

مروری بر جنبه‌هایی از دره‌متنیدگی در نظریه میدان‌های کوانتومی

علی م‌لاباشی

† موسسه فیزیک نظری یوکاوا، دانشگاه کیوتو، ژاپن
پژوهشکده فیزیک، پژوهشگاه دانشهای بنیادی، ایران

چکیده

در این درسنامه مروری بسیار گذرا بر دره‌متنیدگی در نظریه میدان‌های کوانتومی با تمرکز بر روی نظریه میدان‌های منسجم ۲-بعدی ارائه خواهد شد. ۱ عناوین مطالب مرور شده در این درسنامه عبارتند از:

- ملاحظات عمومی در خصوص دره‌متنیدگی در نظریه میدان‌های کوانتومی موضعی،
- معرفی رهیافت‌های موسوم به زمان حقیقی و زمان اقلیدسی برای محاسبه‌ی سنجه‌های دره‌متنیدگی،
- دره‌متنیدگی ناحیه‌ی متصل در حالت خلا نظریه میدان‌های منسجم،
- تحول زمانی دره‌متنیدگی،
- دره‌متنیدگی نواحی منفصل در نظریه میدان‌های منسجم،
- دره‌متنیدگی در نظریه میدان‌های منسجم هولوگرافیک

فهرست مطالب

۲	۱ مقدمه‌ای بر دره‌متنیدگی در نظریه میدان‌های کوانتومی
۳	۱.۱ زمان حقیقی
۴	۲.۱ زمان اقلیدسی و نسخه‌های المثنی
۷	۲ دره‌متنیدگی در نظریه میدان‌های منسجم
۱۰	۳ تحول زمانی دره‌متنیدگی در نظریه میدان‌های منسجم
۱۰	۱.۳ فرونشانی حالت مرزی
۱۳	۲.۳ همزاد میدان گرمایی
۱۶	۴ دره‌متنیدگی دو حالت منفصل

^۱ این درسنامه برای تدریس در مدرسه «اطلاعات و گرانش کوانتومی» در پژوهشکده فیزیک در تابستان ۱۴۰۲ آماده شده است و مطالب مرور شده با توجه به زمان تدریس انتخاب شده است.

۱۷	۵ توابع چهار-نقطه‌ای و بالاتر در نظریه‌های هولوگرافیک
۱۸	۱.۵ روش monodromy و بلوکهای منسجم ویراسورو
۲۱	۲.۵ درهمتنیدگی نواحی منفصل
۲۳	۳.۵ تقریب سبک-سنگین
۲۵	۴.۵ رابطه بازگشتی زاملودچیکف

۱ مقدمه‌ای بر درهمتنیدگی در نظریه میدان‌های کوانتمی

سابقه‌ی مطالعه‌ی مفهوم درهمتنیدگی کوانتمی در نظریه میدان‌های کوانتمی به لحاظ تاریخی به مسئله‌ی ترمودینامیک سیاه‌چاله‌ها بازمی‌گردد. تصور غالب در اواخر دهه ۸۰ و اوایل دهه ۹۰ میلادی این بود که آنتروپی سیاه‌چاله‌ها نوعی آنتروپی فن-نویمن میان درجات آزادی داخل و خارج از افق سیاه‌چاله است [۱]. به عبارت دیگر اولین بار این مفهوم در چارچوب نظریه میدان‌های کوانتمی روی فضای خمیده مورد توجه قرار گرفت.^۲

در ادامه این مطالعات، ویژگی‌های آنتروپی فن-نویمن به‌خودی‌خود در چارچوب نظریه میدان‌های کوانتمی، فارغ از اثرات گرانشی، مورد مطالعه قرار گرفت و از یک سو در چارچوب نظریه میدان‌های منسجم و از سوی دیگر در چارچوب مطالعات ساختار درهمتنیدگی در حالت‌های مختلف در سامانه‌های بس-ذره‌ای، پیشرفت‌های بسیار مهمی در فهم این مفهوم در دهه اول قرن ۲۱ اتفاق افتاد. این پیشرفت‌های مهم در وجه مشترک فیزیک ماده چگال و فیزیک انرژی‌های بالا قرار می‌گرفت اما در سال ۲۰۰۶ همجوشی میان تناظر AdS/CFT با مفهوم آنتروپی سیاه‌چاله‌ها پارادایم این مطالعات را تغییر داد و مجدداً مفهوم گرانش به یکی از بازیگران اصلی فهم مفهوم درهمتنیدگی در چارچوب نظریه میدان‌های کوانتمی مبدل شد [۲].

پس از تغییر پارادایمی مذکور، یکی از مهم‌ترین پیشرفت‌ها در سال‌های اخیر در این حوزه فرمول‌بندی درهمتنیدگی کوانتمی به زبان جبر مشاهده‌پذیرها است که به جهاتی فرمول‌بندی انتزاعی‌تری به حساب می‌آید و علاوه بر ارائه‌ی فهم جدیدی از مفاهیم دانسته شده، دیدگاه‌های نوینی برای حل برخی مسائل از جمله مسئله پارادوکس اطلاعات ارائه می‌کند.

در این درسنامه‌ی بسیار کوتاه، صرفاً روی برخی از مهم‌ترین نتایجی که عمدتاً در چارچوب مطالعات نظریه میدان‌های منسجم حاصل شده است اشاره خواهد شد. انشالله در صورت ادامه این مدرسه در سال‌های آینده درسنامه‌های مکمل در این خط پژوهشی نگاشته خواهد شد.

کلیاتی در مورد درهمتنیدگی در نظریه میدان‌های کوانتمی

آنتروپی فن-نویمن در چارچوب نظریه میدان‌های کوانتمی معمولاً به یک ناحیه‌ی فضاگونه نسبت داده می‌شود. به عبارت دقیق‌تر اگر فضای هیلبرت کل به صورت $H = H_A \otimes H_{\bar{A}}$ باشد، آنتروپی فن-نویمن به آن دسته از درجات آزادی که در خمینه‌ی فضاگونه‌ی A محصور هستند نسبت داده می‌شود. این آنتروپی به صورت

$$S_A = -\text{Tr}_A [\rho_A \log \rho_A] \quad , \quad \rho_A \equiv \text{Tr}_{\bar{A}} \rho \quad (1)$$

تعریف می‌شود. در صورتی که ρ حالت خالص باشد، این کمیت آنتروپی درهمتنیدگی است و معیاری از درهمتنیدگی میان A و \bar{A} است. لازم به ذکر است که در صورتی که حالت ρ خالص نباشد همچنان این کمیت می‌تواند از جهات دیگری مورد توجه باشد.

^۲ بررسی جایگاه این دیدگاه در دانش امروزی مفصل است و فراتر از اهداف این درسنامه قرار می‌گیرد.

رفتار عمومی این کمیت در نظریه‌های d -بعدی به صورت

$$S(A) = \frac{g_{d-2}(\partial A)}{\epsilon^{d-2}} + \frac{g_{d-1}(\partial A)}{\epsilon^{d-1}} + \dots + g.(\partial A) \log \frac{\ell_A}{\epsilon} + S.(A) \quad (2)$$

است. در این بسط ϵ متناسب با عکس قطع فرابنفش نظریه و ℓ_A طول مشخصه‌ای از ناحیه‌ی A است و توابع g موضعی و هموار هستند. این بسط اطلاعات فراوانی را شامل می‌شود. جمله‌ی غالب در این بسط متناسب با سطح ناحیه‌ی درهمتنیدگی است. اگر بتوان قطع فرابنفش را به طول پلانک نزدیک کرد، آنگاه جمله‌ی غالب این بسط به آنتروپی بکنشتاین-هاوکینگ تبدیل می‌شود. این مشاهده‌ی ساده نشان می‌دهد اگر ارتباطی میان آنتروپی درهمتنیدگی و آنتروپی سیاه‌چاله‌ها وجود داشته باشد، این ارتباط مستلزم بازبنجارش آنتروپی درهمتنیدگی در حضور گرانش است.

اطلاعات بسیار مهم دیگر درخصوص این بسط این است که $g.(\partial A)$ مستقل از نحوه‌ی عادی‌سازی است و شامل اطلاعات **جهانشمول** است. این بخش آنتروپی تحت شارش گروه بازبنجارش به صورت مفصل مورد بررسی قرار گرفته است. بخش $S.(A)$ حاوی اطلاعات مهمی از جمله آنتروپی گرمایی است اما اطلاعات این جمله جهانشمول نیست.

تمرین: چرا بسط فقط توان‌های صحیحی از ϵ را شامل می‌شود؟ آیا این بسط می‌تواند شامل توان‌های غیر صحیح نیز باشد؟ چرا؟

تمرین: چرا جمله‌ی غالب بسط در نظریه میدان‌های موضعی متناسب با سطح ناحیه‌ی درهمتنیدگی است؟

تمرین: فرض کنید جمله‌ی غالب متناسب با سطح نباشد، بلکه مانند آنتروپی گیبس با جمله حجمی متناسب باشد، در این صورت استدلال کنید چرا این بسط نمی‌تواند با اصل هولوگرافی سازگار باشد.

برای مطالعه‌ی همه‌ی کمیت‌هایی که تابعی از ماتریس چگالی کاهش یافته ρ_A هستند، نیازمند این هستیم که طیف این عملگر را بشناسیم. مطالعه‌ی این طیف را گاهی از این حیث که در نشانگان لورنتسی یا اقلیدسی انجام شده باشد طبقه‌بندی می‌کنند. با توجه به ویژگی‌های نظریه میدان‌های منسجم ۲-بعدی، روشی که از زمان اقلیدسی استفاده می‌کند می‌تواند علی‌الاصول بسیار قدرتمند و منعطف باشد و عمده‌ی این درسنامه هم به این روش اختصاص دارد. اما در شرایط ساده می‌توان بدون اقلیدسی کردن زمان طیف این عملگر را مطالعه کرد که از باب کامل بودن این بحث زیربخش آتی به معرفی مختصر این رویکرد پرداخته خواهد شد. در شرایطی هم می‌توان طیف این عملگر را به صورت مستقیم از طریق مطالعه همیلتونی ماجولار به دست آورد که علی‌الاصول در هر دو نشانگان قابل مطالعه است و این حالت‌ها در این درسنامه بررسی نخواهد شد.

۱.۱ زمان حقیقی

اساساً ناظری که به بخشی از فضای هیلبرت یک نظریه دسترسی داشته باشد، بدین معنی که حالت سامانه در آن بخش را بداند، باید قادر باشد مقدار انتظاری هر عملگری که فقط روی همان بخش اثر می‌کند را محاسبه کند. این مقدار با مقداری که ناظری که به کل سامانه دسترسی دارد باید برابر باشد. به عبارت دقیق‌تر داریم

$$\langle \mathcal{O}_A \rangle = \text{Tr} [\rho_A \mathcal{O}_A] \quad (3)$$

که طرف چپ روی حالت کل سامانه (سطح کوشی) محاسبه شده و طرف راست روی زیربخش A که زیرمجموعه‌ای از یک سطح کوشی است. نکته‌ی کلیدی در مهم‌ترین حالت‌هایی که می‌توان محاسبه را در نشانگان لورنتسی پیش برد این است که اگر مقدار انتظاری هر عملگری روی A دانسته باشد، می‌توان ρ_A و طیف آنرا به صورت یکتا از روی توابع چند-نقطه‌ای به دست آورد. ساده‌ترین مثال نظریه‌های آزاد هستند که با استفاده از قضیه ویک می‌توان تمام توابع چند-نقطه‌ای آنها را بر حسب توابع دو-نقطه‌ای به دست آورد. در این حالت علی‌الاصول باید بتوان با دراختیار داشتن توابع دو-نقطه‌ای در ناحیه‌ی A طیف ρ_A را به صورت یکتا به دست آورد. این کار برای نظریه میدان‌های اسکالر و فرمیون آزاد به صورت استاندارد در مراجع مختلفی مرور

شده که خواننده علاقمند می‌تواند برای مثال به [۳] مراجعه کند.^۳

۲.۱ زمان اقلیدسی و نسخه‌های المثنی

روش المثنی^۴ به دلیل اینکه از فرمول‌بندی انتگرال‌مسیر استفاده می‌کند (که در زمان اقلیدسی تعریف می‌شود) به روش اقلیدسی مشهور است. به دلیلی که در ادامه خواهیم دید به این روش، روش المثنی^۵ نیز گفته می‌شود. در این روش محاسبه در نشانگان اقلیدسی انجام می‌شود و در نهایت (در مواردی غیر ایستا) ادامه‌ی تحلیلی نتیجه به زمان حقیقی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این روش برای محاسبه‌ی آنتروپی در همتندگی ابتدا آنتروپی‌های رنی^۶ محاسبه می‌شوند. در این نوشتار فارغ از اهمیتی که آنتروپی‌های رنی دارند، آنها را صرفاً به‌عنوان ابزاری برای محاسبه‌ی آنتروپی در همتندگی در روش المثنی در نظر می‌گیریم. آنتروپی رنی به‌ازی $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ به‌صورت

$$S_n(A) = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr} [\rho_A^n] \quad (۴)$$

تعریف می‌شوند. به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که آنتروپی در همتندگی به‌صورت زیر

$$S(A) = \lim_{n \rightarrow 1} S_n(A) \quad (۵)$$

به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر می‌توان نشان داد که

$$S_A = - \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial n} \text{Tr}[\rho_A^n] = - \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial n} \log \text{Tr}[\rho_A^n] \quad (۶)$$

تمرین: اثبات کنید در نظریه‌های ۲- بعدی ادامه تحلیلی $\text{Tr}[\rho_A^n]$ به n غیر صحیح یکتاست.

در ادامه‌ی این بخش روشی برای محاسبه‌ی ماتریس چگالی کاهش‌یافته در حالت خلاء در فرمالیزم انتگرال‌مسیر ارائه می‌شود. برای نوشتن تابعی موج حالت خلاء ابتدا روش متناظر را در مکانیک کوانتمی یادآور می‌شویم. در فرمالیزم انتگرال‌مسیر مکانیک کوانتمی دامنه‌ی گذار یک ذره با مختصات (x, \cdot) به (x, \circ) به‌صورت

$$\langle x, \cdot, t. | x, \circ \rangle = \int_{(x, \cdot, t.)}^{(x, \circ)} \mathcal{D}x(t) e^{iS(x)} \quad (۷)$$

داده می‌شود. از سوی دیگر می‌دانیم که

$$\langle x, \cdot, t. | x, \circ \rangle = \langle x. | e^{iHt.} | x \rangle. \quad (۸)$$

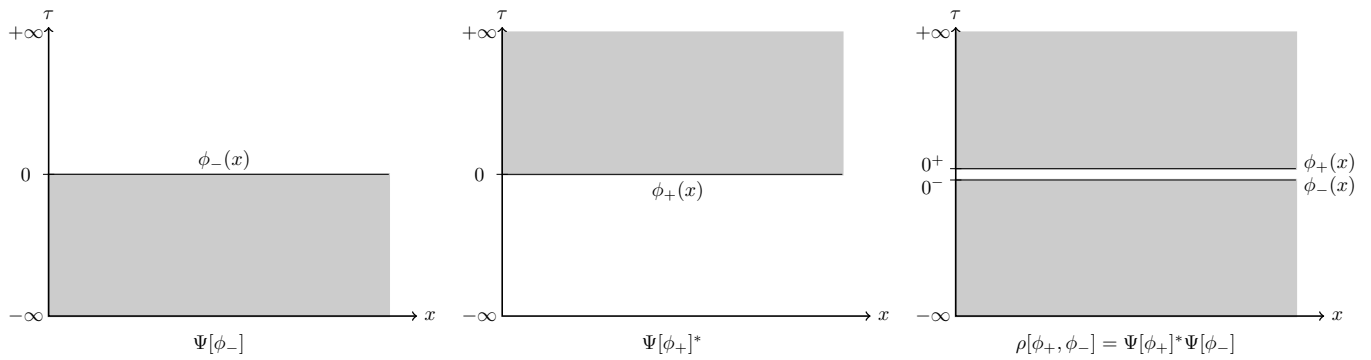
برای به‌دست آوردن تابع موج حالت خلاء تکنیک شناخته شده‌ای وجود دارد که شامل دو گام است. گام اول رفتن به زمان

^۳شایان ذکر است که این روش تعمیمی است از آنچه در ادبیات اطلاعات و اپتیک کوانتمی به سامانه‌های با متغیر پیوسته (continuous variable systems) نامیده می‌شود.

^۴این روش اولین بار در [۴] معرفی شده است.

^۵Replica

^۶Renyi



شکل ۱: روش ساختن تابعی موج (سمت چپ) و مزدوج مختلط آن (وسط) و ماتریس چگالی (سمت راست) در فرمالیزم انتگرال مسیر.

اقلیدسی به صورت $t \rightarrow i\tau$ که

$$\langle x, |e^{iHt} |x \rangle \rightarrow \langle x, |e^{-H\tau} |x \rangle \quad (9)$$

و گام دوم رفتن به حد $\tau \rightarrow \infty$ که در نتیجه‌ی آن

$$\langle x, |e^{-H\tau} |x \rangle \approx \langle x, |e^{-H\tau} |0 \rangle \langle 0 |x \rangle = \mathcal{Z}^{1/2} \psi.(x) \quad (10)$$

در این حد عملگر واحد (مجموعه‌ی کاملی از ویژه حالت‌های همیلتونی) را در سمت راست عملگر $e^{-H\tau}$ وارد کردیم ولی از آنجا که سهم حالت‌های با انرژی بالاتر از خلاء به صورت نمایی کوچک‌تر از سهم خلاء است در نهایت داریم

$$\psi.(x) = \mathcal{Z}^{-1/2} \int_{(x, -\infty)}^{(x, 0)} \mathcal{D}x(t) e^{-S_E(x)} \quad (11)$$

به صورت مشابه می‌توان در نظریه میدان کوانتومی می‌توان تابعی موج متناظر با حالت خلاء را به صورت زیر

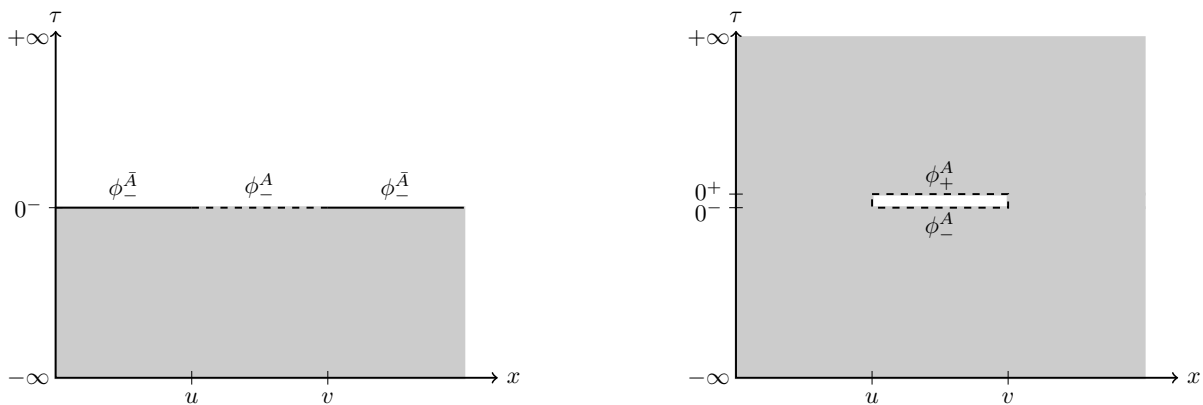
$$\Psi[\phi.(x)] = \mathcal{Z}^{-1/2} \int_{\phi(x, -\infty)=0}^{\phi(x, 0)=\phi.(x)} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} \quad (12)$$

بدین ترتیب می‌توان ماتریس چگالی متناظر با حالت خلاء را به صورت

$$\rho[\phi_+, \phi_-] = \Psi[\phi_+]*\Psi[\phi_-]$$

به دست آورد (شکل ۱ را ببینید). از آنجایی که هدف به دست آوردن ماتریس چگالی کاهش یافته است اندیس‌های ماتریس چگالی را به صورت

$$\phi_{\pm} = \phi_{\pm}^A \oplus \phi_{\pm}^{\bar{A}}$$



شکل ۲: روش ساختن ماتریس چگالی کاهش یافته در فرمالیزم انتگرال مسیر.

در نظر می گیریم. ابتدا شرط $\phi_+^{\bar{A}} = \phi_-^{\bar{A}} \equiv \phi^{\bar{A}}$ را اعمال می کنیم و روی $\phi^{\bar{A}}$ ها جمع می کنیم (شکل ۲ را ببینید)

$$\begin{aligned}
 \rho_A[\phi_+^A, \phi_-^A] &= \mathcal{Z}^{-1} \int \mathcal{D}\phi^{\bar{A}} \Psi[\phi_+^A \oplus \phi^{\bar{A}}] \Psi[\phi_-^A \oplus \phi^{\bar{A}}] e^{-S_E[\phi]} \\
 &= \mathcal{Z}^{-1} \int \mathcal{D}\phi^{\bar{A}} e^{-S_E[\phi]} \prod_{\vec{x} \in A} \delta(\phi_+^{\bar{A}} - \phi^{\bar{A}}) \delta(\phi_-^{\bar{A}} - \phi^{\bar{A}}) \\
 &\equiv \mathcal{Z}^{-1} \int_{\phi(x_A, \cdot^-) = \phi_-^A}^{\phi(x_A, \cdot^+) = \phi_+^A} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

حال که ماتریس چگالی کاهش یافته را ساخته ایم در قدم بعد توان های صحیح آن را می سازیم. این کار یک ضرب ماتریسی ساده است که به صورت زیر انجام می شود

$$\rho_A^n[\phi_1, \phi_2] = \int \mathcal{D}\phi_-^{(1)} \dots \mathcal{D}\phi_-^{(n-1)} \rho_A[\phi_1, \phi_-^{(1)}] \rho_A[\phi_-^{(1)}, \phi_-^{(2)}] \dots \rho_A[\phi_1, \phi_-^{(n-1)}] \rho_A[\phi_-^{(n-1)}, \phi_2]$$

که شرایط مرزی

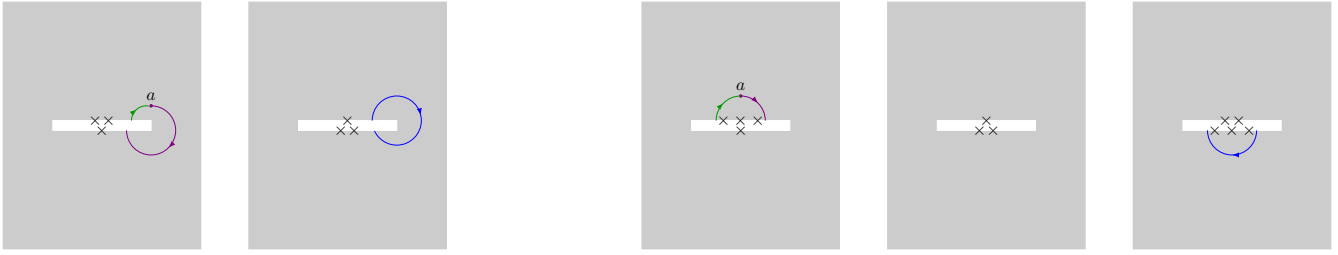
$$\phi_-^{(i)} = \phi_+^{(i+1)} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

در آن اعمال شده است. برای اینکه ردّ موجود فوق را حساب کنیم باید شرط

$$\phi_-^{(n)} = \phi_+^{(1)}$$

را اضافه کنیم لذا

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [\rho_A^n] &= \int \mathcal{D}\phi_-^{(1)} \dots \mathcal{D}\phi_-^{(n-1)} \mathcal{D}\phi_-^{(n)} \rho_A[\phi_-^{(n)}, \phi_-^{(1)}] \rho_A[\phi_-^{(1)}, \phi_-^{(2)}] \dots \rho_A[\phi_1, \phi_-^{(n-1)}] \rho_A[\phi_-^{(n-1)}, \phi_-^{(n)}] \\
 &\equiv \mathcal{N} \int_{\mathcal{R}_n} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} = \mathcal{N} \mathcal{Z}_n
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$



شکل ۳: ردّ توان‌های ۲ (چپ) و ۳ (راست) ماتریس چگالی کاهش یافته. روی شکل سمت چپ نشان داده شده که اگر روی خمینه‌ی $\mathcal{R}_n (= \mathcal{R}_2)$ شخصی بخواهد حول نقاط سر و ته ناحیه‌ی درهمتیدگی حرکت کند متوجه تکینگی می‌شود مثلاً اگر از نقطه‌ی a شروع به حرکت کند (مسیر بنفش رنگ) بعد از طی مسیر آبی و سبز نهایتاً مسافت $(= 4\pi) 2n\pi$ را طی کرده و به مکان اولیه‌ی اول خود می‌رسد. اما روی شکل نشان داده شده که اگر مسیری که طی می‌شود شامل نقاط سر و ته ناحیه‌ی درهمتیدگی نباشد بعد از طی 2π به نقطه‌ی اول خود می‌رسد و فضا را فضای موضعا تخت می‌بیند.

که خمینه‌ی \mathcal{R}_n با شرایط مرزی $\phi_-^{(i)} = \phi_+^{(i+1)}$ و $\phi_-^{(n)} = \phi_+^{(1)}$ تعریف می‌شود. ضریب بهنجارش در خط دوم عبارت فوق از شرط $\text{Tr}[\rho_A] = 1$ به دست می‌آید لذا

$$\text{Tr}[\rho_A^n] = \frac{Z_n}{Z_1^n} \quad (15)$$

نکته‌ی درخور توجه در مورد \mathcal{R}_n توپولوژی آن است. همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود این خمینه (در مورد نظریه میدان‌های ۲-بعدي) در دونقطه‌ی ابتدا و انتهای ناحیه‌ی A تکینگی مخروطی با نقص زاویه‌ی $2\pi(n-1)$ دارد و در سایر نقاط به صورت موضعی تخت است.

۲ درهمتیدگی در نظریه میدان‌های منسجم

نکته‌ی مهم در این بخش قابلیت محاسبه‌ی صریح طرف راست رابطه‌ی (۱۵) است. برای این محاسبه مختصه مختلط $z = x + iT$ را معرفی می‌کنیم. ایده‌ی اصلی این محاسبه این است که در حد اثرات غیربدهی که در امتداد برش ناحیه A می‌تواند وجود داشته باشد، نظریه‌ای که روی خمینه \mathcal{R}_n تعریف شده برابر است با نظریه‌ای که روی $\mathcal{R}_1 = \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ تعریف می‌شود اما در آن n کپی از میدان‌ها زندگی می‌کنند. این تصویر به نسخه‌های المثنی میدان‌ها مشهور است. اثرات غیربدهی مذکور هم چیزی نیستند جز میدان‌های پیچش که در مرزهای ناحیه‌ی A اعمال می‌شوند. به عبارت دقیق‌تر این دو تصویر به صورت زیر باهم مرتبط هستند

$$\langle \mathcal{O}^{(i)}(z, \text{sheet } i) \cdots \rangle_{\mathcal{L}, \mathcal{R}_n} = \frac{\langle \sigma_n(u, \bar{u}) \bar{\sigma}_n(v, \bar{v}) \mathcal{O}^{(i)}(z) \cdots \rangle_{\mathcal{L}_n, \mathcal{R}_1}}{\langle \sigma_n(u, \bar{u}) \bar{\sigma}_n(v, \bar{v}) \rangle_{\mathcal{L}_n, \mathcal{R}_1}} \quad (16)$$

که منظور از

$$\mathcal{L}_n[\phi_1, \cdots, \phi_n] = \mathcal{L}[\phi_1] + \cdots + \mathcal{L}[\phi_n]$$

و منظور از $\mathcal{O}^{(i)}(z, \text{sheet } i)$ عملگری است که روی نسخه‌ی i ام در \mathcal{R}_n اثر می‌کند و $\mathcal{O}^{(i)}(z)$ عملگر معادل آن در تصویر میدان‌های المثنی است. به عبارت دیگر

$$\mathcal{O}^{(i)}(z) = \mathbf{1}^{(1)} \otimes \mathbf{1}^{(2)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}^{(i)}(z, \text{sheet } i) \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}^{(n-1)} \otimes \mathbf{1}^{(n)}$$

و اثر میدان‌های پیچش به صورت $\sigma\phi_i = \phi_{i+1}$ و $\bar{\sigma}\phi_i = \phi_{i-1}$ است. میدان‌های پیچش میدان‌های اولیه هستند. برای تعیین وزن منسجم میدان‌های اولیه می‌توان به تابع یک-نقطه‌ای تانسور انرژی-تکانه روی \mathcal{R}_n (که با مختصه w نشان داده می‌شود) و \mathcal{R}_1 (که با مختصه z نشان داده می‌شود) نگاه کرد

$$\langle T(w) \rangle_{\mathcal{L}, \mathcal{R}_n} = \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^2 \langle T(z) \rangle_{\mathcal{L}, \mathcal{R}_1} + \frac{c}{12} \{z, w\} \quad (17)$$

که در آن $\{z, w\}$ مشتق شوارتزی است و با توجه به تقارن همسو $\langle T(z) \rangle_{\mathcal{L}, \mathcal{R}_1} = 0$. با استفاده از این نکته که این دو صفحه از طریق نگاشت

$$z = \left(\frac{w - u}{w - v} \right)^{\frac{1}{n}}$$

به هم مربوط هستند. می‌توان نشان داد که

$$\langle T(w) \rangle_{\mathcal{L}, \mathcal{R}_n} = \frac{c}{24} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{(u - v)^2}{(w - u)^2 (w - v)^2} \quad (18)$$

از طرف دیگر از ارتباط میان این دو تصویر می‌دانیم که

$$\frac{\langle T_n^{(i)}(w) \sigma_n(u, \bar{u}) \bar{\sigma}_n(v, \bar{v}) \rangle_{\mathcal{L}_n, \mathcal{R}_1}}{\langle \sigma_n(u, \bar{u}) \bar{\sigma}_n(v, \bar{v}) \rangle_{\mathcal{L}_n, \mathcal{R}_1}} = \frac{c}{24} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{(u - v)^2}{(w - u)^2 (w - v)^2} \quad (19)$$

و با توجه به اینکه در نظریه \mathcal{L}_n داریم $T_n = \sum_i T_n^{(i)}$ لذا

$$\frac{\langle T_n(w) \sigma_n(u, \bar{u}) \bar{\sigma}_n(v, \bar{v}) \rangle_{\mathcal{L}_n, \mathcal{R}_1}}{\langle \sigma_n(u, \bar{u}) \bar{\sigma}_n(v, \bar{v}) \rangle_{\mathcal{L}_n, \mathcal{R}_1}} = \frac{c}{24} \left(n - \frac{1}{n} \right) \frac{(u - v)^2}{(w - u)^2 (w - v)^2} \quad (20)$$

حال با مقایسه‌ی حد $w \rightarrow u$ در عبارت فوق با عبارت عمومی OPE تانسور انرژی-تکانه با میدان‌های اولیه می‌توان به‌سادگی مشاهده کرد که وزن منسجم میدان‌های پیچش (و پاد پیچش) عبارت است از

$$h_n = \bar{h}_n = \frac{c}{24} \left(n - \frac{1}{n} \right) \quad (21)$$

آنتروپی درهمتنیدگی در حالت خلا

پس از محاسبه فوق، با در اختیار داشتن تابع دو-نقطه‌ای به‌دست آوردن آنتروپی رنی کار نسبتاً ساده‌ای است.

$$\begin{aligned} S_n(A) &= \frac{1}{1-n} \log \frac{\mathcal{Z}[\mathcal{L}, \mathcal{R}_n]}{\mathcal{Z}[\mathcal{L}, \mathcal{R}_1]^n} \\ &= \frac{1}{1-n} \log \langle \sigma_n(u) \bar{\sigma}_n(v) \rangle_{\mathcal{L}_n, \mathcal{R}_1} + \text{const.} \\ &= \frac{c}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \log \frac{|u - v|}{\epsilon} \end{aligned} \quad (22)$$

در این رابطه ϵ ثابتی است که نقش قطع فرابنفش را بازی می‌کند. حد $1 \rightarrow n$ این رابطه خوش تعریف است که به نتیجه

$$S(A) = \frac{c}{\pi} \log \frac{|u-v|}{\epsilon} \quad (23)$$

برای آنتروپی درهمتنیدگی می‌انجامد. از آنجایی که این نتیجه صرفاً از روی رفتار تابع دو-نقطه‌ای به دست آمد برای هر نظریه میدان منسجمی معتبر است. نکته‌ی جالب این است که می‌توان با استفاده از تبدیلات همدریس (روی تابع دو-نقطه‌ای فوق) نتیجه را برای حالت دما دار و طول محدود نیز به دست آورد.

آنتروپی درهمتنیدگی در طول محدود

با استفاده از نگاشت $z = \frac{\beta}{\pi} \log w$ صفحه z به استوانه‌ی بینهایت به محیط قاعده β (که در جهت زمان اقلیدسی دوره‌ای است) نگاشت. با اعمال این نگاشت و با استفاده از

$$\begin{aligned} \langle \sigma(z_1, \bar{z}_1) \bar{\sigma}(z_2, \bar{z}_2) \rangle &= |w'(z_1)|^{h_n} |w'(z_2)|^{h_n} |\bar{w}'(\bar{z}_1)|^{\bar{h}_n} |\bar{w}'(\bar{z}_2)|^{\bar{h}_n} \langle \sigma(w_1, \bar{w}_1) \bar{\sigma}(w_2, \bar{w}_2) \rangle \\ &= |w'(z_1)|^{h_n} |w'(z_2)|^{h_n} |\bar{w}'(\bar{z}_1)|^{\bar{h}_n} |\bar{w}'(\bar{z}_2)|^{\bar{h}_n} \frac{1}{|w(z_1) - w(z_2)|^{2\Delta_n}} \\ &= \left(\frac{\beta}{\pi} e^{\frac{\pi \ell}{\beta}} \right)^{4h_n} \left(e^{\frac{\pi \ell}{\beta}} - 1 \right)^{4h_n} \\ &= \left(\frac{\beta}{\pi \epsilon} \sinh \frac{\ell \pi}{\beta} \right)^{-4h_n} \end{aligned} \quad (24)$$

می‌توان آنتروپی فن-نویمن را برای حالت دمایی به صورت

$$S_n(A) = \frac{c}{\epsilon} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \log \left[\frac{\beta}{\pi \epsilon} \sinh \frac{|u-v|\pi}{\beta} \right] \quad (25)$$

به دست آورد.

آنتروپی درهمتنیدگی در دمای محدود

با استفاده از نگاشت $w = \tan \frac{\pi z}{L}$ صفحه z به استوانه‌ی بینهایت به محیط قاعده L (که در جهت فضایی دوره‌ای است) نگاشت. با اعمال این نگاشت و با استفاده از

$$\begin{aligned} \langle \sigma(z_1, \bar{z}_1) \bar{\sigma}(z_2, \bar{z}_2) \rangle &= |w'(z_1)|^{h_n} |w'(z_2)|^{h_n} |\bar{w}'(\bar{z}_1)|^{\bar{h}_n} |\bar{w}'(\bar{z}_2)|^{\bar{h}_n} \langle \sigma(w_1, \bar{w}_1) \bar{\sigma}(w_2, \bar{w}_2) \rangle \\ &= \left(\frac{\pi}{L \cos \frac{\pi \ell}{L}} \right)^{4h_n} \left(\cot \frac{\pi \ell}{L} \right)^{4h_n} \\ &= \left(\frac{L}{\pi \epsilon} \sin \frac{\ell \pi}{L} \right)^{-4h_n} \end{aligned} \quad (26)$$

می‌توان آنتروپی فن-نویمن را برای حالت طول محدود

$$S_n(A) = \frac{c}{\epsilon} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \log \left[\frac{L}{\pi \epsilon} \sin \frac{|u-v|\pi}{L} \right] \quad (27)$$

تمرین: چرا در روابط بالا به ϵ نیاز داریم؟ تعبیر فیزیکی آن چیست؟
تمرین: با ادامه تحلیلی پارامترها نتایج دمای محدود و طول محدود را از روی یکدیگر به دست آورید.
تمرین: آیا می‌توان با روش مذکور نتایج روی چنبره را هم به دست آورد؟ چرا؟

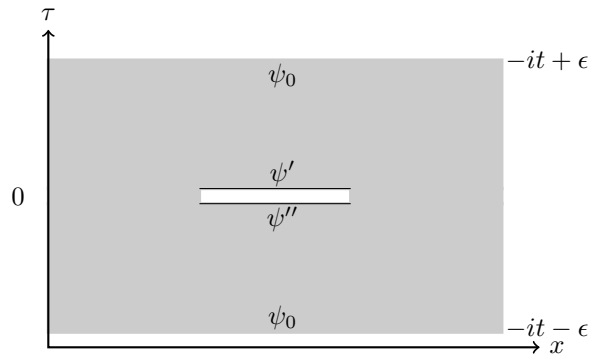
۳ تحول زمانی در همتیدگی در نظریه میدان‌های منسجم

آنچه تاکنون مورد بحث قرار گرفت در خصوص حالت‌های ایستا بود. سامانه‌های در حالت ایستا در تعادل ترمودینامیکی قرار دارند. تحول زمانی در همتیدگی از نقطه نظرهای مختلفی حائز اهمیت است. عموماً در طبیعت حالت‌هایی که در تعادل ترمودینامیکی باشند بسیار نادر هستند و از این نقطه نظر تحول زمانی در همتیدگی بسیار مهم است. از سوی دیگر مطالعه‌ی سامانه‌هایی که در تعادل سرتاسری ترمودینامیکی قرار ندارند با چالش‌هایی روبه‌روست که ابزارهای مطالعه‌ی در همتیدگی کوانتمی مسیر این مطالعات را هموار ساخته است. در چنین سامانه‌هایی که ممکن است هیچگاه به تعادل سرتاسری نرسند، ممکن است تعادل موضعی حاصل شود که مطالعه‌ی مسیر حصول این تعادل هم از طریق تحول زمانی در همتیدگی میسر است. در مثال حالت خلا مشاهده کردیم که در مواردی تقارن‌های سامانه به اندازه‌ای هستند که به رفتارهای جهانشمول منجر می‌شوند. از این نقطه نظر بررسی تحول زمانی و استخراج رفتارهای جهانشمول آن بسیار مورد توجه است. به‌طور طبیعی برای مطالعه‌ی نظری تحول زمانی در همتیدگی نیازمند ساده‌ترین چارچوب‌هایی هستیم که قابلیت مطالعه داشته باشند. در ادامه این بخش دو چارچوب استاندارد برای چنین مطالعاتی که به (۱) فرونشانی سرتاسری حالت مرزی و (۲) زایش در همتیدگی در حالت همزاد میدان دمای معروف هستند به‌صورت اجمالی معرفی خواهد شد.

۱.۳ فرونشانی حالت مرزی

فرونشانی کوانتمی مشهورترین پروتکل مطالعه‌ی تحول زمانی در همتیدگی است. در این چارچوب سامانه در حالت اولیه $|\psi\rangle$ که معمولاً حالت پایه‌ی یک همیلتونی گافدار (H) است آماده می‌شود و توسط همیلتونی دیگری H که $[H, H_0] \neq 0$ ، در زمان متحول می‌شود. از آنجایی که $|\psi\rangle$ ویژه حالت H نیست لذا تحول زمانی غیربدیهی خواهد بود. اگر همیلتونی H مربوط به یک نظریه منسجم باشد، می‌توان تحول زمانی در همتیدگی را با استفاده از تکنیک‌های نظریه میدان منسجم مطالعه کرد [۵]. به‌عنوان مثال‌های ساده می‌توان به چنین چارچوبی به‌صورت تغییرات یک پارامتر کنترل نگاه کرد. در این نگاه همیلتونی سیستم وابستگی زمانی دارد به‌صورتی که $H(t \rightarrow -\infty) = H$ و $H(t \rightarrow \infty) = H$. این پارامتر کنترل مثلاً می‌تواند ضریب جمله‌ی اندرکنش همیلتونی مثل $\lambda\phi^4$ باشد یا ضریب جمله‌ی جرمی $m^2\phi^2$. خاموش کردن λ یا m به معنی پمپ انرژی به سیستم به‌صورت سرتاسری است. این انرژی پمپ شده سامانه را که در حالت ایستا قرار داشته دستخوش تحول زمانی می‌کند. در ادامه‌ی این بحث، مقیاس زمانی فرونشانی (زمان رسیدن از H به H) از همه پارامترهای بعد دار مسئله بسیار کوچک‌تر فرض خواهد شد. به‌عبارت دیگر این فرض بدین معنی است که فرونشانی به‌صورت آنی (در $t = 0$) مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. برای مطالعه‌ی فرونشانی از حالت پایه‌ی یک همیلتونی گافدار این حالت پایه را به‌صورت

$$|\psi\rangle = e^{-\epsilon H} |\psi_0\rangle$$



شکل ۴: انتگرال مسیر متناظر با تحول زمانی فرونشانی حالت مرزی

در نظر می‌گیریم که ϵ در آن پارامتر عادی‌ساز است. ماتریس چگالی سامانه به صورت

$$\begin{aligned} \rho(t) &= e^{-iHt} e^{-\epsilon H} |\psi.\rangle \langle \psi.| e^{-\epsilon H} e^{iHt} \\ &= e^{-iH(t-i\epsilon)} |\psi.\rangle \langle \psi.| e^{iH(t+i\epsilon)} \\ &= \underbrace{e^{H\tau_1} |\psi.\rangle \langle \psi.| e^{-H\tau_1}} \end{aligned} \quad (28)$$

که در آن زمان اقلیدسی $\tau = -it$ به صورت تعریف شده است. به عبارت دیگر عادی‌سازی حالت اولیه باعث می‌شود که عناصر انتگرال مسیر از $-\tau_1$ تا صفر و از τ_2 تا صفر تعریف شوند که در شکل ۴ نشان داده شده است. با انتخاب زمان فرونشانی به صورت $t = 0$ ناحیه‌ای که انتگرال مسیر روی آن محاسبه می‌شود به یک نوار نامتناهی با پهنای 2ϵ تبدیل می‌شود. برای محاسبه آنتروپی باید

$$\mathcal{Z}_n = \langle \sigma(z_1, \bar{z}_1) \bar{\sigma}(z_2, \bar{z}_2) \rangle_{\text{Strip}}$$

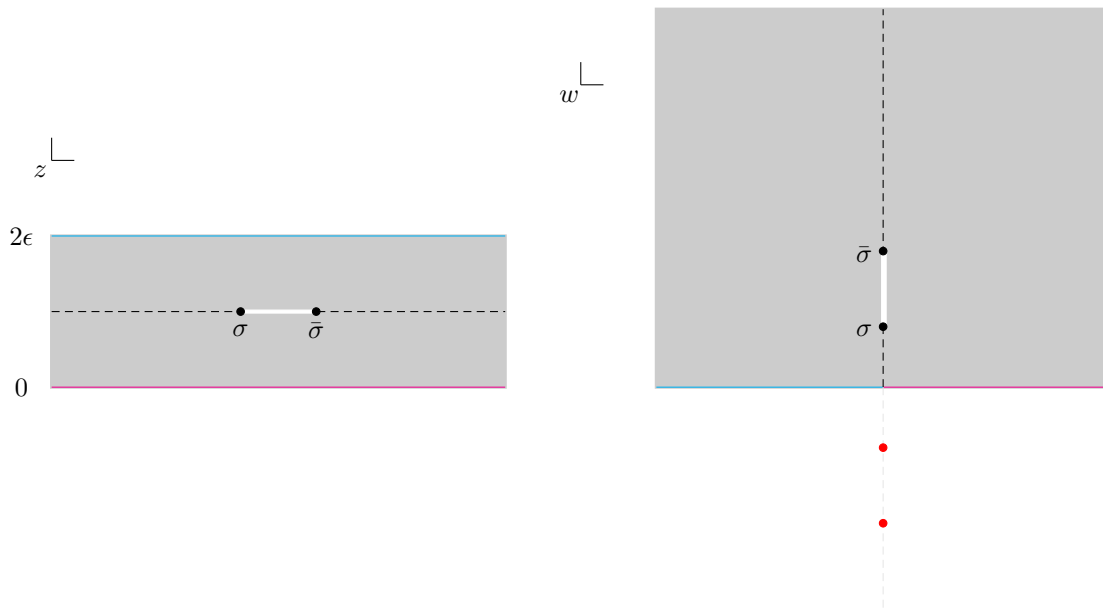
را محاسبه کنیم که روی صفحه z یک تابع دو-نقطه‌ای در ناحیه‌ی نواری است. از آنجایی که تابع دو-نقطه‌ای روی نوار عبارت شناخته شده‌ای ندارد، همان‌طور که از شکل ۵ می‌توان دید می‌توان با استفاده از نگاشت

$$w = e^{\frac{\pi z}{2\epsilon}} \quad (29)$$

این ناحیه نواری به پهنای 2ϵ در صفحه اولیه z را به نیم-صفحه بالا در صفحه w نگاشت. هدف این است که با کمک این نگاشت و روش شناخته شده‌ای در چارچوب نظریه میدان‌های منسجم مرزی تابع دو-نقطه‌ای زیر را در حد مورد علاقه محاسبه کنیم. برای این کار ابتدا برای سادگی مرزهای ناحیه را به اندازه‌ی $i\tau_1$ انتقال می‌دهیم لذا نقاطی که عملگرهای پیچش در آن اعمال شده عبارتند از $z_1 = \ell/2 + i\tau_1$ و $z_2 = -\ell/2 + i\tau_1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_n &= \langle \sigma(z_1, \bar{z}_1) \bar{\sigma}(z_2, \bar{z}_2) \rangle_{\text{Strip}} = |z'(w_1) z'(w_2)|^{-2\Delta_n} \langle \sigma(w_1, \bar{w}_1) \bar{\sigma}(w_2, \bar{w}_2) \rangle_{\text{UHP}} \\ &= \left(\frac{\pi}{2\epsilon} \right)^{2\Delta_n} \langle \sigma(w_1, \bar{w}_1) \bar{\sigma}(w_2, \bar{w}_2) \rangle_{\text{UHP}} \end{aligned} \quad (30)$$

برای محاسبه‌ی تابع دو-نقطه‌ای فوق می‌توان از روش شناخته شده در نظریه میدان منسجم مرزی که بعضاً روش تصویر هم به آن اطلاق می‌شود استفاده کرد. این روش مشابه روش بارهای تصویری در الکترومغناطیس است بدین ترتیب که فرض می‌کنیم



شکل ۵: در این شکل نشان می‌دهیم که چطور نوار بینهایت به نیم‌صفحه‌ی بالایی نگاشته می‌شود. همچنین در صفحه w برای محاسبه‌ی تابع دو-نقطه‌ای در نیم‌صفحه بالایی نشان داده شده روش عملگرهای تصویر را چطور استفاده می‌شود.

تقارن همسو در همه‌ی صفحه (نه فقط نیم صفحه بالا) برقرار باشد و مرز را با اعمال عملگرهای تصویری در نقاط متقارن نسبت به مرز جایگزین می‌کنیم. بدین ترتیب برای محاسبه‌ی تابع p -نقطه‌ای روی نیم صفحه بالا، باید تابع $2p$ -نقطه‌ای روی کل صفحه مختلط محاسبه کنیم. برای جزئیات بیشتر [۶] را ببینید. بدین ترتیب می‌توان مشاهده کرد که

$$\begin{aligned} Z_n &= \left(\frac{\pi}{2\epsilon}\right)^{2\Delta_n} \left(\frac{|w_1 - \bar{w}_2||w_2 - \bar{w}_1|}{|w_1 - w_2||\bar{w}_1 - \bar{w}_2||w_1 - \bar{w}_1||w_2 - \bar{w}_2|}\right)^{\Delta_n} \mathcal{F}_n(x) \\ &= \left(\frac{\pi}{2\epsilon}\right)^{2\Delta_n} \left(\frac{\cosh \frac{\pi\ell}{2\epsilon} + \cosh \frac{\pi t}{2\epsilon}}{\lambda \sinh^2 \frac{\pi\ell}{4\epsilon} \cosh^2 \frac{\pi t}{4\epsilon}}\right)^{\Delta_n} \mathcal{F}_n(x, \bar{x}) \end{aligned} \quad (31)$$

که در آن $x = \bar{x} = \frac{w_1 \bar{w}_2 w_2 \bar{w}_1}{w_1 \bar{w}_1 w_2 \bar{w}_2}$. با توجه به اینکه تابع $\mathcal{F}_n(x, \bar{x})$ به اطلاعات کل نظریه (طیف عملگرها اولیه) وابسته است به نظر می‌رسد که این مسیر برای استخراج اطلاعات جهانشمول (مستقل از جزئیات نظریه) با شکست مواجه شده است. اما نکته مهم این است که مادامی که $t \gg \epsilon$ و $\ell \gg \epsilon$ باشد می‌توان به‌سادگی مشاهده کرد که

$$x = \frac{\cosh^2 \frac{\pi t}{2\epsilon}}{\cosh \frac{\pi t}{\epsilon} + \cosh \frac{\pi\ell}{2\epsilon}} \approx \begin{cases} 0 & , t < \ell/2 \\ 1 & , t > \ell/2 \end{cases}$$

لذا در دو حد ساده از تابع $\mathcal{F}_n(x, \bar{x})$ قرار داریم که می‌توان نشان داد در هر دو حد $\mathcal{F}_n(x, \bar{x}) \approx 1$ با استفاده از این نتایج می‌توان رفتار جهانشمول آنتروپی‌های رنی و آنتروپی فن-نویمن را محاسبه کرد. رفتار آنتروپی فن-نویمن به‌صورت

$$S_\ell(t) = \frac{c}{3} \log \frac{1}{\epsilon} + \frac{c}{3} \begin{cases} \frac{\pi t}{2\epsilon} & , t < \ell/2 \\ \frac{\pi\ell}{4\epsilon} & , t > \ell/2 \end{cases} \quad (32)$$

است. آنتروپی‌های رینی هم تا حد یک ضریب همین رفتار را نشان می‌دهند. این رفتار نشان می‌دهد که سامانه بعد از پمپ انرژی دستخوش تحول زمانی می‌شود و به صورت موضعی بعد از گذشت زمان $l/2$ به تعادل ترمودینامیکی می‌رسد. شایان ذکر است که این رفتار با تصویر شهودی موسوم به تصویر شبه-ذره قابل توصیف است که شرح آن از موضوع این درسنامه خارج است.

تمرین: مرزهای ناحیه نواری و ناحیه درهمتنیدگی با استفاده از $w(z)$ به کجای نیم-صفحه بالا نگاشته می‌شوند؟
تمرین: با شروع از سطر اول رابطه (۳۱) سطر دوم را به دست آورید. راهنمایی: به دلیل ادامه تحلیلی به زمان لورنتسی $z_i^* \neq \bar{z}_i$. با توجه به تمرین قبل، درخصوص مرزهای ناحیه درهمتنیدگی، چه رابطه‌ای میان z_i^* و \bar{z}_i وجود دارد؟
تمرین: تحول زمانی آنتروپی‌های رینی و آنتروپی فن-نویمن را برای نیم خط به دست بیاورید. آیا پیش از محاسبه می‌توانید از رابطه (۳۹) حدس بزنید چه رفتاری مورد انتظار است؟

تمرین: نشان دهید در حدود $1, 0 \rightarrow x$ بلوک منسجم به صورت $\mathcal{F}_n(x, \bar{x}) \approx 1$ تقریب زده می‌شوند؟ آیا استدلال شهودی برای این تقریب وجود دارد؟ آیا این مقدار به بهنجارش انتخابی وابسته است؟
تمرین: چرا به این فرونشانی، فرونشانی حالت مرزی گفته می‌شود؟ راهنمایی ۱: حالت‌های مرزی در نظریه میدان منسجم مرزی حالت‌هایی هستند که بیشترین تقارن همسوی ممکن را حفظ می‌کنند. راهنمایی ۲: یکی از مراحل محاسبه فوق به این فرض نیاز دارد. برای فهم بهتر این مرحله توجه کنید که حالت مرزی در انتگرال مسیر روی کدام سطوح باید وجود داشته باشد و این سطوح تحت نگاشت کجای نیم-صفحه بالایی قرار می‌گیرند؟

۲.۳ همزاد میدان گرمایی

چارچوب استاندارد دیگری که برای مطالعه تحول زمانی درهمتنیدگی مورد استفاده قرار می‌گیرد به چارچوب همزاد دمایی یا چارچوب هارتمن-مالداسنا مشهور است [۹]. ایده‌ی این روش از هولوگرافی نشأت گرفته است. هندسه‌ی سیاه‌چاله‌ی ابدی دوگان حالتی است که به آن همزاد میدان گرمایی می‌گویند به این دلیل که در فضای هیلبرت متشکل از دو نسخه نظریه میدان تعریف شده است. به این دو نسخه معمولاً نسخه‌های راست و چپ گفته می‌شود. ویژگی این حالت این است که اگر روی درجات آزادی هر یک از همزادها رد گرفته شود، ماتریس چگالی نسخه دیگر در حالت گرمایی قرار دارد. به عبارت دقیق‌تر این حالت به صورت

$$|\text{TFD}\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_i e^{-\beta E_i/2} |n_i\rangle_L |n_i\rangle_R \quad (33)$$

تعریف می‌شود که E_i ویژه‌مقادیر انرژی و $|n_i\rangle$ ویژه‌حالت‌های انرژی هستند و می‌توان دید که

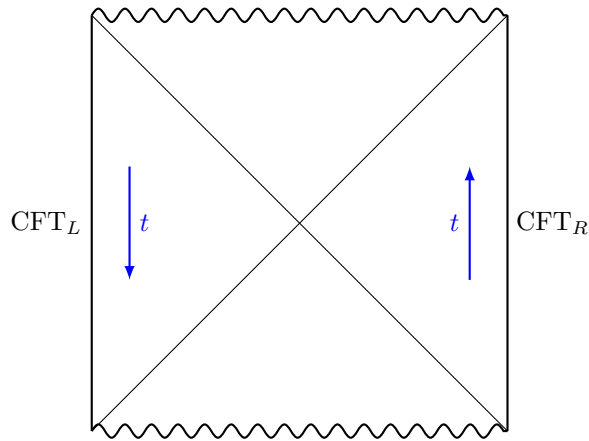
$$\rho_{L(R)} = \text{Tr}_{R(L)} [|\text{TFD}\rangle\langle\text{TFD}|].$$

همانطور که از شکل ۶ پیداست جهت زمان در دو نسخه چپ و راست مخالف یکدیگر است لذا همیلتونی متحول کننده این سامانه به صورت

$$H_{\text{TFD}} = 1 \otimes H_R - H_L \otimes 1$$

است. ایده این روش برای مطالعه تحول زمانی این است که تحت همیلتونی

$$H = 1 \otimes H_R + H_L \otimes 1$$



شکل ۶: سیاه‌چاله ابدی (مجانبا پاددوسیه) دو مرز منسجم دارد که روی هم کدام از مرزها یک نظریه میدان منسجم زندگی می‌کند. حالت متناظر با این هندسه حالت همزاد گرمایی است. زمان در هر مرز خلاف جهت سمت مقابل است و همین تفاوت این امکان را ایجاد می‌کند که با تحول این حالت با همیلتونی که طرفین را مشابه هم در زمان پیش می‌برد تحول زمانی غیربدیهی باشد.

حالت همزاد دمایی تحول زمانی غیربدیهی خواهد داشت.

از آنجایی که سوال مورد نظر مطالعه رفتار جهانشمول تحول زمانی درهمتنیدگی است، طبیعتاً این رفتار نباید به ویژگی‌های چارچوب خاص مورد مطالعه (در این مثال به ساختار فضای هیلبرت که از دو نسخه نظریه میدان ساخته شده است) بستگی داشته باشد. لذا ناحیه‌ی درهمتنیدگی را بخشی از برش کوشی هر یک از نسخه‌ها در نظر می‌گیریم. به عبارت دقیق‌تر $A = A_L \cup A_R$ که هر کدام $A_{L(R)} = (-\ell/2, \ell/2)$ روی نسخه متناظر هستند. در این مثال همان‌طور که در شکل ۷ مشخص است باید یک تابع چهار-نقطه‌ای برای محاسبه تابع پارش محاسبه شود. به عبارت دقیق‌تر

$$\mathcal{Z}_n = \langle \sigma(z_1) \bar{\sigma}(z_2) \sigma(z_3) \bar{\sigma}(z_4) \rangle \quad (34)$$

که در آن

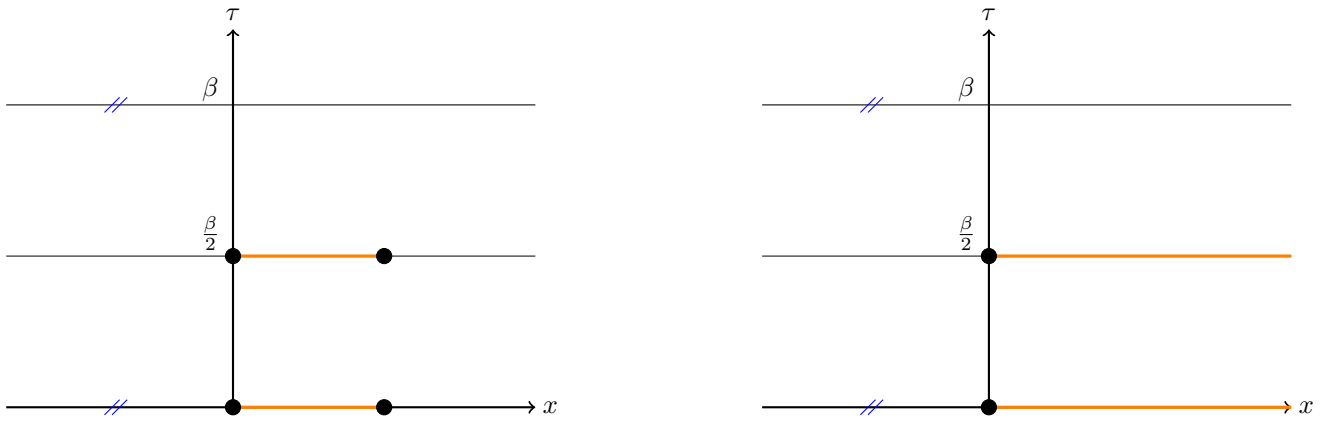
$$\begin{aligned} z_1 = \bar{z}_1 = -\frac{\ell}{4}, \quad z_3 = \frac{\ell}{4} + 2t + i\frac{\beta}{4}, \quad \bar{z}_3 = \frac{\ell}{4} - 2t - i\frac{\beta}{4} \\ z_2 = \bar{z}_2 = \frac{\ell}{4}, \quad z_4 = -\frac{\ell}{4} + 2t + i\frac{\beta}{4}, \quad \bar{z}_4 = -\frac{\ell}{4} - 2t - i\frac{\beta}{4} \end{aligned}$$

با استفاده از نگاشت

$$w = e^{\frac{2\pi z}{\beta}} \quad (35)$$

استوانه به صفحه نگاشته می‌شود و می‌توان مشاهده کرد که

$$\mathcal{Z}_n = c_{L,\beta,n} (x\bar{x})^{\Delta_n} \mathcal{G}(x, \bar{x}) \quad (36)$$

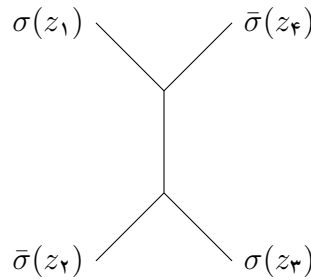


شکل ۷: تحول زمانی در حالت همزاد دمایی. $\tau = \beta$ و $\tau = 0$ به هم دوخته شده‌اند. نواحی نارنجی رنگ ناحیه‌ی درهم‌تنیدگی را نشان می‌دهد و محل اعمال عملگرهای پیچش با نقاط سیاه نشان داده شده است.

که در آن

$$x = \frac{w_{12}w_{34}}{w_{13}w_{24}} = \bar{x} = \frac{\bar{w}_{12}\bar{w}_{34}}{\bar{w}_{13}\bar{w}_{24}} = \frac{2 \sinh^2 \frac{\pi \ell}{\beta}}{\cosh \frac{2\pi \ell}{\beta} \cosh \frac{4\pi t}{\beta}}$$

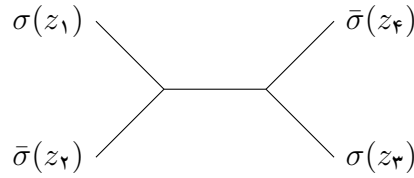
و $G(x, \bar{x})$ به جزئیات نظریه وابسته است. این تابع را باید علی‌الاصول برای هر نظریه‌ای محاسبه کرد. اما همان‌طور که در ادامه درسنامه مشاهده خواهیم کرد در نظریه‌های هولوغرافیک روش مشخصی برای محاسبه‌ی این تابع وجود دارد. در دو حد متفاوت می‌توان از این رابطه اطلاعات جهانشمول استخراج کرد. اولین حد به زمان‌های اولیه مشهور است که به صورت $\beta \ll t \ll \ell/2$ تعریف می‌شود. در این حد می‌توان مشاهده کرد که $x \approx 1$ (کانال t غلبه دارد)



و لذا داریم

$$\begin{aligned} Z_n &\approx \langle \sigma(z_1, \bar{z}_1) \bar{\sigma}(z_4, \bar{z}_4) \rangle \langle \sigma(z_3, \bar{z}_3) \bar{\sigma}(z_2, \bar{z}_2) \rangle \\ &= |w'(z_1)|^{h_n} |w'(z_4)|^{h_n} |\bar{w}'(\bar{z}_1)|^{h_n} |\bar{w}'(\bar{z}_4)|^{h_n} \frac{1}{|w(z_1) - w(z_4)|^{2h_n}} \frac{1}{|\bar{w}(\bar{z}_1) - \bar{w}(\bar{z}_4)|^{2h_n}} \times \\ &\quad |w'(z_3)|^{h_n} |w'(z_2)|^{h_n} |\bar{w}'(\bar{z}_3)|^{h_n} |\bar{w}'(\bar{z}_2)|^{h_n} \frac{1}{|w(z_3) - w(z_2)|^{2h_n}} \frac{1}{|\bar{w}(\bar{z}_3) - \bar{w}(\bar{z}_2)|^{2h_n}} \quad (37) \\ &\approx \left(\frac{\beta}{2\pi\epsilon} \right)^{-4h_n} e^{-\frac{4\pi h_n t}{\beta}} \end{aligned}$$

از سوی دیگر در حد زمان‌های بزرگ $\beta \ll \ell/2 \ll t$ می‌توان دید که $x \approx 0$ که به معنی غلبه کانال s است.



در این حالت داریم

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_n &\approx \langle \sigma(z_1, \bar{z}_1) \bar{\sigma}(z_r, \bar{z}_r) \rangle \langle \sigma(z_p, \bar{z}_p) \bar{\sigma}(z_f, \bar{z}_f) \rangle \\
 &= |w'(z_1)|^{h_n} |w'(z_r)|^{h_n} |\bar{w}'(\bar{z}_1)|^{h_n} |\bar{w}'(\bar{z}_r)|^{h_n} \frac{1}{|w(z_1) - w(z_r)|^{2h_n}} \frac{1}{|\bar{w}(\bar{z}_1) - \bar{w}(\bar{z}_r)|^{2h_n}} \times \\
 &\quad |w'(z_p)|^{h_n} |w'(z_f)|^{h_n} |\bar{w}'(\bar{z}_p)|^{h_n} |\bar{w}'(\bar{z}_f)|^{h_n} \frac{1}{|w(z_p) - w(z_f)|^{2h_n}} \frac{1}{|\bar{w}(\bar{z}_p) - \bar{w}(\bar{z}_f)|^{2h_n}} \quad (38) \\
 &\approx \left(\frac{\beta}{2\pi\epsilon} \right)^{-\Lambda h_n} e^{-\frac{\Lambda\pi h_n L}{\beta}}
 \end{aligned}$$

لذا از کنار هم گذاشتن این دو تقریب داریم

$$S_\ell(t) = \frac{2}{3} \frac{c}{\beta} \log \frac{\beta}{2\pi\epsilon} + \frac{2}{3} \frac{c}{\beta} \begin{cases} \frac{2\pi t}{\beta} & , t \lesssim \ell/2 \\ \frac{\pi \ell}{\beta} & , t \gtrsim \ell/2 \end{cases} \quad (39)$$

لذا آنتروپی در همتندگی ابتدا به صورت خطی رشد می‌کند تا وقتی به مقدار آنتروپی گرمایی رسید اشباع می‌شود.

تمرین: چرا در این محاسبه $\bar{z} = z^*$ نیست؟

تمرین: در شکل‌های بلوک‌های منسجم میدان منتشرشونده میان علمگرهایی که با هم ادغام شدند چه میدانی است؟

تمرین: محاسبه‌ی بالا را برای حالت سمت راست شکل ۷ تکرار کنید. نتیجه را با محاسبه مشابه فرونشانی حالت مرزی مقایسه کنید و تفاوت آنها را توضیح دهید.

۴ درهمتندگی دو حالت منفصل

در بخش‌های قبل مثال‌هایی که مرور شدند عمدتاً نشان‌دهنده‌ی رفتارهای جهانشمول کمیت‌های مختلف در نظریه میدان‌های منسجم بودند. این رفتارهای جهانشمول از کمیت‌هایی بروز می‌کند که یا برحسب توابع دو-نقطه‌ای قابل بیان هستند یا حتی اگر کمیت مورد نظر در حالت کلی برحسب توابع چهار-نقطه‌ای فرمول‌بندی می‌شود، مثل تحول زمانی آنتروپی درهمتندگی در حالت همزاد دمایی، رفتار جهانشمول آن در حدودی برقرار است که جمله‌ی غالب برحسب توابع دو-نقطه‌ای قابل بیان است. تمرکز این بخش روی پیکربندی دو ناحیه‌ی منفصل است و نتایج مربوط به این پیکربندی را به صورت بسیار گذار مرور خواهیم کرد. از بحثی که در خصوص پیکربندی متصل انجام شد بدیهی است که در این حالت در تصویر میدان‌های المثنی با چهار عملگر پیش‌نیاز داریم. به عبارت دقیق‌تر

$$\text{Tr} \rho_A^n = c_n \left(\frac{z_{31} z_{42}}{z_{21} z_{43} z_{41} z_{32}} \right)^{2\Delta_n} \mathcal{F}_n(x) \quad (40)$$

که در آن

$$x = \frac{z_{21} z_{43}}{z_{31} z_{42}}$$

برای به دست آوردن تابع $\mathcal{F}_n(x)$ نیازمند همه اطلاعات مربوط به طیف نظریه میدان منسجم (میدانهای اولیه و وزن آنها) هستیم. به همین دلیل در این حالت ساختار دره‌متنیدگی نمی‌تواند جهانشمول باشد^۷ و باید نظریه میدانهای منسجم را به صورت موردی مورد بررسی قرار داد.

نظریه میدان نردهای فشرده

نظریه میدان نردهای آزاد را می‌توان در فضای میدان‌ها روی یک بعد فشرده تعریف کرد. اینکار مثل این است که میدان نردهای را مثل یک مختصه‌ی زاویه‌ای در نظر بگیریم. به عبارت دقیق‌تر $\phi(x, t) \sim \phi(x, t) + 2\pi R$. در این نظریه می‌توان نشان داد که

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{\Theta(\nu\Gamma)\Theta(\Gamma/\nu)}{\Theta(\Gamma)^2} \quad (41)$$

که در آن تابع ریمن-سیگل است،

$$\Gamma_{r,s}(x) = \frac{\nu i}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n} \beta_{\frac{k}{n}}(x) \cos \left(\frac{2\pi k(r-s)}{n} \right) \quad (42)$$

$$\beta_y(x) = \frac{{}_2F_1(y, 1-y, 1, 1-x)}{{}_2F_1(y, 1-y, 1, x)}$$

و ν نمای بحرانی است که با R^2 متناسب است.

مثال مهم دیگر مدل ایزینگ، یا به عبارت دقیق‌تر کلاس جهانشمولی این مدل است. برای این کلاس هم می‌توان این محاسبه را انجام داد که بیان عبارت‌های آن در این درسنامه چندان مفید نیست. خواننده علاقمند می‌تواند به مراجع [۱۰، ۱۱] مراجعه کند. نکته مهم این است که همان‌طور که اشاره شد به صورت موردی می‌توان این محاسبه را انجام داد و بنا به دانش نگارنده این محاسبه فقط برای موارد مذکور انجام شده است. در ادامه‌ی این درسنامه به خانواده‌ای از نظریه میدانهای منسجم اشاره می‌کنیم که با استفاده از تقریب‌های هوشمندانه‌ای می‌توان نتایج ارزشمندی در خصوص این محاسبه در چارچوب این خانواده استخراج کرد.

۵ توابع چهار-نقطه‌ای و بالاتر در نظریه‌های هولوگرافیک

این بخش به نظریه میدانهای منسجم هولوگرافیک اختصاص دارد. این نظریه میدان‌ها دو ویژگی بسیار مهم دارند. اولین ویژگی این است که تعداد درجات آزادی آنها بسیار زیاد است. علت این امر این است که در نظریه گرانشی وقتی تقریب نقطه زینی برقرار است که ثابت نیوتن $1 \ll G_N$. از آنجایی که آنتروپی بکشتاین-هاوکینگ به صورت $S_{BH} \propto G_N^{-1}$ است، لذا تعداد درجات آزادی نظریه‌ی گرانشی بسیار بزرگ است و به همین ترتیب نظریه میدان دوگان آن نیز همین ویژگی را دارد. به‌عنوان مثال در AdS/CFT آنتروپی با N^2 متناسب است که N رتبه گروه پیمانهای $SU(N)$ است.

^۷در ادامه این درسنامه خواهیم دید که در نظریه‌هایی که $c \rightarrow \infty$ است می‌توان در صورت وجود قیودی روی طیف نظریه برای این پیکربندی هم اطلاعات جهانشمول به دست آورد. به عبارت دیگر در این بخش به صورت ضمنی فرض شده که c متناهی باشد.

دومین ویژگی مهم نظریه میدان‌های منسجم هولوگرافیک این است که طیف آنها تُتک (sparse) است. از آنجایی که دوگان گرانشی در رژیم انرژی‌های کم (کلاسیک) فقط شامل میدان‌های با اسپین $s \leq 2$ است، لذا در طیف این نظریه‌ها باید گاف بزرگی بین عملگرهای با اسپین کوچک و عملگرهای با اسپین‌های $s > 2$ در نظریه میدان منسجم دوگان وجود داشته باشد. این ویژگی طیف «تُتک» بودن نامیده می‌شود. طیف تُتک در رژیم جفتیدگی‌های قوی اتفاق می‌افتد. مشخصاً در مثال $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ بخش اسپین‌های بالا ناشی از اثرات ریسمانی است که در $1 \ll \ell_{\text{string}}$ از بین می‌رود و از آنجایی که $\ell_{\text{string}} \propto \lambda^{-1/4}$ ، این رژیم معادل جفتیدگی‌های قوی است.

پس از اشاره مختصر به ویژگی‌های نظریه میدان‌های منسجم هولوگرافیک، در ادامه این بخش روش مشخصی، که در تقریب نیمه-کلاسیک معتبر است، معرفی خواهد شد که با استفاده از آن می‌توان کمیت‌هایی که به توابع چهار-نقطه‌ای و بالاتر وابسته هستند را در این تقریب مورد مطالعه قرار داد. بدیهی است که کمیت‌های زیادی که از منظر اطلاعات کوانتومی بسیار اهمیت دارند در این دسته قرار می‌گیرند و در ادامه مثال‌های ساده‌ای از این کمیت‌ها معرفی خواهد شد. سپس با اضافه کردن تقریب دیگری که به تقریب سبک-سنگین مشهور است نشان می‌دهیم که می‌توان در این حد بلوک‌های منسجم را به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار داد. در انتهای این بخش هم نمایش بازگشتی بلوک‌های منسجم را معرفی خواهیم کرد.

۱.۵ روش monodromy و بلوکهای منسجم ویراسورو

روش مونودرومی روشی است برای محاسبه‌ی بلوک‌های منسجم در تقریب نیمه-کلاسیک (تعریف دقیق در ادامه خواهد آمد) که عمدتاً توسط زاملودجیکف در دهه ۱۹۸۰ توسعه داده شده است. این روش اصولاً نه تنها برای توابع چهار-نقطه‌ای، که برای توابع بالاتر از چهار-نقطه‌ای هم کاربرد دارد اما در این مرور بسیار مختصر فقط توابع چهار-نقطه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد. تابع چهار-نقطه‌ای میدان‌های اولیه را می‌توان به صورت

$$\langle \mathcal{O}_1(0) \mathcal{O}_2(x) \mathcal{O}_3(1) \mathcal{O}_4(\infty) \rangle = \sum_p C_{12}^p C_{34}^p \mathcal{F}(x, h_p, h_i, c) \mathcal{F}(\bar{x}, \bar{h}_p, \bar{h}_i, c) \quad (43)$$

بسط داد. در این رابطه $C_{ijk} = C_{ij}^p d_{pk}$ که d_{ij} و C_{ijk} ثوابت توابع دو و سه-نقطه‌ای میدان‌های اولیه هستند. جمع p روی میدان‌های اولیه است و \mathcal{F} بلوکهای ویراسورو هستند که اثرات میدان‌های غیراولیه را هم دربر می‌گیرند. بسط فوق به بسط کانال s مشهور است که در حد $x \rightarrow 0$ معتبر است و شعاع اعتبار آن به جزئیات نظریه و میدان‌های \mathcal{O}_i وابسته است. علاقه ما در این بخش به عبارت فوق در تقریب نیمه-کلاسیک است که تعریف آن به صورت $c \rightarrow \infty$ و در حالت عمومی h_p/c و h_i/c را ثابت فرض می‌کنیم. در این حد ادعا این است که

$$\mathcal{F}(x, h_p, h_i, c) \approx e^{-\frac{c}{x} f(x, h_p, h_i)} \quad (44)$$

این ادعا اثبات عمومی ندارد اما در چارچوب نظریه‌ی میدان منسجم لیوویل، که آزمایشگاه مفیدی برای مطالعه‌ی بلوک‌های منسجم است، توجیه قوی بر مبنای نحوه‌ی مقیاس شدن کنش آن در تقریب نیمه-کلاسیک در دست است. هدف این است که تابع $f(x)$ را در عمومی‌ترین حالت ممکن پیدا کنیم.

برای نیل به این هدف عملگر سبکی در میان \mathcal{O}_i ‌ها اضافه کنیم (سبک یعنی وزن آن از مرتبه ۱ و در حد $c \rightarrow \infty$ ثابت باشد). می‌توان نشان داد که در مرتبه‌ی اول تقریب نیمه-کلاسیک نتیجه این کار به صورت

$$\langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{\psi}(z) \mathcal{O}_3 \mathcal{O}_4 \rangle = \psi(z, x_i) \mathcal{F}(x, h_\alpha, h_i) \quad (45)$$

است لذا در نتیجه اضافه کردن این عملگر بلوک منسجم فقط در حد یک تابع $\psi(z, x_i)$ تغییر میکند. از آنجایی که قید بیشتری

روی این عملگر سبک وجود ندارد این رفتار می‌تواند بسیار قدرتمند باشد اگر $\hat{\psi}$ را یک عملگر پوچ^۲ توان مرتبه‌ی ۲ فرض کنیم. برای چنین عملگرهایی می‌دانیم که

$$\left(L_{-2} - \frac{3}{2(2h_{\psi} + 1)L_{-1}} \right) |\psi\rangle = 0$$

با جایگذاری حاصل عمل عملگرهای L_{-2} و L_{-1} روی میدان‌های اولیه و همچنین استفاده از اتحاد وارد در رابطه بالا می‌توان نشان داد

$$\left(\frac{c}{6} \partial_z^2 + \sum_{i=1}^f \left(\frac{h_i}{(z-x_i)^2} + \frac{1}{z-x_i} \partial \right) \right) \langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \hat{\psi}(z) \mathcal{O}_3 \mathcal{O}_4 \rangle = 0 \quad (46)$$

در رابطه فوق از $h_{\psi} \approx -\frac{1}{4} - \frac{4}{3c}$ استفاده شده که حالت حدی قیدی است که میان h_{ψ} و c در میدان‌های پوچ مرتبه‌ی ۲ وجود دارد. رابطه‌ی فوق برای کل تابع پنج-نقطه‌ای برقرار است اما از آنجایی که هر جمله از بسط برحسب بلوک‌های منسجم موندرومی مختص به خود را دارد که به وزن بلوک وابسته است، لذا اتحاد فوق باید برای هر بلوک برقرار باشد.

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{c}{6} \partial_z^2 + \sum_{i=1}^f \left(\frac{h_i}{(z-x_i)^2} + \frac{1}{z-x_i} \partial \right) \right) \psi(z, x_i) e^{-\frac{c}{6} f(x, h_p, h_i)} \\ &= \frac{c}{6} (\partial_z^2 + \mathcal{T}(z, x_i)) \psi(z, x_i) \end{aligned} \quad (47)$$

که در آن

$$\mathcal{T}(z, x_i) = \sum_{i=1}^f \left(\frac{6}{c} \frac{h_i}{(z-x_i)^2} - \frac{c_i}{z-x_i} \right), \quad c_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (48)$$

که به c_i ها پارامترهای الحاقی^۸ گفته می‌شود. نکته مهم این است که تابع $\mathcal{T}(z, x_i)$ نباید با عملگر تانسور انرژی-تکانه $\hat{T}(z)$ اشتباه گرفته شود. اگرچه با استفاده از اتحاد وارد می‌توان مشاهده کرد که

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}(z) \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_3 \mathcal{O}_4 \rangle &= \sum_{i=1}^f \left(\frac{h_i}{(z-x_i)^2} + \frac{1}{z-x_i} \partial_i \right) \langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_3 \mathcal{O}_4 \rangle \\ &= -\frac{c}{6} \mathcal{T}(z, x_i) \langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_3 \mathcal{O}_4 \rangle \end{aligned} \quad (49)$$

لذا $\mathcal{T}(z, x_i)$ همان تابعی است که در صورت اعمال عملگر تانسور انرژی-تکانه در حد نیمه-کلاسیک در کنار بلوک منسجم قرار می‌گیرد (مشابه رابطه (۴۵)). به همین دلیل ساختار تکنیکی‌های آن مشابه تانسور انرژی-تکانه است. از آنجایی که در نتیجه‌ی تقارن همسو تانسور انرژی-تکانه باید در $\infty \rightarrow z$ به صورت z^{-4} افت کند^۹ لذا از متحد صفر قرار دادن ضرایب جملات z^{-1} و z^{-2} و z^{-3} در بسط لوران سه قید

$$\sum_{i=1}^f c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^f \left(c_i x_i - \frac{6h_i}{c} \right) = 0, \quad \sum_{i=1}^f \left(c_i x_i^2 - \frac{12h_i}{c} x_i \right) = 0 \quad (50)$$

^۸accessory

^۹برای جزئیات بیشتر بخش ۲.۲.۵. مرجع [۷] را ببینید.

حاصل می شود که با استفاده از آنها می توان سه پارامتر الحاقی را معین کرد. برای سادگی در مختصات کار می کنیم که $x_1 = 0$ ، $x_2 = x$ ، $x_3 = 1$ و $x_4 = \infty$ باشد این قیود به

$$\frac{c}{6} \mathcal{T}(z, x_i) = \frac{h_1}{z^2} + \frac{h_2}{(z-x)^2} + \frac{h_3}{(z-1)^2} + \frac{h_1 + h_2 + h_3 - h_4}{z(1-z)} - \frac{c}{6} \frac{c_2(x)x(1-x)}{z(z-x)(1-z)} \quad (51)$$

ختم می شود.

گام آخر این است که با مجدداً با استفاده از قید حالت های پوچ و مونودرومی تابع ψ وقتی x_1 و x_2 را دور می زند، شرطی به دست آوریم که پارامتر الحاقی c_2 را فیکس کند. برای این کار ابتدا یادآوری می کنیم که شکل تابع سه-نقطه ای به صورت

$$V_{\alpha\beta\psi} = \langle \mathcal{O}_\alpha(x_1) \mathcal{O}_\beta(x_2) \psi(x_3) \rangle = \frac{C_{\alpha\beta\psi}}{x_{12}^{h_\alpha+h_\beta-h_\psi} x_{13}^{h_\alpha-h_\beta+h_\psi} x_{23}^{-h_\alpha+h_\beta+h_\psi}}$$

است. با توجه به پوچ بودن $\hat{\psi}$ مشابه قبل داریم

$$\begin{aligned} \bullet &= \left(-\frac{3}{2(2h_\psi+1)} + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{h_i}{(x_3-x_i)^2} + \frac{1}{x_3-x_i} \partial_i \right) \right) V_{\alpha\beta\psi} \\ &= \frac{2h_\psi(h_\alpha+h_\beta) + 6h_\alpha h_\beta - 3h_\alpha^2 + h_\alpha - 3h_\beta^2 + h_\beta + h_\psi^2 - h_\psi}{4h_\psi+2} V_{\alpha\beta\psi} \frac{x_{12}^2}{x_{13}^2 x_{23}^2} \end{aligned} \quad (52)$$

با استفاده از $h_\psi \approx -\frac{1}{4} - \frac{9}{4c}$ می توان به سادگی دید که

$$h_\beta - h_\alpha - h_\psi = \frac{1}{4} \left(1 \pm \sqrt{1 - 24h_\alpha/c} \right) \quad (53)$$

حالا به مسئله تابع چهارنقطه ای برمی گردیم که شامل رابطه

$$\langle \alpha | \hat{\psi} \mathcal{O}_3 \mathcal{O}_4 \rangle = \sum_\beta C_{\beta\alpha\beta} \langle \mathcal{O}_\alpha(y) \hat{\psi}(z) \mathcal{O}_\beta \left(\frac{x_3+x_4}{2} \right) \rangle \propto (z-y)^{h_\beta-h_\alpha-h_\psi} = (z-y)^{\frac{1 \pm \sqrt{1-24h_\alpha/c}}{2}}$$

است. در تساوی اول از OPE عملگرهای \mathcal{O}_3 و \mathcal{O}_4 استفاده شده، این تابع سه-نقطه ای وقتی z نقطه ای y را دور می زند فقط از \mathcal{O}_β هایی سهم می گیرد که در (53) صدق می کنند لذا شکل آن در حد $y \rightarrow z$ تثبیت می شود. لذا با توجه به اینکه جمع روی α ها از OPE عملگرهای \mathcal{O}_1 و \mathcal{O}_2 ناشی می شود جواب های معادله ی (47) وقتی کانتور نقاط x_1 و x_2 را در برمی گیرد (در پایه ی قطری) باید از مونودرومی

$$M = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \frac{1+\sqrt{1-24h_\alpha/c}}{2}} & \cdot \\ \cdot & e^{2\pi i \frac{1-\sqrt{1-24h_\alpha/c}}{2}} \end{pmatrix} \quad (54)$$

تبعیت کند. با استفاده از این شرط که در واقع روی رد این ماتریس به صورت $\text{Tr}[M] = -2 \cos(\pi \sqrt{1-24h_\alpha/c})$ اعمال می شود می توان پارامتر الحاقی باقی مانده را تعیین کرد. این شرط وقتی روی بلوک واحد ($h_\alpha = 0$) اعمال می شود به مونودرومی بدیهی مشهور است که در بخش بعد مثالی از آن بررسی خواهد شد.

تمرین: با استفاده از ویژگی های نظریه لیوویل توجیه کنید چرا رابطه (44) مورد انتظار است.

تمرین: با شروع از شرط پوچ بودن عملگر $\hat{\psi}$ رابطه‌ی (۴۶) را نشان دهید.
تمرین: اگر عملگر سبک $\hat{\psi}(z)$ را در تابع دو-نقطه‌ای و سه-نقطه‌ای اعمال کنیم روابط (۵۰) چگونه تغییر می‌کنند و تعبیر آنها چیست؟

۲.۵ درهم‌تنیدگی نواحی منفصل

در بخش قبل نحوه‌ی حل عمومی بلوک‌های منسجم در تقریب نیمه-کلاسیک مرور شد. بدیهی است که به دست آوردن پارامتر الحاقی باقی‌مانده از حل شرط مونودرومی به صورت تحلیلی به ازای x و h_i ها و h_α دلخواه کار ساده‌ای نیست. برای به دست آوردن آنتروپی درهم‌تنیدگی دو ناحیه‌ی منفصل، از آنجایی که وزن عملگرهای پیچش و پادپیچش باهم برابر است، باید حالت خاصی که $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ باشند را مورد بررسی قرار داد [۱۲]. می‌توان نشان داد که بلوک غالب در این حالت بلوک واحد است (h). و در نتیجه می‌توان این حالت را به صورت تحلیلی حل کرد. در این زیر بخش این حالت خاص را مرور خواهیم کرد.

همان‌طور که اشاره شد در تقریب نیمه-کلاسیک عموماً فرض می‌شود که h_i/c ها و h_α/c ثابت باشند. در حالت خاص $h_i = h$ می‌توان تقریب نیمه-کلاسیک را در حدی که h_p (و نه h_α/c) ثابت باشد تعمیم داد. به عبارت دقیق‌تر می‌توان نشان داد که حدود $c \rightarrow \infty$ و $h_\alpha/c \rightarrow 0$ با هم جابه‌جا می‌شوند لذا

$$\lim_{\frac{h_\alpha}{c} \rightarrow 0} \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \log \mathcal{F}(x, h_\alpha, h, c) = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \log \mathcal{F}(x, 0, h, c) \quad (55)$$

از آنجایی که بستگی h_α در بلوک منسجم وجود ندارد، می‌توان آن را برابر صفر فرض کرد که به آن بلوک واحد یا بلوک خلا هم گفته می‌شود. با جایگذاری $h_\alpha = 0$ در (۵۴) می‌توان دید که مونودرومی اطراف $z = 0$ و $z = x$ در این حالت باید به صورت

$$\text{Tr}[M_{.x}] = 2$$

باشد که به آن مونودرومی بدیهی گفته می‌شود.

تمرین: شرط برابری همه h_i ها قوی‌تر از شرط کافی برای جایه‌جایی حدود فوق‌الذکر است. از روی روابط بازگشتی که در بخش بعدی معرفی شده‌اند شرط کافی برای جایه‌جایی این حدود را به دست آورید.
 برای محاسبه آنتروپی رنی دو ناحیه باید

$$\begin{aligned} e^{(1-n)S_n(A)} &= \langle \sigma(\cdot) \bar{\sigma}(x) \sigma(1) \bar{\sigma}(\infty) \rangle \\ &= \sum_p C_{12}^p C_{34}^p e^{-\frac{nc}{\gamma} f(x, h_p, \Delta_n, c)} e^{-\frac{nc}{\gamma} f(\bar{x}, h_p, \Delta_n, c)} \\ &\approx C_{12}^p C_{34}^p e^{-\frac{nc}{\gamma} f(x, \cdot, \Delta_n, c)} \end{aligned} \quad (56)$$

را محاسبه کنیم. در خط دوم تقریب نیمه-کلاسیک فرض شده و در خط سوم فرض کردیم که بلوک منسجم واحد سهم غالب را دارد. ضرایب تابع نمایی با این فرض که تعداد عملگرهای سبک از مرتبه c رشد نمی‌کنند در این محاسبه اهمیت ندارند چرا که سهم آنها نسبت به جمله‌ی خطی با c قابل اغماض خواهد بود. بدین ترتیب آنتروپی رنی به صورت

$$S_n(A) = \frac{nc}{\gamma(n-1)} f(x, \cdot, \Delta_n, c) \quad (57)$$

به دست می آید. برای به دست آوردن آنتروپی در همتندگی قدم باقی مانده حل مسئله مونودرومی برای حالتی است که عملگرها وزن بسیار کوچکی داشته باشند چرا که در حد $n \rightarrow 1$ که آن را به صورت $n = 1 + \delta$ پارامتر بندی می کنیم داریم

$$h = \frac{1}{\gamma} \Delta_{1+\delta} = \frac{c\delta}{1\gamma}$$

در کانال s حل مسئله مونودرومی اطراف $z = x$ و $z = 0$ مهم است لذا فقط جملاتی در $T(z, x)$ به مونودرومی سهم میدهند که میتوانند در این نقاط تکینگی ایجاد کنند. به عبارت دقیقتر مسئله باید برای

$$T(z, x) = \frac{\delta}{\gamma} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{2}{z} \right) + c_{\gamma}(x) \left(\frac{1-x}{z} - \frac{1}{z-x} \right) \quad (58)$$

حل شود. از آنجایی که در این حالت مونودرومی باید بدیهی باشد لذا برای کانتوری که هر دو نقطه $z = x$ و $z = 0$ را دربر بگیرد باید جمع ماندهها برابر صفر باشد. با استفاده از این شرط در اولین مرتبه از δ در $x \rightarrow 0$ داریم

$$c_{\gamma}(x) = \frac{\delta}{x}, \quad f(x, 0, \Delta_{1+\delta}, c) = \delta \log x$$

به همین ترتیب می توان در کانال t مسئله را حل کرد. در این کانال باید کانتوری در نظر بگیریم که $z = x$ و $z = 1$ این را دربر بگیرد. در این حد باید مسئله را برای

$$T(z, x) = \frac{\delta}{\gamma} \left(\frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{1-z} \right) - c_{\gamma}(x) \left(\frac{x}{1-z} + \frac{1}{z-x} \right) \quad (59)$$

حل کنیم که با طی مسیر مشابه داریم

$$c_{\gamma}(x) = \frac{\delta}{x-1}, \quad f(x, 1, \Delta_{1+\delta}, c) = \delta \log(1-x)$$

بدین ترتیب در اطراف نقاط $x = 0$ و $x = 1$ جواب را به دست آوردیم. نکته مهم این است که اعتبار این جوابها تا چه فاصله ای در اطراف این نقاط است. می توان برای $n = 2$ اثبات کرد که در کانال s سهم بلوک واحد در بازه $0 < x < 1/2$ غالب است و برای کانال t در همین بازه سهم بلوکهای سنگین غلبه پیدا می کند. شبیه به همین می توان اثبات کرد که در کانال t سهم بلوک واحد در بازه $1/2 < x < 1$ غالب است و برای کانال s در همین بازه بلوکهای سنگین غلبه پیدا می کنند. لذا در این حالت اثبات می شود که گذار دقیقا در $x = 1/2$ اتفاق می افتد. لذا

$$S(A) = \frac{c}{\gamma} \begin{cases} \log x & , x_0 \leq x < \frac{1}{\gamma} \\ \log(1-x) & , \frac{1}{\gamma} < x \leq 1 \end{cases} \quad (60)$$

تمرین: نشان دهید برای $n = 2$ گذار فاز دیگری به غیر از $x = 1/2$ وجود ندارد.

تمرین: مرجع [۱۳] وجود گذار فاز مذکور را به روش دیگری اثبات کرده است. مسیر و محدودیت های این روش را توضیح دهید.

تمرین: با استفاده از محاسبه به روش هولوگرافی نتیجه (۶۰) رو توضیح دهید.

۳.۵ تقریب سبک-سنگین

تقریب سبک-سنگین تقریبی است که علت اهمیت آن قابلیت حل تحلیلی مسئله مونودرومی برای توابع چهار-نقطه‌ای و بالاتر است. در این تقریب دو عملگر سنگین و مابقی عملگرها سبک در نظر گرفته می‌شوند. در این حالت می‌توان مساله مونودرومی را که به صورت بسط اختلالی روی وزن عملگر سبک در نظر گرفته می‌شود حل کرده و پارامتر الحاقی باقیمانده را به صورت تحلیلی به دست آورد [۱۴]. این چارچوب کلی در مساله‌های فیزیکی بسیاری کاربرد دارد از جمله فرونشانی‌های موضعی کوانتمی در نظریه میدان‌های منسجم هولوگرافیک.

در ادامه این بخش این تقریب در غالب مثال ساده‌ای مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در این مثال تابع چهار-نقطه‌ای

$$\langle \phi_1(0)\phi_1(x)\phi_2(1)\phi_2(\infty) \rangle$$

را در تقریب نیمه-کلاسیک و مرتبه خطی h_1/c و h_α/c مطالعه می‌کنیم. در ادامه از تعریف $\epsilon_i \equiv \epsilon h_i/c$ استفاده خواهیم کرد. جواب معادله دیفرانسیل مونودرومی را به صورت

$$\psi = \psi^{(0)} + \epsilon_1 \psi^{(1)} + \epsilon_2 \psi^{(2)} + \dots \quad (61)$$

بسط می‌دهیم و داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(z) &= \epsilon_2 \frac{1}{(z-1)^2} + \epsilon_1 \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-x)^2} - \frac{2}{z(z-1)} - \frac{c_2}{\epsilon_1} \frac{x(1-x)}{z(z-x)(1-z)} \right) \\ &= \mathcal{T}^{(0)} + \epsilon_1 \mathcal{T}^{(1)} \end{aligned} \quad (62)$$

حل مرتبه صفرم معادله بسیار ساده است و دو جواب مستقل آن عبارتند از

$$\psi_{1,2}^{(0)} = (1-z)^{\frac{1 \pm \sqrt{1-4\epsilon_2}}{2}} \quad (63)$$

در مرتبه بعدی هم می‌توان با روش‌های استاندارد حل معادلات دیفرانسیل خطی نشان داد که جواب‌ها به صورت زیر است

$$\psi_i^{(1)} = \psi_1^{(0)} \int dz \mathcal{T}^{(1)} \frac{\psi_2^{(0)} \psi_i^{(0)}}{\psi_1^{(0)} \psi_2^{(0)' } - \psi_2^{(0)} \psi_1^{(0)' }} - \psi_2^{(0)} \int dz \mathcal{T}^{(1)} \frac{\psi_1^{(0)} \psi_i^{(0)}}{\psi_1^{(0)} \psi_2^{(0)' } - \psi_2^{(0)} \psi_1^{(0)' }} \quad (64)$$

هدف این است که در این مرتبه از بسط اختلالی پارامتر الحاقی باقی مانده تثبیت شود. برای همین جواب مرتبه‌ی اول به صورتی نوشته شده که به طور طبیعی در پایه‌ی جواب‌های مرتبه صفرم باشد و لذا مونودرومی ضرایب آن عناصر ماتریس مونودرومی را مشخص خواهد کرد.

برای مشخص کردن مونودرومی ضریب $\psi_1^{(0)}$ در $\psi_1^{(1)}$ داریم

$$\int dz \mathcal{T}^{(1)} \frac{\psi_2^{(0)} \psi_1^{(0)' }}{\psi_1^{(0)} \psi_2^{(0)' } - \psi_2^{(0)} \psi_1^{(0)' }} = \frac{1}{\alpha_2} \left(\left(\frac{c_2}{\epsilon_1} (1-x) + 1 \right) \log \frac{z}{z-x} + \frac{(x-2)z+x}{z(z-x)} \right) \quad (65)$$

که در آن $\alpha_2 = \sqrt{1-4\epsilon_2}$ می‌توان دید که اگر روی مسیری که x را دربر می‌گیرد حول نقطه z بچرخیم، مقدار عبارت فوق به خودش برمی‌گردد چرا که این مسیر از روی برش انشعابی تابع لگاریتم عبور نمی‌کند. از بررسی ریشه‌های انتگرالده هم می‌توان

به همین نتیجه رسید. به عبارت دقیق تر اگر جمع مانده های این ریشه ها برابر صفر باشد این جمله به مونودرومی سهم نمی دهد لذا $(\delta M.x)_{11} = 0$. به همین ترتیب می توان سه عنصر دیگر ماتریس مونودرومی را که به ترتیب عبارتند از ضریب $\psi_1^{(0)}$ در جواب ۱ و ضرایب $\psi_2^{(0)}$ و $\psi_3^{(0)}$ در جواب ۲ به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} (\delta M.x)_{12} &= \frac{2\pi i}{\alpha_2} \left((\alpha_2 - 1) - \left(\frac{c_2}{\epsilon_1}(x-1) - 1 \right) (1-x)^{\alpha_2} + \frac{c_2}{\epsilon_1}(x-1) + \alpha_2(1-x)^{\alpha_2} \right) \\ (\delta M.x)_{21} &= \frac{2\pi i}{\alpha_2} \left((\alpha_2 + 1) + \left(\frac{c_2}{\epsilon_1}(x-1) - 1 \right) (1-x)^{-\alpha_2} - \frac{c_2}{\epsilon_1}(x-1) + \alpha_2(1-x)^{-\alpha_2} \right) \quad (66) \\ (\delta M.x)_{22} &= 0 \end{aligned}$$

با جایگذاری این عبارات ماتریس مونودرومی به صورت

$$M.x = \begin{pmatrix} 1 & (\delta M.x)_{12} \\ (\delta M.x)_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad (67)$$

درمی آید. با بسط ویژه مقادیر رابطه (۵۴) روی h_p و مقایسه آن با ویژه مقادیر ماتریس فوق داریم

$$(\delta M.x)_{12}(\delta M.x)_{21} = -4\pi^2 \epsilon_p^2$$

که به

$$c_2(x) = \frac{\epsilon_1(\alpha_2 - 1 + (1 + \alpha_2)(1-x)^{\alpha_2}) \pm \alpha_2(1-x)^{\alpha_2/2} \epsilon_p}{(1-x)(1 - (1-x)^{\alpha_2})} \quad (68)$$

منجر می شود. با اعمال شرط برابر بودن عبارت فوق با بسط $x \rightarrow 0$ تابع $f(x)$ داریم

$$f(x) = (2\epsilon_1 - \epsilon_p) \log \left(\frac{1 - (1-x)^{\alpha_2}}{\alpha_2} \right) + \epsilon_1(1 - \alpha_2) \log(1-x) + 2\epsilon_p \log \left(\frac{1 + (1-x)^{\alpha_2/2}}{2} \right) \quad (69)$$

بدین ترتیب بلوک منسجم را در حدودی که شرح داده شد، یکی از عملگر وزن سبکی دارد و گاهی به آن عملگر آزمون می گویند و عملگر دیگر وزنی از مرتبه بارمرکزی دارد به دست آمد. با ادامه ی همین سازوکار می توان این محاسبه را برای مراتب بالاتر بسط روی وزن عملگر آزمون و عملگر میانی بلوک به دست آورد.

تمرین: آیا در این تقریب $h_1^2/c > 1$ با مابقی فرض ها سازگار است؟ توضیح دهید چرا باید برای سازگاری چارچوب فوق شرطی روی $h_1^2/c \lesssim 1$ اعمال شود.

تمرین: چرا در رابطه (۶۲) فرض شده $\frac{c_2}{\epsilon_1} \sim \mathcal{O}(1)$ ؟

تمرین: تعبیر موهومی شدن نما $(\epsilon_2 > 1/4)$ در رابطه ی (۶۳) در هولوگرافی چیست؟ راهنمایی: حداقل جرم مورد نیاز برای تشکیل سیاه چاله BTZ برابر $\frac{1}{\lambda G}$ است.

تمرین: برای تابع شش نقطه ای که دو عملگر سبک و مابقی سنگین باشند \mathcal{T} را به دست آورید.

تمرین: محاسبه ی این بخش را برای کانال t انجام دهید.

تمرین: محاسبه ی این بخش را برای کانال های s و t تا مرتبه ϵ_1^2 انجام دهید.

۴.۵ رابطه بازگشتی زاملودچیکف

یکی از راه‌های محاسبه‌ی بلوک‌های منسجم روابط بازگشتی است که باید به صورت عددی آنها را حل کرد. این روابط یا برحسب ساختار تحلیلی c یا h_p نوشته می‌شوند. در بخش پایانی این درسنامه، بدون ورود به جزئیات تفاوت میان اشکال مختلف روابط بازگشتی یک نمونه از آنها را معرفی و نتایج مربوط به آنتروپی رنپی دو ناحیه‌ی منفصل در حد نیمه-کلاسیک به صورت عددی بازتولید می‌شود.^{۱۰}

با شروع از رابطه‌ی (۴۳) با اندکی تغییر در نمادگذاری برای دقت بالاتر داریم

$$\langle \mathcal{O}_1(\cdot) \mathcal{O}_2(x) \mathcal{O}_3(1) \mathcal{O}_4(\infty) \rangle = \sum_p C_{12}^p C_{34}^p \mathcal{F}_{34}^{\nu_1}(x, h_p) \bar{\mathcal{F}}_{34}^{\nu_1}(\bar{x}, \bar{h}_p) \quad (70)$$

که در آن

$$\mathcal{F}_{34}^{\nu_1}(x, h_p) = \Lambda_{34}^{\nu_1}(q, h_p) H_{34}^{\nu_1}(q, h_p) \quad , \quad q(x) = e^{-\pi \frac{K(1-x)}{K(x)}} \quad (71)$$

که در آن K انتگرال بیضوی کامل نوع اول است، $0 < q < 1$ ،

$$\Lambda_{34}^{\nu_1}(q, h_p) = (16q)^{h_p - \frac{c-1}{24}} z^{\frac{c-1}{24} - h_1 - h_2} (z-1)^{\frac{c-1}{24} - h_2 - h_3} (\theta_3(q))^{\frac{c-1}{24} - 4(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)} \quad (72)$$

که در آن θ_3 تابع تتای بیضوی و

$$H_{34}^{\nu_1}(q, h_p) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(h_p) q^k \quad (73)$$

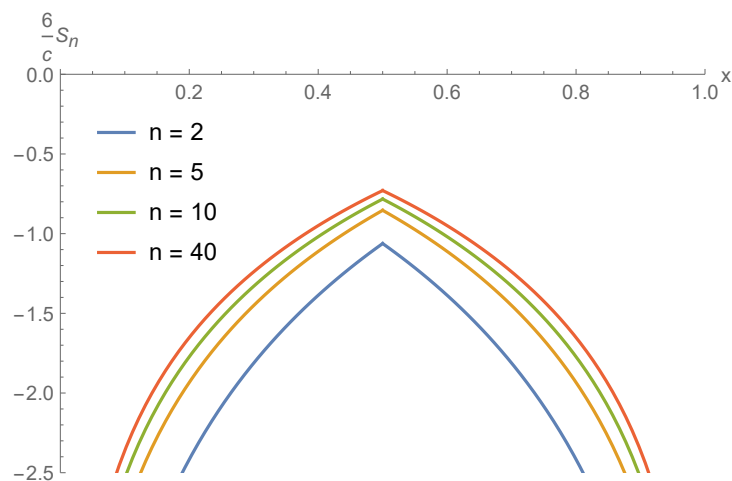
که در آن

$$c_k(h_p) = 1 + \sum_{i=1}^k \sum_{m=1, n=1, mn=i}^{\infty} \frac{R_{m,n}}{h_p - h_{m,n}} c_{k-i}(h_{m,n} + mn) \quad (74)$$

و $c_k(h_{m,n} + mn) = 1$ را می‌توان از

$$c_k(h_{m,n} + mn) = \sum_{i=1}^k \sum_{\mu=1, \nu=1, \mu\nu=i}^{\infty} \frac{R_{\mu,\nu}}{h_{m,n} + mn - h_{\mu,\nu}} c_{k-i}(h_{\mu,\nu} + \mu\nu) \quad (75)$$

^{۱۰} از کانونشنهای مرجع [۱۵] استفاده شده است.



شکل ۸: آنتروپی رننی محاسبه شده از روابط بازگشتی زاملودچیکف برای $k_{\max.} = 9$ و $b = 10^{-3}$.

محاسبه کرد. در روابط فوق داریم

$$\begin{aligned}
 h_{m,n} &= \frac{1}{4} \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 + \lambda_{m,n}^2, & \lambda_{m,n} &= \frac{1}{2} \left(nb + \frac{m}{b} \right) \\
 c &= 1 + \left(b + \frac{1}{b} \right)^2, & h_i &= \frac{c-1}{24} - \lambda_i^2 \\
 R_{m,n} &= 2 \frac{\prod_{p,q} (\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_{p,q})(\lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_{p,q})(\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_{p,q})(\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_{p,q})}{\prod'_{k,l} \lambda_{k,l}}
 \end{aligned} \tag{76}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 p &= -m + 1, -m + 3, \dots, m - 3, m - 1, \\
 q &= -n + 1, -n + 3, \dots, n - 3, n - 1, \\
 k &= -m + 1, -m + 2, \dots, m, \\
 l &= -n + 1, -n + 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{77}$$

و $\prod'_{k,l}$ در مخرج به معنی حذف $(k,l) = (0,0)$ و $(k,l) = (m,n)$ است. با شروع با $c.(h_{m,n} + mn) = 1$ می‌توان مابقی جملات را تولید کرد. با استفاده از این نمایش روابط بازگشتی یا نمایش‌های دیگر روابط بازگشتی علی‌الاصول می‌توان بلوک‌های منسجم را به صورت عددی با دقت دلخواه محاسبه کرد. به عنوان نمونه آنتروپی رننی دو ناحیه‌ی منفصل با استفاده از این روش برای $k_{\max.} < 10$ محاسبه شده است. شکل ۴.۵ را ببینید.

تمرین: نمودار ۴.۵ را بازتولید کنید.

- [١] L. Bombelli, R.K. Koul, J. Lee and R.D. Sorkin, A quantum source of entropy for black holes, Phys. Rev. D ٣٤ (١٩٨٦) .٣٧٣
- [٢] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT,” Phys. Rev. Lett. ٩٦, ١٨١٦٠٢ (٢٠٠٦) [arXiv:hep-th/٠٦٠٣٠٠١ [hep-th]].
- [٣] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy in free quantum field theory,” J. Phys. A ٤٢, ٥٠٤٠٠٧ (٢٠٠٩) [arXiv:٠٩٠٥.٢٥٦٢ [hep-th]].
- [٤] P. Calabrese and J. L. Cardy, “Entanglement entropy and quantum field theory,” J. Stat. Mech. ٠٤٠٦, P٠٦٠٠٢ (٢٠٠٤) [arXiv:hep-th/٠٤٠٥١٥٢ [hep-th]].
- [٥] P. Calabrese and J. L. Cardy, “Evolution of entanglement entropy in one-dimensional systems,” J. Stat. Mech. ٠٥٠٤, P٠٤٠١٠ (٢٠٠٥) [arXiv:cond-mat/٠٥٠٣٣٩٣ [cond-mat]].
- [٦] J. L. Cardy, “Conformal Invariance and Surface Critical Behavior”, ١٩٨٤ Nucl. Phys. B ٢٤٠ .٥١٤
- [٧] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal “Conformal Field Theory,” Springer, .١٩٩٦
- [٨] P. H. Ginsparg, “APPLIED CONFORMAL FIELD THEORY,” [arXiv:hep-th/٩١٠٨٠٢٨ [hep-th]].
- [٩] T. Hartman and J. Maldacena, JHEP ٠٥, (٢٠١٣) ٠١٤ [arXiv:١٣٠٣.١٠٨٠ [hep-th]].
- [١٠] P. Calabrese, J. Cardy and E. Tonni, “Entanglement entropy of two disjoint intervals in conformal field theory,” J. Stat. Mech. ٠٩١١, P١١٠٠١ (٢٠٠٩) [arXiv:٠٩٠٥.٢٠٦٩ [hep-th]].
- [١١] P. Calabrese, J. Cardy and E. Tonni, J. Stat. Mech. ١١٠١, P٠١٠٢١ (٢٠١١) [arXiv:١٠١١.٥٤٨٢ [hep-th]].
- [١٢] T. Hartman, “Entanglement Entropy at Large Central Charge.” [arXiv:١٣٠٣.٦٩٥٥ [hep-th]].
- [١٣] M. Headrick, “Entanglement Renyi entropies in holographic theories,” Phys. Rev. D ٨٢, (٢٠١٠) ١٢٦٠١٠ [arXiv:١٠٠٦.٠٠٤٧ [hep-th]].
- [١٤] A. L. Fitzpatrick, J. Kaplan and M. T. Walters, “Universality of Long-Distance AdS Physics from the CFT Bootstrap,” JHEP ٠٨, (٢٠١٤) ١٤٥ [arXiv:١٤٠٣.٦٨٢٩ [hep-th]].
- [١٥] Y. Kusuki, “New Properties of Large- c Conformal Blocks from Recursion Relation,” JHEP ٠٧, ٠١٠ (٢٠١٨) [arXiv:١٨٠٤.٠٦١٧١ [hep-th]].