EE' \sin^2 \theta / 2$  است. اگر این مقادارها را در سمت راست رابطه‌ی (122) قرار دهیم، به دست می‌آید

$$p_a^\mu p_a^\nu L_{\mu\nu}^e = 2(2m_p^\gamma EE' + m_p^\gamma (-\varepsilon EE' \sin^2 \theta / 2)) = \varepsilon m_p^\gamma EE' (1 - \sin^2 \theta / 2) = \varepsilon m_p^\gamma EE' \cos^2 \theta / 2 \quad (123)$$



و سرانجام این که

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{m_p}} L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu(s)} &= -g^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^e W + \frac{1}{m_p} p_a^\mu p_a^\nu L_{\mu\nu}^e W_\nu = (\wedge EE' \sin^\nu \theta / \nu) W_\wedge + (\xi EE' \cos^\nu \theta / \nu) W_\xi \\ &= \xi EE' (\nu W_\wedge \sin^\nu \theta / \nu + W_\nu \cos^\nu \theta / \nu) \end{aligned} \quad (124)$$

اگر این کمیت را در رابطه‌ی (۱۱۶) به جای  $L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu}$  قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{d^\nu \sigma}{d\Omega dE'} &= \frac{1}{\sqrt{m_p}} \frac{\alpha^\nu E'}{q^\xi E} L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu} \\ \Rightarrow \frac{d^\nu \sigma}{d\Omega dE'} &= \frac{\alpha^\nu E'}{q^\xi E} [\xi EE' (\nu W_\wedge \sin^\nu \theta / \nu + W_\nu \cos^\nu \theta / \nu)] \end{aligned} \quad (125)$$

$$\Rightarrow \frac{d^\nu \sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\xi \alpha^\nu (E')^\nu}{q^\xi} (\nu W_\wedge \sin^\nu \theta / \nu + W_\nu \cos^\nu \theta / \nu) \quad (126)$$

چون  $q^\nu = -\xi EE' \sin^\nu \theta / \nu$  است، رابطه‌ی (۱۲۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{d^\nu \sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^\nu}{\xi E^\nu \sin^\nu \theta / \nu} (\nu W_\wedge \sin^\nu \theta / \nu + W_\nu \cos^\nu \theta / \nu) \quad (127)$$

توجه کنید که سطح مقطع بالا در چارچوب آزمایشگاه است و  $W_{\wedge, \nu} = W_{\wedge, \nu}(Q^\nu, \nu)$  اند. همچنین توجه کنید که از جرم الکترون چشم‌پوشی شده است. به یاد بیاورید که در پراکندگی ناکشسان،  $E'$  (یا  $|\mathbf{k}_\nu|$ ) و  $\cos \theta$  متغیرهای مستقل اند و با فرض تقارن سمتی در سطح مقطع ناقطبیده، می‌توانیم متغیرها را از  $E'$  و  $\cos \theta$  به  $Q^\nu$  و  $\nu$  تغییر دهیم. داریم

$$q^\nu = -\xi EE' \sin^\nu \theta / \nu \Rightarrow Q^\nu = \nu EE' (1 - \cos \theta) \Rightarrow dQ^\nu = -\nu EE' d(\cos \theta) \quad (128)$$

$$\nu = E - E' \Rightarrow dE' = -d\nu \quad (129)$$

و بنابراین،

$$d(\cos \theta) dE' = \frac{1}{\nu EE'} dQ^\nu d\nu \quad (130)$$

همچنین، چون  $d\Omega = d(\cos \theta) d\phi$  است، با استفاده از تقارن سمتی، می‌توان از  $d\phi$  انتگرال گرفت:  $\int d\phi = 2\pi$  است. پس، رابطه‌ی (۱۲۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \frac{d^\nu \sigma}{\nu \pi d(\cos \theta) dE'} &= \frac{d^\nu \sigma}{\nu \pi (\nu EE')} dQ^\nu d\nu = \\ \Rightarrow \frac{d^\nu \sigma}{dQ^\nu d\nu} &= \frac{\alpha^\nu \pi}{\xi E^\nu \sin^\nu \theta / \nu EE'} (\nu W_\wedge \sin^\nu \theta / \nu + W_\nu \cos^\nu \theta / \nu) \end{aligned} \quad (131)$$

گزینه‌ی دیگری از متغیرها که گاهی از آنها استفاده می‌شود، عبارتند از

$$x \equiv Q^\nu / \sqrt{m_p} \nu \quad ; \quad y = \nu / E \quad (132)$$

اهمیت متغیر  $x$  در بخش بعدی روشن خواهد شد و  $y$  کسر انرژی انتقالی به نوکلئون در چارچوب آزمایشگاه است. ژاکوبیتبدیل از  $Q^\nu$  و  $\nu$  به  $x$  و  $y$  عبارت است از

$$dQ^\nu d\nu = \sqrt{m_p} E^\nu y dx dy \quad (133)$$

آنچه که تاکنون در این بخش گفتیم، به ویژه رابطه‌های (۹۷)، (۱۲۷) و (۱۳۱) در تقریب تبادل یک فوتون، کاملاً عمومی اند. فیزیک در وابستگی توابع ساختار  $W_1$  و  $W_2$  به  $Q^2$  و  $\nu$  نهفته است. ما هنوز این وابستگی را حساب نکرده‌ایم. شاید گمان کنید که  $W_1$  و  $W_2$  توابع پیچیده‌ای از متغیرهای  $Q^2$  و  $\nu$  اند و بازتاب پیچیدگی‌های فرایندهای پراکندگی ناکشسان اند. اما در سال ۱۹۶۹ بیورکن\* پیش‌بینی کرد که در ناحیه‌ی سینماتیکی پراکندگی ناکشسان ژرف<sup>◇</sup>، یعنی به ازای  $Q^2$  و  $\nu$  بزرگ، اما  $Q^2/\nu$  محدود، رفتار توابع ساختار  $W_1$  و  $W_2$  باید خیلی ساده باشند. پیش‌بینی او می‌گفت که توابع ساختار باید مقیاس‌پذیر\* باشند؛ یعنی به جای این که توابعی از دو متغیر مستقل  $Q^2$  و  $\nu$  باشند، فقط تابعی از نسبت  $Q^2/\nu$  آن دو اند. این رفتار را مقیاس‌پذیری بیورکن می‌نامند. درستی آن را تجربه نشان داد و به پروراندن مدل کوارک-پارتون\* انجامید. موضوع بخش ۲-۳ پروراندن این مدل است.

### ۳-۲ مقیاس‌پذیری بیورکن و مدل پارتون

#### ۳-۲-۱ بازخوانی

پیش از آن که به پروراندن مدل پارتون بپردازیم، بگذارید یافته‌های بخش پیش را در یک جا گرد آوریم. ما سه نوع پراکندگی را بررسی کردیم. (۱) پراکندگی کشسان الکترون از میون نقطه‌ای، (۲) پراکندگی کشسان الکترون-پروتون و (۳) پراکندگی ناکشسان الکترون-پروتون. در چارچوب آزمایشگاه سطح مقطع آنها عبارتند از

- پراکندگی کشسان الکترون - میون (نقطه‌ای):  $e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu$

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \left( \frac{2\pi\alpha^2}{\epsilon E^2 \sin^2\theta/2} \right) \frac{E'}{E} \left\{ \cos^2\theta/2 - \frac{q^2}{2m_\mu^2} \sin^2\theta/2 \right\} \quad (134)$$

- پراکندگی کشسان الکترون-پروتون:  $e^- + p \rightarrow e^- + p$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\alpha^2}{\epsilon E^2 \sin^2\theta/2} \right) \frac{E'}{E} \left\{ \frac{G_E^2(q^2) + \tau G_M^2(q^2)}{1 + \tau} \cos^2\theta/2 + 2\tau G_M^2(q^2) \sin^2\theta/2 \right\} \quad (135)$$

- پراکندگی ناکشسان الکترون-پروتون:  $e^- + p \rightarrow e^- + X$

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\alpha^2 \pi}{\epsilon E^2 \sin^2\theta/2 EE'} \nu (2W_1 \sin^2\theta/2 + W_2 \cos^2\theta/2) \quad (136)$$

برای این که بتوانیم این سه رابطه را باهم مقایسه کنیم، لازم است که دوتای اول را هم برحسب  $d^2\sigma/d\Omega d\nu$  بنویسیم. از رابطه‌ی (۱۳۴) آغاز می‌کنیم. بگذارید نخست آن را برحسب  $d\Omega$  بنویسیم. این کار آسان است، کافی است  $2\pi$  را از سمت راست رابطه‌ی (۱۳۴) حذف کنیم. به دست می‌آید

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\alpha^2}{\epsilon E^2 \sin^2\theta/2} \right) \frac{E'}{E} \left\{ \cos^2\theta/2 - \frac{q^2}{2m_\mu^2} \sin^2\theta/2 \right\} \quad (137)$$

حالا سمت چپ رابطه‌های (۱۳۵) و (۱۳۷) شبیه هم شدند. ضرایب { } هم در سمت راست این دو مانند یکدیگرند. اما متغیرهای

\* Bjorken

◇ Deep Inelastic Scattering

♦ Scaling

\* Parton

سمت چپ این دو رابطه با متغیرهای سمت چپ رابطه‌ی (۱۳۶) فرق دارند. چگونه می‌توان  $d\sigma/d\Omega$  را در رابطه‌های (۱۳۵) و (۱۳۷) به صورت  $d^3\sigma/dQ^3dV$  تبدیل کرد؟ این نکته‌ی ظریفی است، چون هر دوی این فرایندها کشسان اند و در فرایندهای کشسان  $E'$  (یا  $|\mathbf{k}_\nu|$ ) و  $\cos\theta$  متغیرهای مستقل نیستند. به طور هم‌ارز  $Q^\nu$  و  $\nu$  مستقل نیستند ( $Q^\nu = 2m_p\nu$ ). در رابطه‌ی (۸۷) دیدیم که  $d\Omega = \pi(dq^\nu/E'^2)$  است که اگر در رابطه‌های (۱۳۵) و (۱۳۷) جایگزین کنیم، خواهیم داشت

• پراکندگی کشسان الکترون - میون (نقطه‌ای):  $e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu$

$$\frac{d\sigma}{dq^\nu} = \left( \frac{\alpha^2\pi}{\varepsilon E^\nu \sin^2\theta/2} \right) \frac{1}{EE'} \left\{ \cos^2\theta/2 - \frac{q^\nu}{2m_\mu} \sin^2\theta/2 \right\} \quad (138)$$

• پراکندگی کشسان الکترون - پروتون:  $e^- + p \rightarrow e^- + p$

$$\frac{d\sigma}{dq^\nu} = \left( \frac{\alpha^2\pi}{\varepsilon E^\nu \sin^2\theta/2} \right) \frac{1}{EE'} \left\{ \frac{G_E^\nu(q^\nu) + \tau G_M^\nu(q^\nu)}{1+\tau} \cos^2\theta/2 + 2\tau G_M^\nu(q^\nu) \sin^2\theta/2 \right\} \quad (139)$$

اینک نکته‌ی ظریف! این دو رابطه را حالا می‌توان با ضرب کردن در یک تابع  $\delta$  به صورت دیفرانسیل مرتبه‌ی دو نوشت. به بیان دیگر، از رابطه‌ی  $q^\nu = -2m_p\nu$  یا  $\int d\nu\delta(\nu + q^\nu/2m_p) = 1$  استفاده می‌کنیم. در نتیجه، رابطه‌های (۱۳۵) و (۱۳۷) یا (۱۳۸) و (۱۳۹) شکل دلخواه خود را خواهند یافت. با توجه به این که تابع  $\delta$  زوج است،  $\delta(x) = \delta(-x)$ ، به دست می‌آید:

• پراکندگی کشسان الکترون - میون (نقطه‌ای):  $e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu$

$$\frac{d\sigma}{dQ^\nu d\nu} = \left( \frac{\alpha^2\pi}{\varepsilon E^\nu \sin^2\theta/2} \right) \frac{1}{EE'} \left\{ \cos^2\theta/2 - \frac{q^\nu}{2m_\mu} \sin^2\theta/2 \right\} \delta\left(\nu - \frac{Q^\nu}{2m_\mu}\right) \quad (140)$$

• پراکندگی کشسان الکترون - پروتون:  $e^- + p \rightarrow e^- + p$

$$\frac{d\sigma}{dQ^\nu d\nu} = \left( \frac{\alpha^2\pi}{\varepsilon E^\nu \sin^2\theta/2} \right) \frac{1}{EE'} \left\{ \frac{G_E^\nu(q^\nu) + \tau G_M^\nu(q^\nu)}{1+\tau} \cos^2\theta/2 + 2\tau G_M^\nu(q^\nu) \sin^2\theta/2 \right\} \delta\left(\nu - \frac{Q^\nu}{2m_p}\right) \quad (141)$$

روشن است که با استفاده از تابع  $\delta$  و انتگرال‌گیری نسبت به  $d\nu$ ، رابطه‌های (۱۳۸) و (۱۳۹) دوباره به دست می‌آیند.

• پراکندگی ناکشسان الکترون - پروتون:  $e^- + p \rightarrow e^- + X$

$$\frac{d^3\sigma}{dQ^\nu d\nu} = \frac{\alpha^2\pi}{\varepsilon E^\nu \sin^2\theta/2} \frac{1}{EE'} \left( 2W_\nu \sin^2\theta/2 + W_\nu \cos^2\theta/2 \right) \quad (142)$$

حال بگذارید رابطه‌های (۱۴۰) و (۱۴۲) را با هم مقایسه کنیم. اگر پروتون یک ذره‌ی نقطه‌ای می‌بود، می‌بایست رابطه‌ی (۱۴۲) به رابطه‌ی (۱۴۰)، اما با  $m_\mu \rightarrow m_p$ ، کاهش می‌یافت. یعنی می‌بایست داشته باشیم:

$$W_\nu(\nu, Q^\nu)_{\text{point}} \rightarrow \delta\left(\nu - \frac{Q^\nu}{2m_p}\right), \quad 2W_\nu(\nu, Q^\nu)_{\text{point}} \rightarrow \frac{Q^\nu}{2m_p} \delta\left(\nu - \frac{Q^\nu}{2m_p}\right) \quad (143)$$

(برای این که فراموش نکنیم از پروتون بدون ساختار و نقطه‌ای سخن می‌گوییم، از زیرنویس point استفاده کردیم). با استفاده از

اتحاد  $\delta(x/a) = a\delta(x)$  می‌توان رابطه‌های (۱۴۳) را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$iW_\nu(\nu, Q^\nu)_{\text{point}} = \delta\left(1 - \frac{Q^\nu}{2m_p\nu}\right), \quad 2m_p W_\nu(\nu, Q^\nu)_{\text{point}} = \frac{Q^\nu}{2m_p\nu} \delta\left(1 - \frac{Q^\nu}{2m_p\nu}\right) \quad (144)$$

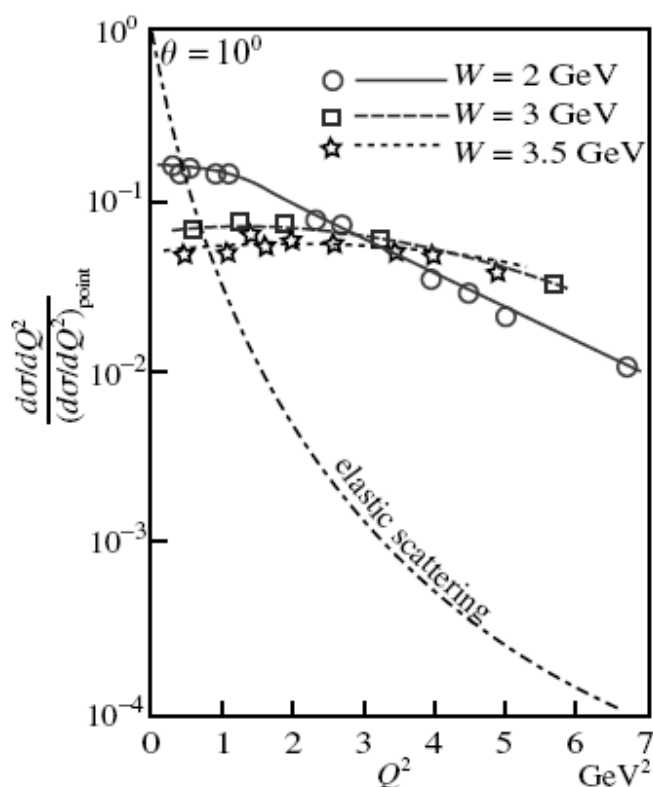
ساختار این توابع در دنباله‌ی این بحث بسیار پر اهمیت خواهند بود. از رابطه‌های (۱۴۴) به روشنی دیده می‌شود که سمت راست آنها فقط تابعی از نسبت  $Q^2/2m_p\nu$  است و جداگانه به  $Q^2$  و  $\nu$  بستگی ندارند.

همین مقایسه را می‌توان بین رابطه‌های (۱۴۱) برای پراکندگی کشسان الکترون- پروتون و رابطه‌ی (۱۴۲) برای پراکندگی ناکشسان انجام داد. برای سادگی فرض کنید  $G_E^{\nu} = G_M^{\nu} \equiv G^{\nu}$  است و به یاد بیاورید که  $Q^2/\epsilon m_p^2 = -q^2/\epsilon m_p^2 = \tau$  است. بنابراین، برای پراکندگی کشسان الکترون- پروتون خواهیم داشت

$$W_{\nu}^{\text{elastic}} = G^{\nu}(Q^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_p}\right) \Rightarrow \nu W_{\nu}^{\text{elastic}} = G^{\nu}(Q^2) \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m_p\nu}\right) \quad (145)$$

$$W_{\nu}^{\text{elastic}} = \frac{Q^2}{\epsilon m_p^2} G^{\nu}(Q^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_p}\right) \Rightarrow 2m_p W_{\nu}^{\text{elastic}} = \frac{Q^2}{2m_p\nu} G^{\nu}(Q^2) \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m_p\nu}\right)$$

می‌بینیم که برعکس رابطه‌های (۱۴۳)، توابع ساختار رابطه‌ی (۱۴۵) یک ضریب  $G^{\nu}(Q^2)$  هم دارند و نمی‌توان آنها را چنان بازنویسی کرد که فقط تابعی از متغیر بدون بعد  $Q^2/2m_p\nu$  باشند. نتایج تجربی نشان می‌دهند که به ازای  $Q^2 > (0.71 \text{ GeV})^2$



شکل ۵ نسبت سطح مقطع پراکندگی  $ep$  به سطح مقطع موت: M.Breidenbach *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 23: 935, 1969.

هادرونی نهایی متناظر است. یعنی،  $x = 1$  با وضعیتی متناظر است که در حالت نهایی فقط یک هادرون وجود دارد و پراکندگی کشسان را نشان می‌دهد. از سوی دیگر، به ازای  $x \approx 0$  ( $W$  بزرگ) یعنی حالت نهایی شامل تعداد زیادی هادرون است.

عامل شکل  $G(Q^2)$  خیلی سریع افت پیدا می‌کند و احتمال پراکندگی کشسان را کاهش می‌دهد و به فروپاشی پروتون می‌انجامد. در اینجا یک مقیاس جرم  $0.71 \text{ GeV}$  وجود دارد. اما در توابع ساختار نقطه‌ای مقیاس جرم وجود ندارد. آنها فقط تابعی از متغیر بدون بعد  $Q^2/2m_p\nu$  اند [۷]. جرم  $m_p$  فقط سنج‌های برای  $Q^2$  و  $\nu$  است.

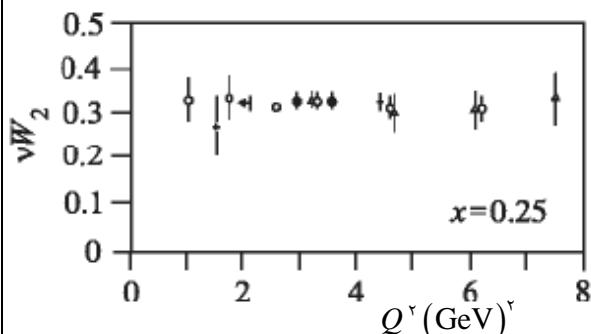
توابع ساختار  $W_{\nu}(Q^2, \nu)$  و  $W_{\nu}(Q^2, \nu)$  را می‌توان از مقدارهای اندازه‌گیری شده‌ی سطح مقطع ناکشسان، رابطه‌ی (۱۴۲)، به دست آورد. کافی است در  $Q^2$  ثابتی، نتایج تجربی سطح مقطع را برحسب  $\tan^2 \theta/2$  رسم کنیم و از روشی که برای به دست آوردن عامل‌های شکل گفتیم (پیش از رابطه‌ی (۷۹) عمل کنیم.

توابع ساختار  $W_{\nu}(Q^2, \nu)$  را می‌توان برحسب متغیر بیورکن  $x \equiv Q^2/2m_p\nu$  نوشت.

جرم ناوردای حالت نهایی هادرونی  $p_X^{\nu} \equiv W$  عبارت از  $p_X^{\nu} \equiv W = (p_a + q)^2 = m_p^2 + Q^2(1-x)/x$  است. به ازای مقدار معین  $Q^2$  هر مقدار  $x$  با یکی از حالت‌های ممکن

[1] J.D. Bjorken, *Phys. Rev.* **179**, 1547 (1969).

در سال ۱۹۶۸ نخستین پراکندگی الکترون- پروتون در  $Q^2$  های بزرگ در مرکز شتابدهنده‌ی خطی استنفورد (SLAC) انجام گرفت. این نخستین آزمایش پراکندگی ناکشسان ژرف بود. انتظار می‌رفت که سطح مقطع پراکندگی خیلی کوچک باشد (چون عامل‌های شکل پروتون با افزایش  $Q^2$  به شدت کاهش می‌یابد). آزمایش‌گرهای استنفورد-ام. آی. تی با شگفتی دیدند که سطح مقطع پراکندگی خیلی بزرگ‌تر از مقداری است که انتظار داشتند. به بیان دیگر، رفتار توابع ساختار  $W_{1,2}(x, Q^2)$  که از تجربه به دست آورده بودند، خیلی با رفتار عامل‌های شکل  $G_{E,M}^2(Q^2)$  متفاوت بود. در حقیقت، داده‌های تجربی نشان می‌داد که اگر  $x$  را ثابت نگه می‌داشتند و  $Q^2$  را از  $1 \text{ GeV}^2$  تا  $20 \text{ GeV}^2$  (بیشینه



انرژی که در آن زمان قابل دسترس بود) تغییر می‌دادند،  $W_1(x, Q^2)$  و  $(\nu/m_p)W_2(x, Q^2)$  در این بازه عملاً تغییر نمی‌کردند، اما  $G_{E,M}^2(Q^2)$  از ۱ به  $10^{-6}$  کاهش پیدا می‌کرد. در شکل‌های ۵ و ۶ این وضعیت‌ها را نشان می‌دهند. از شکل ۵ دیده می‌شود که سطح مقطع کشسان به سرعت با افزایش  $Q^2$  فروافت می‌کند. این رفتار نشان می‌دهد که هدف، جسم دارای بعد (غیر نقطه‌ای) است. اما تغییرات سطح مقطع‌های پراکندگی ناکشسان در  $W$  های بزرگ به نسبت کند اند. در شکل ۶ دیده می‌شود که در

شکل ۶ تابع ساختار  $\nu W_2$  بر حسب  $Q^2$  در  $x = 0,25$  Friedmann, J. I and Kendall, H. W, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **22**, 203 (1972).

یک مقدار ثابت  $x = 0,25$  تابع ساختار  $\nu W_2$  اساساً مقدار ثابتی است و با تغییر  $Q^2$  تغییر نمی‌کند. این رفتار تابع تابع ساختار را مقیاس‌پذیری می‌نامند.

### ۲-۲-۳ مقیاس‌پذیری بیورکن

در سال ۱۹۶۹ بیورکن [۱] با استفاده از جبر جریان\* مدل کوآرکی گلن<sup>د</sup> [۲] قانون مقیاس‌پذیری توابع ساختار را پیشنهاد کرد. بر اساس این قانون، در حد  $Q^2 \rightarrow \infty$  و  $-q^2 = Q^2$  و  $\nu \rightarrow \infty$  اما  $x \equiv Q^2/2m_p\nu$  محدود، توابع ساختار  $W_{1,2}(x, Q^2)$  مقیاس‌پذیر می‌شوند و به صورت زیر رفتار می‌کنند

$$m_p W_1(Q^2, \nu) \rightarrow F_1(x), \quad \nu W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F_2(x) \quad (۱۴۶)$$

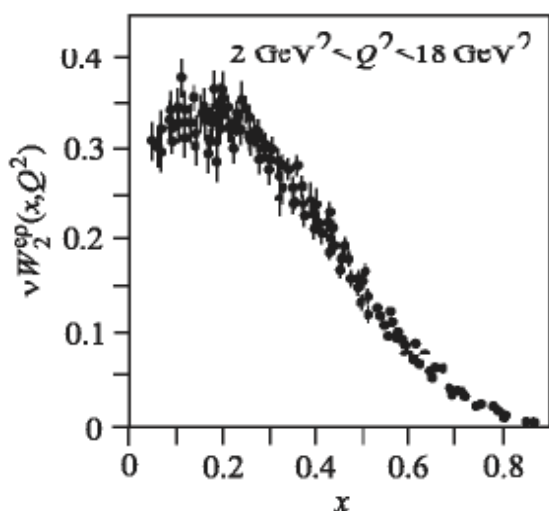
مقیاس‌پذیری به این معنی است که توابع  $F_1(x)$  و  $F_2(x)$  مستقل از  $Q^2$  اند و فقط به متغیر  $x$  بستگی دارند. اندرونی فیزیکی مقیاس‌پذیری بیورکن این است که  $F_1(x)$  و  $F_2(x)$  توابع محدود اند.

نکته: همواره می‌توان  $W(x, Q^2)$  را به صورت  $W(Q^2, \nu) = f(x, Q)$  نوشت که وقتی  $Q^2 \rightarrow \infty$  و  $x$  مقدار معین و ثابتی است،  $f(x, Q^2)$  به تابع  $F(x)$  میل کند.  $F(x)$  می‌تواند صفر باشد، مقداری محدود داشته باشد و یا نامتناهی باشد. فیزیک مقیاس‌پذیری در این است که وقتی  $Q^2 \rightarrow \infty$  می‌کند، مقدار  $F(x)$  در هر  $x$  معین، محدود است. مقیاس‌پذیری یعنی  $F_1(x)$  و  $F_2(x)$  به ازای هر مقدار  $x$  محدود اند. وضعیتی را که این مقدار محدود صفر است، می‌توان به صورت زیر فهمید: توابع ساختار اساساً جمع ناهم‌دوس مربع عامل‌های شکل اند که در  $Q^2$  های بزرگ، هر یک به سرعت به صفر میل می‌کنند. \*

\* Current Algebra  
<sup>د</sup> Gell-Mann

همانگونه که از شکل ۶ پیداست، آزمایش‌های اولیه درستی این پیش‌بینی را نشان دادند و به بازنگری در بنیادهای نظری قانون مقیاس‌پذیری بیورکن و مدل ساده‌ی کوآرکی رهنمون شدند.

بررسی دقیق‌تر داده‌های تجربی در شکل ۷ نشان می‌دهد که در هر  $x$  معین، انحراف جزئی، اما مهم از قانون مقیاس‌پذیری وجود دارد. به بیان دیگر، داده‌های تجربی در هر  $x$  در نوار باریکی پخش شده‌اند. این بررسی نشان می‌دهد که رفتار ساده‌ی



شکل ۷ رفتار تابع ساختار  $\nu W_2$  بر حسب  $x$  در  $Q^2$  های متفاوت.

W. B. Attwood, *Proc. 1979 SLAC Summer Institute on Particle Physics (SLAC-224)*, ed. A. Mosher, vol. 3.

مقیاس‌پذیری توابع ساختار نقض شده است. نقض رفتار ساده‌ی مقیاس‌پذیری توابع ساختار در نظریه‌ی کرومودینامیک کوانتومی<sup>#</sup> (QCD) پیش‌بینی می‌شود. با این حال، مقیاس‌پذیری تقریبی ویژگی عمومی داده‌های تجربی بود و فهمیدنش از اهمیت زیادی برخوردار است. داده‌های تجربی گروه SLAC-MIT نشان می‌دهند که در  $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$  مقیاس‌پذیری بیورکن با خطای ۱۰٪ برقرار است [۲]. مقیاس‌پذیری را چگونه می‌توان توصیف کرد؟ ریچارد فاینمن نخستین توصیف را بر اساس سینماتیک پراکندگی کشسان الکترون از هدف نقطه‌ای در درون پروتون بیان کرد [۳]. فاینمن این ذره‌های نقطه‌ای درون پروتون را پارتون<sup>+</sup> نامید.

بگذارید فیزیک پراکندگی ناکشسان ژرف را بفهمیم: آزمایش‌های اوایل سال‌های ۱۹۶۰ در پراکندگی کشسان الکترون-پروتون نشان دادند که عامل‌های شکل  $G_{E,M}^2(Q^2)$  بنا به رابطه‌ی (۷۹) توزیع دوقطبی دارند و با افزایش  $Q^2$  کاهش می‌یابند. با این آزمایش‌ها می‌دانستند که پروتون ذره‌ی نقطه‌ای نیست، بلکه ساختار درونی دارد. در نتیجه، پروتون باید

یک حالت مقید باشد. اما حالت مقید چه چیزهایی باید باشد و سرشت برهم‌کنش آنها چیست؟ دو یافته‌ی کلیدی که از پراکندگی ژرف ناکشسان به دست آمده بود، عبارت بودند از (۱) توابع ساختار به تقریب مستقل از  $Q^2$  بودند و چشم‌گیرتر آن که با افزایش  $Q^2$  به صفر میل نمی‌کنند. (۲) اگر رابطه‌ی (۱۴۲) را به صورت

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi\sigma_{\text{Mott}}}{m_p EE'} \left( \nu W_1 \tan^2 \theta / \nu + W_2 \right) \quad (147)$$

بنویسیم، وجود جمله‌ی  $\tan^2 \frac{\theta}{2}$  می‌گوید که  $W_1(Q^2, x) \rightarrow F_1(x) \neq 0$  به این اشاره دارد که وقتی نوکلئون با فوتون مجازی کاویده می‌شود، فوتون آن را به صورت پیوند ضعیفی از پارتون‌های نقطه‌ای می‌بیند. نکته‌ی (۲) نشان می‌دهد که این پارتون‌ها فرمیون‌اند (به نکته‌ی ۴ پس از رابطه‌ی (۷۶) نگاه کنید). بنابراین، از این مشاهدات کوآرک نقطه‌ای به طور طبیعی به عنوان سازنده‌ی بنیادی ماده سر برمی‌آورد. در آینده خواهیم دید که پیوند ضعیف بین پارتون‌ها پی‌آمد آزادی

<sup>#</sup> Quantum Chromodynamics (QCD)

[۲] E.D. Bloom, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 930 (1969); M. Breidenbach *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 935 (1969);

J.I. Friedmann, and H.W. Kendall, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **22**, 203 (1972); J.S. Poucher *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 118 (1974).

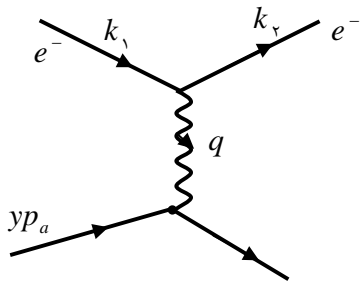
[۳] R. P. Feynman, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1415 (1969); J. D. Bjorken and E. A. Paschos, *Phys. Rev.* **185**, 1975 (1969).

<sup>+</sup> Parton

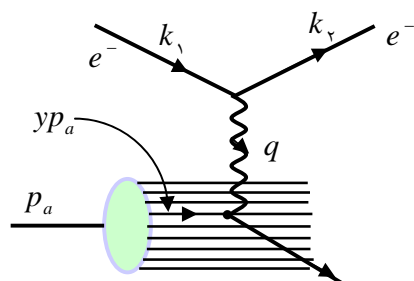
مجانبی\* در QCD است.

اگر پروتون حالت مقید مثلاً  $n\pi^+$  یا  $\Lambda K^+$  می‌بود،  $W_{\nu,\nu}(Q^2, \nu)$  وابستگی قوی به  $Q^2$  پیدا می‌کرد (چون سازنده های  $n$  و  $\Lambda$  هم مانند  $p$  ذره‌های با ساختارند.) و  $F_1(x)$  صفر می‌شد (چون فوتون ذره‌های بدون اسپین  $\pi$  و  $K$  را در پروتون می‌کاوید). درجه‌ی آزادی رنگ\* کوارک هم حضورش را، برای نمونه، در سطح مقطع کل (هادرون‌ها  $\rightarrow e^- + e^+$ ) و در واپاشی (هادرون‌ها  $\rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e$ ) اعلام می‌کرد.

همان گونه که گفتیم، مقیاس‌پذیری بیورکن را فاینمن با استفاده از سینماتیک پراکندگی کشسان از ذره‌ی نقطه‌ای توصیف کرد. بنابراین، می‌توانیم از آموزه‌های فصل ۵ (مثلاً از پراکندگی کشسان  $e + \mu \rightarrow e + \mu$ ) استفاده و میون را با پارتون جایگزین کنیم. فوتون مجازی با  $Q^2$  ها و  $\nu$  های بزرگ، در درون پروتون، فاصله‌های بسیار کوتاه‌تر را در زمان‌های کوتاه می‌کاود. این را از اصل عدم قطعیت می‌دانیم. در واقع، تکانه‌ی  $Q^2$  که فوتون حمل می‌کند، مانند بزرگ‌نمایی ذره‌بین رفتار می‌کند.  $Q^2$  های بزرگ با طول موج‌های کوتاه فوتون متناظر است. هر چه  $Q^2$  بزرگ باشد، طول موج فوتون متناظر کوتاه‌تر است. فوتون با طول موج کوتاه می‌تواند در فضای کوچک‌تر بگنجد و آن را بکاود، چون  $\Delta Q \Delta \lambda \approx \hbar$  است. همچنین،  $\Delta \nu \Delta t \approx \hbar$  نشان می‌دهد که فوتون با انرژی زیاد زمان اندکی را در درون پروتون سپری می‌کند. بنابراین، فاینمن فرض کرد که فوتون با ذره‌های سازنده‌ی کوچک و نقطه‌ای در درون پروتون برهم‌کنش می‌کند و این ذره‌های نقطه‌ای کسر  $f$  از انرژی و تکانه‌ی پروتون را حمل می‌کنند. در زمان کوتاهی که فوتون مجال دارد تا انرژی بزرگ  $\nu$  را به ذره‌ی نقطه‌ای منتقل کند، شاید سازنده‌ی نقطه‌ای را بتوان اساساً ذره‌ی آزاد پنداشت. در شکل ۸ این وضعیت نشان داده شده است. بنابراین، به طور بنیادی پراکندگی کشسان آرمانی خواهیم داشت که در شکل ۹ دیده می‌شود. شرط سینماتیک پراکندگی کشسان پارتون‌ها، به رابطه‌ای که بین  $Q^2$  و  $\nu$



شکل ۹ پراکندگی کشسان الکترون-پارتون



شکل ۸ پراکندگی فوتون-پارتون

در نتیجه، به رفتار مقیاس‌پذیری مشاهده شده می‌انجامد. بحث اولیه‌ی مدل پارتون در چارچوب تکانه‌ی بینهایت پروتون پیش برده شد. یعنی در چارچوبی که در آن تکانه‌ی پروتون بینهایت (یا خیلی بزرگ) است. از برتری‌های این چارچوب بی‌نیازی به اشاره‌ی روشن به جرم پارتون است و از زیبایی‌های نظری زیادی برخوردار است. اما منشاء سینماتیکی ساده‌ی مقیاس‌پذیری در آن خیلی روشن نیست. بنابراین، پراکندگی الکترون-پارتون را نخست در چارچوب آزمایشگاه (مانند مثال فرایند کشسان  $e + \mu \rightarrow e + \mu$ ) محاسبه می‌کنیم و سپس، برای کامل بودن بحث، آن را در چارچوب تکانه بینهایت بررسی خواهیم کرد. اجازه دهید نخست نشان دهیم که کسر تکانه‌ی  $f$  پارتون چیزی به جز متغیر  $x$  بیورکن نیست. چارتکانه‌ی پارتون  $i$  را  $p_i^H$  و جرم آن را  $m_i$  بنامید. داریم

\* Asymptotic freedom

\* Color Degrees of Freedom

$$p_i^{\mu} = f p_a^{\mu} \quad ; \quad m_i = f m_p \quad (148)$$

با توجه به شکل ۹، از پایستگی انرژی و تکانه در راس پارتون خواهیم داشت

$$(p_i + q)^{\nu} = (f p_a + q)^{\nu} = m_i^{\nu} \Rightarrow (f p_a + q)^{\nu} = (f m_a)^{\nu} \quad (149)$$

از این رابطه به دست می‌آید

$$f^{\nu} m_a^{\nu} + q^{\nu} + \nu f p_a \cdot q = f^{\nu} m_a^{\nu} \Rightarrow f = -\frac{q^{\nu}}{\nu p_a \cdot q} = \frac{Q^{\nu}}{\nu m_p \nu} \equiv x \quad (150)$$

توجه کنید که در چارچوب آزمایشگاه  $p_a = (m_p, \mathbf{0})$  است و در نتیجه  $p_a \cdot q = (m_p, \mathbf{0})(E - E', \mathbf{q}) = m_p \nu$  است.

این واقعیت که توابع ساختار نوکلئون به نظر می‌رسد با تقریب خوبی فقط به  $x$  بستگی دارند، نشان می‌دهد که از نظر فیزیکی، پراکندگی الکترون از پارتون "شبه آزاد"، شکل ۹، نقش برجسته دارد. در فصل مربوط به QCD نشان خواهیم داد که ویژگی آزادی مجانبی برای این تصویر یک منشاء دینامیکی فراهم می‌کند.

پرسش بعدی این است که  $x$  چه مقدارهایی می‌تواند داشته باشد؟ رابطه‌ی (۱۵۰) نشان می‌دهد که متغیر  $x$  کسری از تکانه نوکلئون است که پارتون حمل می‌کند. اگر نوکلئون از سه کوارک ساخته شده بود، چون فوتون آنها را ذره‌های آزاد می‌بیند، هر کوارک می‌بایست  $\frac{1}{3} = x$  تکانه‌ی نوکلئون را حمل می‌کرد. در این صورت سطح مقطع پراکندگی می‌بایست شبیه یک تابع  $\delta$  می‌بود که بیشینه‌ی آن در  $x = \frac{1}{3}$  قرار دارد. شکل به یقین چیز دیگری را نشان می‌دهد. شاید چیزهای دیگری به جز دو کوارک  $u$  و یک کوارک  $d$  در پروتون وجود دارند.

جرم ناوردای هادرون‌های نهایی در پراکندگی  $e^- + p \rightarrow e^- + X$  بزرگتر از جرم نوکلئون است، چون  $P_X^{\nu} = (p_a + q)^{\nu}$  است. در نتیجه،  $q^{\nu} + \nu m_p \nu \geq 0 \Rightarrow q^{\nu} + \nu p_a \cdot q \geq m_p^{\nu} \Rightarrow P_X^{\nu} = p_a^{\nu} + q^{\nu} + \nu p_a \cdot q \geq m_p^{\nu}$  و بنابراین، به دست می‌آید:  $0 \leq x \leq 1$  است.

### ۳-۲-۳ مدل پارتون: چارچوب سکون نوکلئون

با گفتار بالا می‌توان تصور کرد که اندرونی نوکلئون بیش از فقط سه کوارک  $u$  و  $d$  است. شاید چندین کوارک (و پادکوارک) و چیزهای دیگر (گلوئون که کوارک‌ها را به هم می‌پیوندند) داشته باشد. اگر قرار است اسپین کوارک‌ها  $\frac{1}{2}$  باشد، سطح مقطع پراکندگی الکترون از کوارک یا پادکوارک - پارتون‌ها - نوع  $i$  با بار الکتریکی  $e_i$  (در یکای بار الکترون  $e$ ) درست همانند سطح مقطع پراکندگی  $e\mu$  است. فقط باید در رابطه‌ی (۱۴۰) جرم میون را با جرم پارتون  $i$  جایگزین کنیم و همه چیز را در  $e_i^{\nu}$  ضرب کنیم ( $e \rightarrow e_i e$ ). رابطه‌ی (۱۴۰) برای پراکندگی الکترون - پارتون به شکل زیر درمی‌آید:

$$\frac{d\sigma^i}{dQ^{\nu} d\nu} = \left( \frac{\alpha^{\nu} \pi}{\varepsilon E^{\nu} \sin^{\varepsilon} \theta / \nu} \right) \frac{1}{EE'} \left\{ e_i^{\nu} \cos^{\nu} \theta / \nu - e_i^{\nu} \frac{q^{\nu}}{\nu m_i^{\nu}} \sin^{\nu} \theta / \nu \right\} \delta \left( \nu - \frac{Q^{\nu}}{\nu m_i} \right) \quad (151)$$

اگر این رابطه را با معادله‌ی عمومی پراکندگی ناکشسان، رابطه‌ی (۱۴۲) یا رابطه‌ی (۱۴۷) که برحسب توابع ساختار  $W_{\nu}$  و  $W_{\nu}$  نوشته شده اند، مقایسه کنید،

$$\frac{d^{\nu} \sigma}{dQ^{\nu} d\nu} = \frac{\alpha^{\nu} \pi}{\varepsilon E^{\nu} \sin^{\varepsilon} \theta / \nu} \frac{1}{EE'} \left( \nu W_{\nu} \sin^{\nu} \theta / \nu + W_{\nu} \cos^{\nu} \theta / \nu \right) \quad (152)$$

سهم هر پارتون  $i$  در توابع ساختار  $W_{\nu}$  و  $W_{\nu}$  مشخص می‌شود. ما آنها را با  $w_{\nu}^i$  و  $w_{\nu}^i$  نشان می‌دهیم. از مقایسه‌ی رابطه‌های

\* quasi-free



(۱۵۱) و (۱۵۲) دیده می‌شود که

$$w_{\setminus}^i = e_i^{\setminus} \frac{Q^{\setminus}}{\xi m_i^{\setminus}} \delta \left( v - \frac{Q^{\setminus}}{\setminus m_i} \right) = e_i^{\setminus} \frac{Q^{\setminus}}{\xi m_p^{\setminus} x_i^{\setminus}} \delta \left( v - \frac{Q^{\setminus}}{\setminus m_p x_i} \right) \quad (153)$$

$$w_{\setminus}^i = e_i^{\setminus} \delta \left( v - \frac{Q^{\setminus}}{\setminus m_i} \right) = e_i^{\setminus} \delta \left( v - \frac{Q^{\setminus}}{\setminus m_p x_i} \right) \quad (154)$$

در تساوی دوم از جایگزینی  $m_i = f m_p = x m_p$  استفاده کردیم.

اگر به راستی توابع ساختار نوکلئون جمع توابع ساختار پارتون‌هاست، این جمع باید ناهمدوس باشد. بنابراین، برای به دست آوردن توابع ساختار  $W_{\setminus}$  و  $W_{\setminus}$  نوکلئون، باید سهم هر پارتون‌های (کوارک‌ها و پادکوارک‌ها) نوع  $i$  را در احتمال یافتن آن پارتون ضرب کنیم و با هم جمع کنیم و بر روی متغیر پیوسته‌ی  $x$  (تکانه‌ای که هر پارتون حمل می‌کند) انتگرال بگیریم. اگر احتمال یافتن پارتون نوع  $i$  با کسر تکانه‌ی  $x$  در نوکلئون را  $f_i(x)$  بنامیم، گزاره‌ی بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$W_{\setminus}(Q^{\setminus}, \nu) = \sum_i \int_0^1 dx_i f_i(x_i) w_{\setminus}^i = \sum_i \int_0^1 dx_i f_i(x_i) \left[ e_i^{\setminus} \frac{Q^{\setminus}}{\xi m_p^{\setminus} x_i^{\setminus}} \delta \left( v - \frac{Q^{\setminus}}{\setminus m_p x_i} \right) \right] \quad (155)$$

$$W_{\setminus}(Q^{\setminus}, \nu) = \sum_i \int_0^1 dx_i f_i(x_i) w_{\setminus}^i = \sum_i \int_0^1 dx_i f_i(x_i) \left[ e_i^{\setminus} \delta \left( v - \frac{Q^{\setminus}}{\setminus m_p x_i} \right) \right] \quad (156)$$

توجه کنید که توابع  $\delta$  را در رابطه‌های (۱۵۵) و (۱۵۶) می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\delta \left( v - \frac{Q^{\setminus}}{\setminus m_p x_i} \right) = \delta \left[ \frac{\nu}{x_i} \left( x_i - \frac{Q^{\setminus}}{\setminus m_p \nu} \right) \right] = \frac{x_i}{\nu} \delta(x_i - x) \quad (157)$$

با این جایگزینی، رابطه‌های (۱۵۵) و (۱۵۶) به صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned} W_{\setminus}(Q^{\setminus}, \nu) &= \sum_i \int_0^1 dx_i f_i(x_i) \left[ e_i^{\setminus} \frac{Q^{\setminus}}{\xi m_p^{\setminus} x_i^{\setminus}} \frac{x_i}{\nu} \delta(x_i - x) \right] \\ &= \sum_i \int_0^1 dx_i f_i(x_i) \left[ e_i^{\setminus} \frac{1}{m_p} \frac{x}{\setminus x_i} \delta(x_i - x) \right] = \frac{1}{\setminus m_p} \sum_i e_i^{\setminus} f_i(x) \end{aligned} \quad (158)$$

$$\begin{aligned} W_{\setminus}(Q^{\setminus}, \nu) &= \sum_i \int_0^1 dx_i f_i(x_i) w_{\setminus}^i = \sum_i \int_0^1 dx_i f_i(x_i) \left[ e_i^{\setminus} \delta \left( v - \frac{Q^{\setminus}}{\setminus m_p x_i} \right) \right] \\ &= \sum_i \int_0^1 dx_i f_i(x_i) \left[ e_i^{\setminus} \frac{x_i}{\nu} \delta(x_i - x) \right] = \frac{1}{\nu} \sum_i e_i^{\setminus} x f_i(x) \end{aligned} \quad (159)$$

بنابراین، دیده می‌شود که  $m_p W_{\setminus}(Q^{\setminus}, \nu)$  و  $\nu W_{\setminus}(Q^{\setminus}, \nu)$  به توابعی از فقط  $x$  کاهش یافته و مقیاس‌پذیر می‌شوند:

$$m_p W_{\setminus}(Q^{\setminus}, \nu) = \sum_i \frac{e_i^{\setminus}}{\setminus} f_i(x) \equiv F_{\setminus}(x) \quad (160)$$

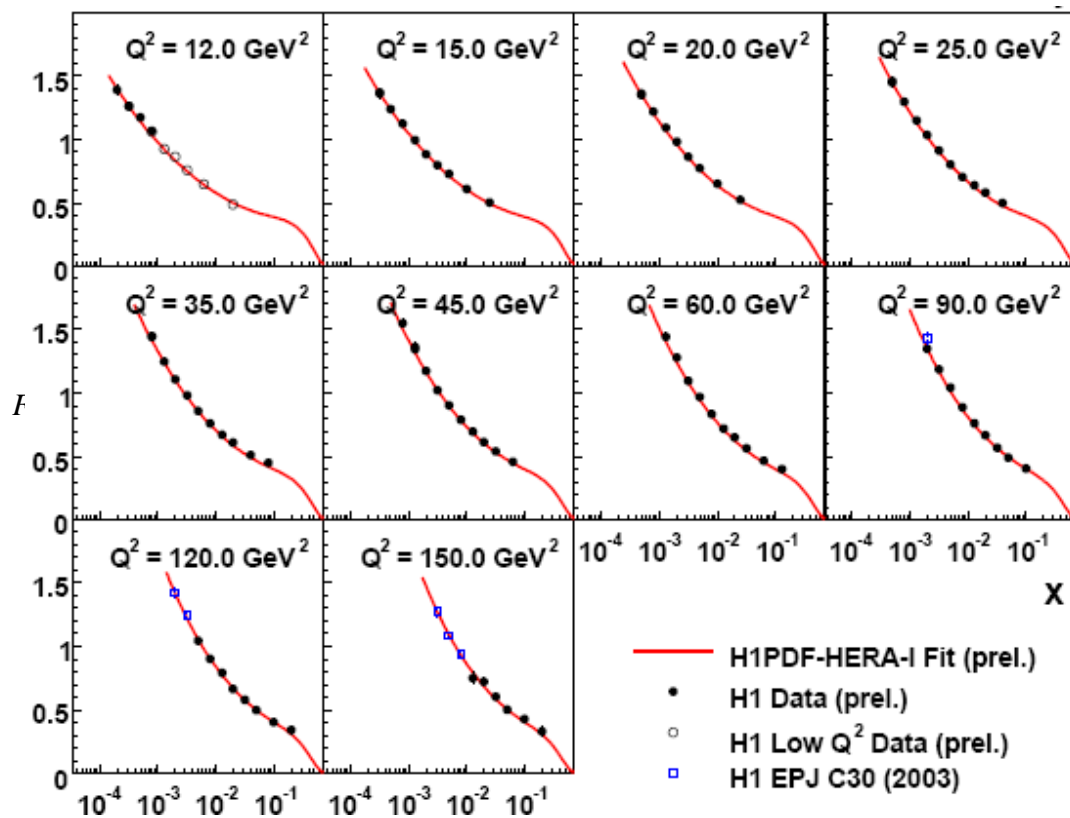
$$\nu W_{\setminus}(Q^{\setminus}, \nu) = \sum_i e_i^{\setminus} x f_i(x) \equiv F_{\setminus}(x) \quad (161)$$

و بنابراین، معادله‌ی اصلی مدل پارتون به دست می‌آید:

$$2xF_1(x) = F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \quad (162)$$

رابطه‌ی بین  $F_1(x)$  و  $F_2(x)$ ، معادله‌ی (۱۶۲)، رابطه‌ی کالان-گراس<sup>۵</sup> نامیده می‌شود. رابطه‌ی کالان-گراس نتیجه‌ی مستقیم فرض فرمیون بودن کوارک‌هاست. رابطه‌ی (۱۶۲) بازتاب این واقعیت ساده است که پارتون‌هایی که با فوتون برخورد می‌کنند، ذره‌های با اسپین  $\frac{1}{2}$  اند. اگر اسپین این پارتون‌ها صفر بود،  $F_1(x)$  صفر می‌شد. بنا به تعریف، چون پارتون‌ها ذره‌های نقطه‌ای اند و در نتیجه، عامل شکل ندارند، به سادگی می‌فهمیم که چرا توابع ساختار (دست‌کم وقتی که اثرهای QCD نادیده گرفته می‌شوند) مستقل از  $Q^2$  اند.

تصحیح‌های QCD سبب می‌شوند که توابع ساختار به طور لگاریتمی به  $Q^2$  بستگی پیدا کنند. به علت این وابستگی هموار به  $Q^2$ ، در  $x$  های کوچک،  $F_{1,2}(x)$  اندکی افزایش پیدا می‌کنند. در  $x$  های بزرگ اثر آن وارون است و به کاهش اندک  $F_{1,2}(x)$  می‌انجامد. این رفتار را فقط با نظریه‌ی پیمانه‌ای ناآلی\* که ویژگی آزادی مجانبی دارد، می‌توان توصیف کرد. به بیان دیگر، قانون مقیاس‌پذیری بیورکن باید نقض بشود. نقض آن را داده‌های شتابدهنده‌ی HERA به روشنی نشان داد. در شکل ۱۰ نمونه‌ی داده‌های HERA برای  $F_2(x)$  دیده می‌شود.



شکل ۱۰ تابع ساختار  $F_2(x)$  در  $x$  های کم و نقض مقیاس‌پذیری بیورکن.

J. Kretzschmar, Lake Louise Winter Institute, 2009, Alberta, canada; arxiv:0906.1108

<sup>۵</sup> Callan-Gross Relation

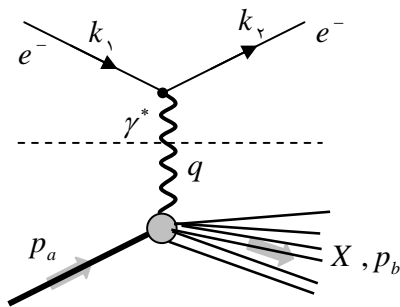
[۵] C. G. Callan and D. J. Gross, Phys. Rev. Lett. 22, 156 (1969).

\* Non-Abelian Gauge Theory

پیام روشن‌تر از این نمی‌شود: نخست برای توصیف مقیاس‌پذیری بیورکن به ذره‌های نقطه‌ای با اسپین  $\frac{1}{2}$  نیاز است؛ نقض مقیاس‌پذیری به روشنی پیش‌بینی شده است. مشاهده‌ی اثرهای QCD در فرایندهای الکترومغناطیسی و ضعیف یکی از دستاوردهای چشمگیر مدل استاندارد است.

### ۳-۲-۴ منشأ فیزیکی رابطه‌ی کالان-گراس

در پایان بخش ۳-۲-۴ گفتیم که رابطه‌ی کالان-گراس نتیجه‌ی مستقیم فرض فرمیون بودن پارتون است. اگر پارتون‌ها ذره‌های با اسپین  $\frac{1}{2}$  نبودند،  $F_1(x) = 0$  می‌شد. در این بخش می‌خواهیم فرض اسپین  $\frac{1}{2}$  بودن پارتون‌ها را توجیه کنیم.



اگر در شکل ۱۱ به نمودار فرایند  $e^- + N \rightarrow e^- + N$  نگاه کنید، می‌توانید آن را فرایندی با دو گام بپندارید. گام نخست عبارت از  $e^-(k_1) \rightarrow \gamma^*(q) + e^-(k_2)$  است که در آن فوتون مجازی  $\gamma^*$  تولید می‌شود. گام دوم پراکندگی فوتون مجازی و نوکلئون،  $\gamma^*(q) + N(p_a) \rightarrow X$  است. بخش بالای خط نقطه‌چین شکل ۱۱ گام نخست را نشان می‌دهد.

نقش این گام تولید فوتون مجازی است. بخش زیر خط نقطه‌چین، شکل ۱۱ دو گام پراکندگی ناکشسان الکترون-نوکلئون گام دوم است. ما توجه خود را به این بخش متمرکز می‌کنیم. بنابراین، توابع ساختار  $W_{1,2}(Q^2, \nu)$  سطح مقطع کل تولید فوتونی\* هادرون از نوکلئون،  $\sigma_{tot}(\gamma^* + N \rightarrow X)$  را نشان می‌دهند. در چارچوب سکون نوکلئون،  $\nu = q^0$  است و  $q^2$  مربع جرم ناوردای آن است. چون فوتون مجازی است ( $m_{\gamma^*} \neq 0$ )، نه تنها دو قطبش عرضی  $\epsilon_T^\mu(q)$  دارد، بلکه یک قطبش طولی  $\epsilon_L^\mu(q)$  هم دارد. به بیان دیگر، مولفه‌ی سوم اسپین فوتون مجازی دو مولفه‌ی عرضی ( $\lambda = \pm 1$ ) و یک مولفه‌ی طولی یا اسکالر ( $\lambda = 0$ ) دارد. سطح مقطع‌های متناظر را با  $\sigma_L$  و  $\sigma_T$  نشان خواهیم داد. فرض کنید در چارچوبی قرار داریم که در آن، چاربردار فوتون  $q_\mu = (q_0, 0, 0, q_z)$  است.

فوتون مجازی مثل یک ذره‌ی برداری دارای جرم است، اما چارتهانه‌ی آن فضاگونه ( $q^2 < 0$ ) است. بردارهای قطبش باید بر بردار انرژی-تکانه‌ی فوتون،  $q$ ، عمود باشد. یعنی باید در شرط زیر صدق کند

$$q \cdot \epsilon(\lambda) = q_\mu \epsilon^\mu(\lambda) = 0 \quad ; \quad \lambda = \pm 1, 0 \quad (163)$$

اگر ذره‌ی برداری دارای جرم، یک ذره‌ی آزاد باشد، چاربردار  $q$  آن زمان‌گونه ( $q^2 > 0$ ) است و هر سه بردارهای قطبش در شرط (۱۶۳) صدق می‌کنند. اما فوتون مجازی فضاگونه است و یکی از بردارهای قطبش آن باید زمان‌گونه باشد. در نتیجه، سه بردار قطبش فوتون مجازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\epsilon_T^\mu = \epsilon^\mu(\lambda = \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0) \quad (164)$$

$$\epsilon^\nu(\lambda = \pm 1) = -1 \quad \text{با بهنجارش:} \quad (165)$$

و

\* Photoproduction

$$\varepsilon_L^\mu = \varepsilon^\mu(\lambda = 0) = \frac{1}{\sqrt{Q^\nu}}(q_{\nu,0,0,0}, q_0) = \frac{1}{\sqrt{Q^\nu}}(\sqrt{v^\nu + Q^\nu}, 0, 0, v) \quad (166)$$

$$\varepsilon^\nu(\lambda = 0) = +1 \quad \text{با بهنجارش} \quad (167)$$

نکته: می‌توان چارچوبی را برگزید که در آن  $v = 0$  است. این چارچوب بریت<sup>\*</sup> است و به زودی در باره‌ی آن سخن خواهیم گفت. در این چارچوب  $\varepsilon^\mu(\lambda = 0) = (1, 0, 0, 0)$  است. به این دلیل فوتون با  $\lambda = 0$  را فوتون اسکالر هم می‌نامند. شرط‌های بهنجارش (165) و (167) را می‌توان در یک شرط متعامد بودن خلاصه کرد:

$$\varepsilon(\lambda) \cdot \varepsilon(\lambda') = \varepsilon_\mu(\lambda) \cdot \varepsilon^\mu(\lambda') = (-1)^\lambda \delta_{\lambda\lambda'} \quad (168)$$

شرط مکملیت با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$\sum_\lambda (-1)^{\lambda+1} \varepsilon^\mu(\lambda) \varepsilon^\nu(\lambda) = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^\nu}\right) \quad (169)$$

متریک در این رابطه با تعریف آن برای شرط مکملیت معمولی فرق دارد. در متریکی که در اینجا به کار گرفته شده است، شرط زمان‌گونه بودن  $(\varepsilon(\lambda = 0) \cdot \varepsilon^*(\lambda = 0) = +1)$  در نظر گرفته شده است. (برای آشنایی بیشتر پیوست همین فصل را ببینید.)

مثال 5 نشان دهید که می‌توان بردار قطبش فوتون اسکالر را به صورت زیر نوشت

$$\varepsilon^\mu(\lambda = 0) = \eta \left( p_a^\mu - \frac{(p_a \cdot q)}{q^\nu} q^\mu \right) ; \quad \eta = \left( p_a^\nu - \frac{(p_a \cdot q)}{q^\nu} \right)^{-\nu/2} \quad (170)$$

که در آن  $p_a^\mu$  چارتکانه‌ی پروتون هدف است.

حل: نخست توجه کنید که  $\varepsilon^\mu(\lambda = 0)$  یک بردار لورنتس است. از طرفی، برای این که بردار قطبش فوتون باشد باید در شرط  $q_\mu \varepsilon^\mu(\lambda = 0) = 0$  صدق کند. پس، باید داشته باشیم

$$q_\mu \varepsilon^\mu(\lambda = 0) = \eta \left( q \cdot p_a - \frac{(p_a \cdot q)}{q^\nu} q^\nu \right) = 0 \quad (171)$$

افزون بر این،  $\varepsilon^\mu(\lambda = 0)$  بهنجار و زمان‌گونه،  $\varepsilon_\mu(\lambda = 0) \varepsilon^\mu(\lambda = 0) = +1$  است. اگر متغیرها را در چارچوب سکون پروتون هدف حساب کنیم، خواهیم داشت:

$$\eta = \frac{Q}{m_a \sqrt{Q^\nu + v^\nu}} , \quad p_a^\mu = (m_a, 0, 0, 0) , \quad p_a \cdot q = m_a v , \quad q^\mu = (v, 0, 0, \sqrt{v^\nu + Q^\nu}) \quad (172)$$

حال باید نشان دهیم که رابطه‌ی (170) به رابطه‌ی (167) می‌انجامد. رابطه‌های (172) در رابطه‌ی (170) جایگزین کنید. داریم

$$\varepsilon^\mu(\lambda = 0) = \frac{Q}{m_a \sqrt{Q^\nu + v^\nu}} \left[ (m_a, 0, 0, 0) + \frac{m_a v}{Q^\nu} (v, 0, 0, \sqrt{Q^\nu + v^\nu}) \right] \quad (173)$$

$$= \frac{Q}{m_a \sqrt{Q^\nu + v^\nu}} \left[ \frac{m_a (Q^\nu + v^\nu)}{Q^\nu}, 0, 0, \frac{m_a v \sqrt{Q^\nu + v^\nu}}{Q^\nu} \right] = \frac{1}{\sqrt{Q^\nu}} (\sqrt{Q^\nu + v^\nu}, 0, 0, v) \quad (174)$$

\* Breit Frame

برای محاسبه‌ی سطح مقطع  $\sigma(\gamma^* + N \rightarrow X)$  باید شار  $K$  فوتون فرودی (یا انرژی فوتون فرودی) را بدانیم. دشواری دوم با فوتون مجازی، تعریف انرژی فوتون فرودی است. برای این که انرژی  $\gamma^*$  را تعریف کنیم، شرط می‌کنیم که هر متغیری که در حد  $Q^2 \rightarrow 0$  (فوتون حقیقی) به انرژی فوتون حقیقی کاهش پیدا کند، پذیرفتنی است. در اینجا انرژی فوتون را برحسب شار تعریف می‌کنیم و در چارچوب آزمایشگاه آن را به صورت زیر برمی‌گزینیم

$$K = \sqrt{\nu^2 + Q^2} \quad (175)$$

از تعریف دیگری به نام تعریف هند  $[0]^\diamond$  فراوان استفاده می‌شود. این رویکرد از جرم ناوردای حالت هادرونی نهایی بهره می‌گیرد و شار فوتون فرودی را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$K = (W^2 - m_a^2) / \sqrt{2} m_a = \nu - Q^2 / \sqrt{2} m_a \quad (176)$$

حالا در وضعیتی هستیم که می‌توانیم سطح مقطع  $\sigma(\gamma^* + N \rightarrow X)$  را حساب کنیم. بگذارید از اصول اولیه آغاز کنیم. دامنه‌ی گذار از حالت اولیه‌ی  $\gamma^* N$  به حالت نهایی  $X$ ، یعنی جذب فوتون توسط نوکلئون و تولید هادرون‌های  $X$  مانند همیشه عبارت است از

$$T_{fi} = (\sqrt{2}\pi)^\xi \delta^\xi(q + p_a - p_X) \varepsilon_\mu(\lambda) \langle p_X | J^\mu(\circ) | p_a \rangle \quad (177)$$

در نتیجه، سطح مقطع جذب فوتون در چارچوب آزمایشگاه به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\Omega} = \frac{e^2}{\xi K m_a} \sum_X (\sqrt{2}\pi)^\xi \delta^\xi(\varepsilon + p_a - p_X) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_\lambda \langle p_X | \varepsilon_\mu(\lambda) J^\mu | p_a \rangle \langle p_X | \varepsilon_\nu(\lambda) J^\nu | p_a \rangle^* \quad (178)$$

$$= \frac{e^2}{\xi K m_a} \sum_\lambda \varepsilon_\mu(\lambda) \varepsilon_\nu(\lambda)^* \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_X \langle p_a | J^\mu | p_X \rangle \langle p_X | J^\nu | p_a \rangle^* (\sqrt{2}\pi)^\xi \delta^\xi(\varepsilon + p_a - p_X)}_{\equiv W^{\mu\nu}} \quad (179)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{tot}}^{\gamma^*} = \frac{\xi \pi^\xi \alpha}{K} \sum_\lambda \varepsilon_\mu(\lambda) \varepsilon_\nu(\lambda)^* W^{\mu\nu} \quad (179)$$

توجه کنید که  $W^{\mu\nu}$  همان تانسور پراکندگی ناکثسان  $e-p$  است و پیش‌تر آن را برحسب توابع ساختار  $W_1$  و  $W_2$  پارامتری کردیم. حالا می‌توان سطح مقطع کل فوتون عرضی و فوتون اسکالر را برحسب توابع ساختار  $W_1$  و  $W_2$  نوشت. بیاد بیاورید که

$$\frac{1}{\sqrt{2} m_p} W^{\mu\nu} = \left[ -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] W_1 + \frac{1}{m_p^2} \left[ \left( p_a^\mu - \frac{q \cdot p_a}{q^2} q^\mu \right) \left( p_a^\nu - \frac{q \cdot p_a}{q^2} q^\nu \right) \right] W_2 \quad (180)$$

است. با استفاده از رابطه‌ی (170) برای  $\varepsilon^\mu(\lambda=0)$ ، رابطه‌ی (180) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{\sqrt{2} m_p} W^{\mu\nu} = \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) W_1 + \frac{\varepsilon^\mu(\circ) \varepsilon^\nu(\circ)}{\eta^2 m_p^2} W_2 \quad (181)$$

در نتیجه،

$$\sigma_{\text{tot}}^{\gamma^*} = \frac{\Lambda m_p \pi^\xi \alpha}{K} \sum_\lambda \varepsilon_\mu(\lambda) \varepsilon_\nu(\lambda)^* \left[ \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) W_1 + \frac{\varepsilon^\mu(\circ) \varepsilon^\nu(\circ)}{\eta^2 m_p^2} W_2 \right] \quad (182)$$

<sup>◇</sup> Hand

[0] L. N. Hand, Phys. Rev. **129**, 1834, 1963.

از طرفی داریم

$$\varepsilon_\mu(\pm 1)\varepsilon^\mu(\circ) = \circ, \quad \varepsilon_\mu(\pm 1)g^{\mu\nu}\varepsilon_\nu(\pm 1)^* = -1 \quad (183)$$

بنابراین

$$\sigma_T^{\gamma*}(\lambda = \pm 1) = \frac{\Lambda m_p \pi^\gamma \alpha}{K} \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)^* \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^\gamma} \right) W_\gamma = \frac{\Lambda m_p \pi^\gamma \alpha}{K} W_\gamma \quad (184)$$

$$\begin{aligned} \sigma_L^{\gamma*} &= \frac{\Lambda m_p \pi^\gamma \alpha}{K} \left[ \varepsilon_\mu(\circ)\varepsilon_\nu(\circ)^* \left( -g^{\mu\nu} W_\gamma + \frac{\varepsilon^\mu(\circ)\varepsilon^\nu(\circ)}{\eta^\gamma m_p^\gamma} W_\gamma \right) \right] \\ &= \frac{\Lambda m_p \pi^\gamma \alpha}{K} \left( -W + \frac{1}{\eta^\gamma m_p^\gamma} \right) W_\gamma = \frac{\Lambda m_p \pi^\gamma \alpha}{K} \left[ \left( 1 + \frac{v^\gamma}{Q^\gamma} \right) W_\gamma - W_\gamma \right] \end{aligned} \quad (185)$$

از این دو رابطه می‌توان شرط مثبت بودن  $W_\gamma$  و  $W_\gamma$  را فهمید. یعنی

$$W_\gamma \geq \circ, \quad \left( 1 + v^\gamma/Q^\gamma \right) W_\gamma - W_\gamma \geq \circ \quad (186)$$

ترکیب  $(1 + v^\gamma/Q^\gamma)W_\gamma - W_\gamma$  در سطح مقطع برای  $\lambda = \circ$  را گاهی با  $W_L$  نشان می‌دهند.

$$W_L \equiv \left( 1 + v^\gamma/Q^\gamma \right) W_\gamma - W_\gamma \quad (187)$$

در ناحیه‌ای که قانون مقیاس‌پذیری برقرار است (یعنی در ناحیه‌ای که با افزایش  $Q^\gamma$  و  $v$ ،  $x = Q^\gamma/2m_p v$  محدود است) و

$$m_p W_\gamma \rightarrow F_\gamma \text{ و } v W_\gamma \rightarrow F_\gamma$$

$$\sigma_T^{\gamma*} \rightarrow \frac{\xi \pi^\gamma \alpha}{K m_p} F_\gamma \quad (188)$$

$$\sigma_L^{\gamma*} \rightarrow \frac{\xi \pi^\gamma \alpha}{K m_p} \frac{1}{2x} (F_\gamma - 2xF_\gamma) = \frac{\xi \pi^\gamma \alpha}{K m_p} F_L \quad (189)$$

در رابطه‌ی (189) جمله‌ی از مرتبه‌ی  $F_\gamma/v$  چشم‌پوشی شده است. بنابراین، رابطه‌ی کالان-گراس،  $2xF_\gamma = F_\gamma$  با

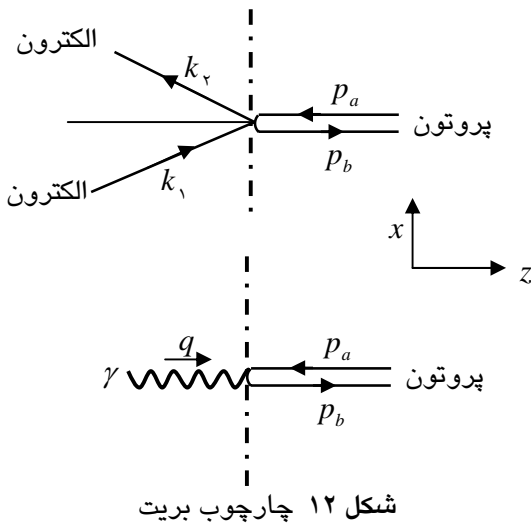
$$\frac{\sigma_L^{\gamma*}}{\sigma_T^{\gamma*}} \rightarrow \circ \quad (190)$$

متناظر است.

نتیجه‌ی بالا وقتی برقرار است که اسپین ذره‌ی هدف  $s = \frac{1}{2}$  است. اگر اسپین هدف  $s = \circ$  باشد، پراکندگی مغناطیسی نخواهیم داشت و در نتیجه،  $F_\gamma = \circ$  یا به طور هم‌ارز  $\sigma_T^{\gamma*}/\sigma_L^{\gamma*} \rightarrow \circ$  میل می‌کند که برعکس رابطه‌ی (190) است. هر دوی این نتیجه‌ها را می‌توان با در نظر گرفتن هلیسیتی‌های پارتون و فوتون در چارچوب بریت (یا چارچوب دیوار آجر) فهمید.

• چارچوب بریت چارچوبی است که فوتون و پارتون در یک راستا حرکت می‌کنند و پس از برخورد سه تکانه‌ی پارتون دقیقاً وارون می‌شود. این وضعیت در شکل (12) نشان داده شده است.

حرکت الکترون را در صفحه‌ی  $x-z$  فرض کنید. در اثر برخورد فقط مولفه‌ی  $z$  تکانه‌ی الکترون تغییر می‌کند و  $p_x$  آن بدون تغییر می‌ماند. به بیان دیگر، به هدف انرژی منتقل نمی‌شود، فقط تکانه‌ی پس‌زنی به هدف داده می‌شود. پارتون هدف (یا پارتون‌های درون آن) از سوی  $+z$  می‌آید (در جهت  $-z$  حرکت می‌کند) و با جذب تکانه‌ی پس‌زنی، در راستای  $+z$  پس زده می‌شود. در این چارچوب حرکت پارتون و الکترون به گونه‌ای است که انگار با دیوار سختی برخورد می‌کنند.



شکل ۱۲ چارچوب بریت

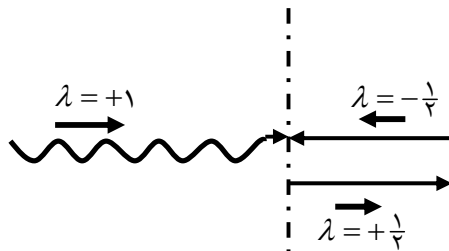
در این چارچوب، فوتونی که پیش از برخورد در راستای  $+z$  حرکت می‌کند، توسط پروتون جذب می‌شود.

اگر اسپین هدف (پارتون) صفر باشد و فوتون فرودی عرضی باشد ( $s_z = \pm 1$ ) داشته باشد، پارتون نمی‌تواند فوتون را جذب کند و  $\sigma_T^{\gamma^*} = 0$  می‌شود. این را پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای کل سامانه دیکته می‌کند. فهمیدن این رفتار ساده است: با پارتون بدون اسپین، تکانه‌ی کل پیش از برخورد  $\pm 1$  واحد در راستای  $z$  است (که فوتون حمل می‌کند). پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای لازم می‌دارد که پس از برخورد هم تکانه‌ی زاویه‌ای کل  $\pm 1$  باشد. پس از برخورد فوتون دیگر وجود ندارد (جذب هدف شده است) و هدف با اسپین صفر نمی‌تواند تکانه‌ی زاویه‌ای  $\pm 1$  فوتون را جذب کند (چون ذره‌ی بدون اسپین است). پس،

پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای لازم می‌دارد که  $\sigma_T^{\gamma^*} = 0$  باشد. فوتون اسکالر یا طولی با  $s_z = 0$  این دشواری را ندارد. پارتون بدون اسپین می‌تواند آن را جذب کند و هنوز هم بدون اسپین باقی بماند بنابراین، فقط  $\sigma_L^{\gamma^*} \neq 0$  است. در نتیجه، در برهم‌کنش فوتون با هدف اسپین صفر  $\sigma_T^{\gamma^*} / \sigma_L^{\gamma^*} \rightarrow 0$  می‌شود.

اگر اسپین هدف (پارتون)  $s = \frac{1}{2}$  باشد، وضعیت اندکی پیچیده‌تر است و به ویژگی‌های هلیسیتی در جفتش ( $\gamma_\mu$ ) پارتون و فوتون بستگی دارد.

در جفت شدگی  $\gamma_\mu$  برای ذره‌ی بدون جرم با اسپین  $\frac{1}{2}$  هلیسیتی پایسته می‌ماند (هلیسیتی یعنی تصویر بردار اسپین در راستای حرکت ذره). همان‌گونه که از شکل (۱۳) پیداست، در چارچوب بریت و با چشم‌پوشی از جرم پارتون، فوتون عرضی  $\pm 1$  واحد



هلیسیتی به پارتون با اسپین  $\frac{1}{2}$  و هلیسیتی  $\lambda = \mp \frac{1}{2}$  منتقل می‌کند. پارتون می‌تواند آن را جذب کند و با هلیسیتی  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$  در خلاف جهت فرودی برگردد. این سبب می‌شود که هلیسیتی هدف (پارتون) وارون بشود. بنابراین، جذب فوتون عرضی با پارتون اسپین  $\frac{1}{2}$  شدنی است. در شکل (۱۳) هلیسیتی کل پیش از برخورد  $+\frac{1}{2}$  و پس از برخورد هم  $+\frac{1}{2}$  است.

در چارچوب بریت، پایستگی هلیسیتی پارتون به این معنی است که تغییر

هلیسیتی کل، پیش از برخورد و پس از برخورد به مقدار  $\pm 1$  در راستای محور  $z$  فقط با فوتون عرضی شدنی است و فوتون

طولی یا اسکالر نمی‌تواند از عهده‌ی آن برآید. در نتیجه،  $\sigma_L^{\gamma^*} = 0$  و  $\sigma_T^{\gamma^*} \neq 0$  است. به بیان دیگر، چون سرشت برهم‌کنش

الکترومغناطیسی برداری است، دست‌آوردگی ذره‌ی بدون جرم را تغییر نمی‌دهد (یعنی اسپین آن باید وارون بشود). بنابراین، در وضعیت شکل (۱۳) اگر فوتون فرودی اسکالر باشد هلیسیتی کل پیش از برخورد  $+\frac{1}{2}$  و پس از برخورد  $\pm \frac{1}{2}$  خواهد شد. تغییر

هلیسیتی به اندازه‌ی  $\pm 1$  است. فوتون اسکالر با  $\lambda = 0$  نمی‌تواند از عهده‌ی این تغییر برآید و هلیسیتی کل پایسته نمی‌ماند. پس،

در حدی که جرم پارتون به صفر میل می‌کند،  $\sigma_L^{\gamma^*} \rightarrow 0$  میل می‌کند. نتیجه آن که در برهم‌کنش پارتون اسپین  $\frac{1}{2}$ ، با فوتون

$\sigma_L^{\gamma^*} / \sigma_T^{\gamma^*} \rightarrow 0$  می‌گراید.

تبدیل لورنتس از چارچوب بریت به چارچوب آزمایشگاه تاثیری در نسبت  $\sigma_T/\sigma_L$  ندارد. بنابراین، منشاء فیزیکی رابطه‌ی کلان-گراس روشن است. نتایج تجربی شکل (۱۴) نشان می‌دهد که اندازه‌ی نسبت  $R = \sigma_T/\sigma_L$  در گستره‌ی بزرگی (اگر نه در همه‌ی گستره) از پراکندگی ناکشسان ژرف کوچک است و نشان می‌دهد که اسپین پارتون‌های باردار که با فوتون برهم‌کنش می‌کنند،  $\frac{1}{2}$  است.

### ۳-۳ مدل پارتون: چارچوب تکانه بینهایت

بازیافت مدل پارتون در چارچوب تکانه بینهایت زیبایی‌های نطری خاصی را به همراه دارد و شایسته است که در اینجا به آن بپردازیم.

چارچوب تکانه بینهایت، چارچوبی است که در آن تکانه پروتون هدف بینهایت است. چارچوب مرکزجرم الکترون-پروتون در انرژی‌های زیاد تقریب خوبی برای این چارچوب است.

#### ۳-۳-۱ تقریب ضربه‌ای\*

فرض کنید نوکلئون مجموعه‌ای از ذره‌های نقطه‌ای (پارتون‌ها) است و سطح مقطع پراکندگی جمع سطح مقطع پراکندگی پارتون‌هاست. این تقریب ضربه‌ای است. پارتون‌ها را با  $q_i$  نشان دهید. تقرب ضربه‌ای به معنی

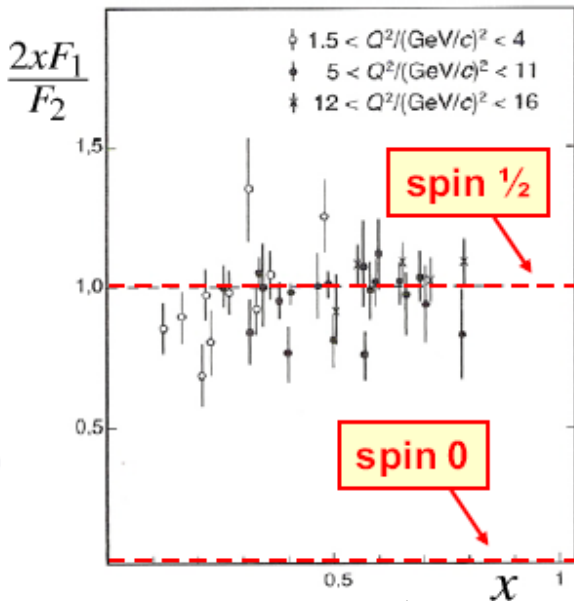
$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{eN} = \sum_i \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{eq_i} \quad (191)$$

است. این یک جمع ناهمدوس است. جمع بستن بر روی تک رویدادهای پراکندگی لازم می‌دارد که هر فرایند پراکندگی مستقل از بقیه باشد و در نتیجه، بر روی پراکندگی‌های دیگر تاثیر نداشته باشد. اگر این فرض (فرض تقریب ضربه‌ای) بخواهد برقرار باشد، باید زمان برهم‌کنش  $\tau$  در مقایسه با زمان  $T$  که بقیه‌ی پارتون‌ها با فوتون برهم‌کنش نمی‌کنند و حالت میانی را در شکل (۱۵) می‌سازند، خیلی کوچک باشد.

$$\tau \ll T \quad (192)$$

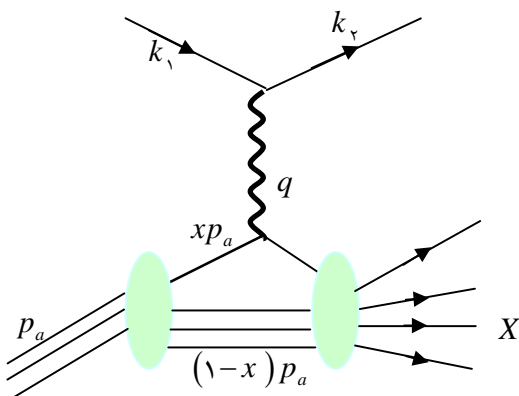
این زمان‌ها را می‌توانیم حساب کنیم.

پارتونی که در برهم‌کنش شرکت می‌کند، در درون نوکلئون است و در نتیجه، با بقیه‌ی پارتون‌ها برهم‌کنش می‌کند. عامل این



شکل ۱۴ نسبت  $2xF_1/F_2$

From Perkins, D. Introduction to high Energy Physics, 3<sup>rd</sup> ed. Addison-Wesley Publication Co.



شکل ۱۵ سینماتیک پراکندگی ep در مدل پارتون

\* Impulse Approximation



برهمکنش نیرویی است که بین پارتون‌ها وجود دارد. وقتی پارتونی در درون نوکلئون حرکت می‌کند، نیروی پساری به بقیه‌ی پارتون‌ها منتقل می‌کند. زمان پسار از مرتبه‌ی وارون انرژی بستگی پارتون است ( $\Delta t \sim \hbar/\Delta E_B$ ). بنابراین

$$T = \frac{1}{E_B} \approx \frac{1}{E_{\text{free}} - E_{\text{tot}}} > \frac{1}{m_p} \quad (193)$$

که در آن  $E_B$  انرژی بستگی پارتون است (یعنی مقدار انرژی که برای آزاد کردنش از قید بقیه‌ی پارتون‌ها لازم است. اندازه‌ی انرژی بستگی حداکثر ممکن است جرم  $m_p$  نوکلئون باشد. این انرژی اندکی نیست، اما مقدار ثابتی است و با افزایش انرژی نوکلئون،  $E = \sqrt{p^2 + m_a^2}$ ، افزایش پیدا نمی‌کند. از دید الکترون فرودی، نوکلئون پر انرژی در اثر انقباض لورنتس، به صورت یک صفحه‌ی بیضی‌وار نازک دیده می‌شود. ضریب انقباض آن  $\gamma \approx m_a/E$  است.

زمان برهمکنش،  $\tau$ ، را می‌توان مدتی پنداشت که الکترون در درون نوکلئون سپری می‌کند یا از درون آن می‌گذرد. در چارچوب سکون، ابعاد نوکلئون حدود  $1/m_\pi$  است. بنابراین زمان برهمکنش (زمانی که الکترون مجال دارد با پارتون برهمکنش کند)

$$\tau \approx \frac{1}{\gamma} \frac{1}{m_\pi} = \frac{1}{m_\pi} \frac{m_p}{E} \quad (194)$$

است. در نتیجه، به ازای انرژی‌های زیاد نوکلئون  $6,3 \text{ GeV} \sim m_p^2/m_\pi \gg E$  خواهیم داشت

$$\tau \ll T \quad (195)$$

و در این انرژی‌ها تقریب ضربه‌ای پذیرفتنی خواهد بود.

بگذارید شرط (۱۹۵) را برجسب متغیرهای پارتون بنویسیم. چون انقباض لورنتس وجود دارد، تکانه‌ی طولی  $p_{a\parallel}$  نوکلئون خیلی از تکانه‌ی عرضی  $p_{a\perp}$  آن بزرگتر است. بنابراین، تکانه‌ی طولی  $p_{i\parallel}$  پارتون  $i$  باید از تکانه‌ی عرضی  $p_{i\perp}$  آن خیلی بزرگتر باشد. در واقع،  $\langle p_{a\perp} \rangle \approx p_{i\perp} \gg p_{i\parallel}$  است که  $\langle p_{a\perp} \rangle$  میانگین تکانه‌ی عرضی نوکلئون است. مقدار آن ( $\sim 230 \text{ MeV}/c$ ) [۶]

را می‌توان از توزیع تکانه‌ی عرضی ذره‌های تولید شده در پراکندگی  $p-p$  حساب کرد. وقتی الکترون با پروتون برخورد می‌کند، پروتون برانگیخته می‌شود و به حالت مجازی با جرم  $W$  می‌رود. وارون مقدار انرژی که به نوکلئون منتقل می‌شود،

سنجه‌ای برای زمان برهمکنش است و برابر است با

$$\frac{1}{\tau} \sim q^0 \sim \sqrt{p^2 + W^2} - \sqrt{p^2 + m_p^2} \sim p \left( 1 + \frac{W^2}{2p^2} \right) - p \left( 1 + \frac{m_p^2}{2p^2} \right) \sim \frac{W^2 - m_p^2}{2p} = \frac{2m_a v - Q^2}{2p} \quad (196)$$

برای رسیدن به تساوی آخر، مسئله‌ی ۲ را ببینید. از طرفی، اگر تکانه‌ی طولی پارتون کسر  $x$  از تکانه‌ی طولی نوکلئون باشد،

یعنی  $p_{i\parallel} = x_i p_{a\parallel}$  باشد، در بازه زمانی که یک پارتون را می‌توان در نوکلئون آزاد پنداشت، عبارت خواهد بود از

$$\frac{1}{T} \sim \Delta E = \sqrt{p_a^2 + m_p^2} - \left\{ \sqrt{(x_i p_{i\parallel})^2 + p_{i\perp}^2 + \mu_i^2} + \sum_{i \geq 2} \sqrt{(x_i p_{i\parallel})^2 + p_{i\perp}^2 + \mu_i^2} \right\} \quad (197)$$

که در آن  $\mu_i$  جرم پارتون  $i$  ام است و زیرنویس ۱ مربوط به پارتونی است که با الکترون برخورد می‌کند. اگر انرژی نوکلئون بینهایت باشد (یا به تقریب از مقداری که شرط رابطه‌ی (۱۹۵) لازم دارد) می‌توان فرض کرد که همه‌ی پارتون‌ها در همان جهتی

حرکت می‌کنند که نوکلئون حرکت می‌کند (یعنی  $x_i > 0$ ). برای این که  $\Delta E$  را حساب کنیم جمله‌های سمت راست رابطه‌ی

(۱۹۷) را بسط بدهید از رابطه‌های زیر استفاده کنید

[۶] A.M.Rossi et al., Nucl. Phys. B, 84:269 (1975)

$$0 < x_i < 1, \quad \sum_i x_i = 1$$

$$\sqrt{(x_i p_{i\parallel})^2 + p_{i\perp}^2 + \mu_i^2} = x_i p_{a\parallel} + \frac{p_{i\perp}^2 + \mu_i^2}{2x_i p_a}; \quad \sqrt{p_a^2 + m_p^2} = p_a + \frac{m_p^2}{2p_a} \quad (198)$$

در نتیجه، خواهیم داشت

$$\Delta E \sim \frac{1}{2p_a} \left[ m_p^2 - \sum_i \left( \frac{p_{i\perp}^2 + \mu_i^2}{2x_i} \right) \right] \quad (199)$$

این رابطه نشان می‌دهد که تقریب ضربه‌ای برای  $x_i \rightarrow 0$  و  $x_i \rightarrow 1$  پذیرفتنی نیست. سنجی پذیرفتنی بودن تقریب ضربه‌ای

$$1 \gg x_i \gg \mu/p_a, \quad p_{a\perp}/p_a \quad (200)$$

است. چارکنانه‌ی پارتون عبارت است از

$$p_i^\mu = \left( \sqrt{(x_i p_{a\parallel})^2 + p_{i\perp}^2 + \mu_i^2}, p_{i\perp}, x_i p_{a\parallel} \right) \quad (201)$$

که با توجه به شرطهای رابطه‌ی (200) می‌توان با  $p_i^\mu \approx x_i p_a^\mu$  تقریب زد. با استفاده از شرط این که پیش از پراکندگی و پس

از آن، پارتون ذره‌ی آزاد است ( $p_i^2 = \mu_i^2$ ، شکل ۱۶ را ببینید)،

خواهیم داشت

$$\mu_i^2 = (x_i p_a)^2 = (x_i p_a + q)^2 \quad (202)$$

$$\Rightarrow x \equiv x_i = -\frac{q^2}{2(p_a \cdot q)} = \frac{Q^2}{2m_p \nu} \quad (203)$$

بنابراین، شرط برقراری تقریب ضربه‌ای عبارتند از

$$E \gg m_p, \quad Q^2 \gg m_p^2, \quad 2m_p \nu \gg m_p^2 \quad (204)$$

$$0 < x = \frac{Q^2}{2m_p \nu} < 1 \quad (205)$$

و البته این‌ها همان شرطهایی است که برای مقیاس‌پذیری بیورکن وجود دارد. هر فرایند پراکندگی که در این شرطها صدق کند، پراکندگی ناکشسان ژرف است. چارچوب مختصاتی که این شرطها در آن برقرار است، چارچوب تکانه بینهایت ( $p_\infty$ ) است.

### ۳-۳-۲ پراکندگی الکترون-پروتون

• متغیرهای مقیاس‌پذیری پارتون نامی عمومی برای کوارک و گلوئون است. گلوئون بار الکتریکی ندارد و در برهم‌کنش الکترومغناطیسی شرکت نمی‌کند. بنابراین، منظور ما از پارتون در پراکندگی الکترون-پروتون، کوارک است. جرم پارتون را  $\mu$  و بار الکتریکی آن را  $q_i = e_i e$  (در یکای بار الکترون) بنامید. سطح مقطع پراکندگی الکترون-پروتون در چارچوب آزمایشگاه (چارچوب سکون پارتون) همان سطح مقطع پراکندگی الکترون-میون رابطه‌ی (۱۳۷) با جایگزینی‌های  $m_\mu \rightarrow \mu$  و  $e \rightarrow e_i \alpha$  است. خواهیم داشت

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{eq, Lab} = \left( \frac{e_i^2 \alpha^2}{\epsilon E^2 \sin^2 \theta/2} \right) \frac{E'}{E} (\cos^2 \theta/2) \left\{ 1 - \frac{q^2}{2m_\mu^2} \tan^2 \theta/2 \right\} \quad (206)$$

واقعیت این است که پارتون در درون نوکلئون و تکانه‌ی نسبی آن  $x = Q^2 / 2m_p v$  است. بنابراین، باید متغیرهای ناوردای لورنتس را تعریف و رابطه‌ی (۲۰۶) را برحسب آنها بازنویسی کنیم. نخست نشان می‌دهیم که متغیرهایی که تاکنون در چارچوب به کار بردیم، در واقع متغیرهای ناوردای لورنتس اند. در حد انرژی‌های بالا که  $E \gg m_a$  است، از جرم الکترون و پروتون می‌توان چشم‌پوشی کرد. در این حد، رابطه‌های زیر در چارچوب آزمایشگاه برقرارند:

$$s \equiv (k_\nu + p_a)^\nu \approx 2(k_\nu \cdot p_a) = 2(E, \mathbf{k}_\nu) \cdot (m_p, \mathbf{0}) = 2Em_p \quad (207)$$

$$y \equiv \frac{(p_a \cdot q)}{(p_a \cdot k_\nu)} = \frac{(m_p, \mathbf{0}) \cdot (E - E', \mathbf{q})}{(m_p, \mathbf{0}) \cdot (E, \mathbf{k}_\nu)} = \frac{E - E'}{E} = \frac{v}{E} = \frac{2m_p v}{s} \quad (208)$$

$$x \equiv \frac{Q^2}{2m_p v} = \frac{Q^2}{sy} = \frac{s(1-y)\sin^2(\theta/2)}{m_p^2 y} \quad (209)$$

$$\sin^2(\theta/2) = \frac{m_p^2 xy}{s(1-y)}, \quad \cos^2(\theta/2) = 1 - \frac{m_p^2 xy}{s(1-y)} \approx 1 \quad (210)$$

بنابراین، دیده می‌شود که متغیرهای چارچوب آزمایشگاه  $(E, v, \theta)$  و غیره را می‌توان برحسب متغیرهای ناوردای لورنتس  $(s, x, y)$  نوشت. روشن است که

$$0 < \frac{Q^2}{2m_p v} (=x) < 1, \quad 0 < \frac{2m_p v}{s} (=y) < 1 \quad (211)$$

#### • توابع توزیع پارتونها

در چارچوب آزمایشگاه و در پراکندگی کشسان ( $x = 1$ )  $\theta$  و  $E'$  متغیر مستقل نیستند و با رابطه‌ی زیر به یکدیگر مربوط اند.

$$v = \frac{Q^2}{2m_p} = \frac{EE'}{m_p} (1 - \cos \theta) \quad (212)$$

اگر متغیرها را در چارچوب مرکز جرم با ستاره نشان دهیم، متغیر  $y$  در چارچوب مرکز جرم به صورت زیر درمی‌آید

$$y = \frac{p_a \cdot q}{p_a \cdot k_\nu} = \frac{E_p^* (E^* - E'^*) - (-k_\nu^*) \cdot (k_\nu^* - k_\nu'^*)}{E_p^* E^* - (-k_\nu^* \cdot k_\nu'^*)} \approx \frac{1 - \cos \theta^*}{2} \quad (213)$$

که در آن  $E_p^*$  انرژی پروتون در چارچوب مرکز جرم است. در نتیجه،

$$\frac{d\sigma}{dy} = E \frac{d\sigma}{dE'} \Big|_{\text{Lab}} = \frac{\epsilon \pi m_p^2}{s(1-y)^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{Lab}} = \epsilon \pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{CM}} \quad (214)$$

این رابطه برای پراکندگی دو ذره  $\leftarrow$  دو ذره با جرم هدف  $m_p$  برقرار است. وقتی آن را برای پراکندگی الکترون-پارتون به کار می‌بریم باید از جایگزینی‌های  $m_p \rightarrow \mu$ ,  $s \rightarrow s_q = (k_\nu + p_q)^\nu$  استفاده کنیم. با توجه به این که در پراکندگی کشسان

$$Q^2 = 2\mu v = s_q y \quad (215)$$

است، رابطه‌ی (۲۰۶) را می‌توان بازنویسی کرد. به دست می‌آید

$$\frac{d\sigma}{dy} \Big|_{\text{eq}} = \frac{\epsilon \pi e_i^2 \alpha^2}{Q^2} s_q \left[ (1-y) + \frac{y^2}{2} \right] \quad (216)$$

چون تکانه‌ی پارتون در نوکلئون برابر  $x p_a$  است،  $s_q$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$s_q = (k_\perp + x p_a)^2 = k_\perp^2 + x^2 p_a^2 + 2x (k_\perp \cdot p_a) \approx xs \quad (217)$$

اگر تابع توزیه تکانه‌ی پارتون  $i$  ام را در نوکلئون  $q_i(x)$  بنامیم، احتما یافتن پارتونی با تکانه‌ی بین  $x$  و  $x+dx$  برابر  $q_i(x) dx$  خواهد بود. بنابراین، سطح مقطع پراکندگی الکترون از پارتون  $i$  ام در درون نوکلئون برابر است با

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{\epsilon\pi\alpha^2}{Q^4} s \left[ (1-y) + \frac{y^2}{2} \right] e_i^2 x q_i(x) dx \quad (218)$$

حال اگر بر روی همه‌ی پارتون‌ها جمع ببندیم، سطح مقطع پراکندگی الکترون- نوکلئون به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2\sigma}{dydx} = \frac{\epsilon\pi\alpha^2}{Q^4} s \left[ (1-y) + \frac{y^2}{2} \right] \sum_i e_i^2 x q_i(x) dx \quad (219)$$

در این رابطه، سطح مقطع پراکندگی حاصلضرب دو بخش است که یکی شامل فقط  $y$  و دیگری شامل فقط  $x$  است. با این رابطه، سطح مقطع پراکندگی کشسان الکترون- پروتون را به صورت جمع سطح مقطع‌های پراکندگی الکترون- کوآرک نوشتیم. پارتون‌ها به طور کشسان از الکترون پراکنده شده‌اند، اما پارتون‌های پراکنده شده به تنهایی مشاهده پذیر نیستند. کوآرک‌ها (پارتون‌ها) محصورند. وقتی از نوکلئون بیرون رانده می‌شوند به صورت پایون‌ها و هادرون‌های دیگر دیده می‌شوند. آنها هادونیزه\* می‌شوند. با این حال، ویژگی‌های پراکندگی کشسان الکترون- پارتون را با مشاهده‌ی رفتار فقط الکترون می‌توان به دست آورد. رابطه‌ی (218) فقط برحسب متغیرهای الکترون است و آنها را می‌توان در آزمایش اندازه گرفت. برای پراکندگی ناکشسان هم می‌توان همین کار را تکرار کرد و رابطه‌ی عمومی (126) را برحسب  $x$  و  $y$  نوشت. به دست می‌آید (مسئله‌ی 3 را ببینید):

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dydx} \right|_{ep \rightarrow eX} = \frac{\epsilon\pi\alpha^2}{Q^4} s \left[ vW_\perp (1-y) + 2xm_p \frac{y^2}{2} W_\parallel \right] \quad (220)$$

در حد مقیاس‌پذیری  $vW_\perp \rightarrow F_\perp(x)$  و  $m_p W_\parallel \rightarrow F_\parallel(x)$  رابطه‌ی بالا به شکل زیر درمی‌آید

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dydx} \right|_{ep \rightarrow eX} = \frac{\epsilon\pi\alpha^2}{Q^4} s \left[ F_\perp(x)(1-y) + 2x \frac{y^2}{2} F_\parallel(x) \right] \quad (221)$$

اگر رابطه‌های (221) و (219) را باهم مقایسه کنیم، می‌بینیم که در مدل کوآرک- پارتون توابع ساختار عبارتند از

$$F_\perp(x) = x \sum_i e_i^2 q_i(x) \quad (222)$$

$$F_\parallel(x) = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 q_i(x) \quad (223)$$

بنابراین، ثابت کردیم که اگر پراکندگی ناکشسان  $e-p$  را جمع پراکندگی‌های کشسان  $e-q$  در نظر بگیریم، توابع ساختار  $vW_\perp(Q^2, v)$  و  $m_p W_\parallel(Q^2, v)$  که هر یک تابعی از دو متغیر مستقل اند، در حد مقیاس‌پذیری به توابعی فقط از یک متغیر،  $x = Q^2/2m_p v$ ، کاهش می‌یابند. مقیاس‌پذیری بیورکن، گواه دارای ساختار بودن هادرون‌هاست و اندرون‌های آنها ذره‌های نقطه‌ای است. ما هم‌چنین توانستیم برای توابع ساختار در حد مقیاس‌پذیری بیورکن، توصیف فیزیکی بیابیم: توابع ساختار توزیع تکانه‌ی پارتون‌ها در نوکلئون اند.

\* Hadronization