ارتباطی جالب بین دوگان هولوگرافیک آنتروپی درهمتنیدگی BMSFT و آنتروپی زمان گونه CFT

رضا فارغ بال

دانشکده فیزیک

دانشگاه شهید بهشتی

کارگاه اطلاعات و گرانش کوانتومی، پژوهشگاه دانش های بنیادی

مرداد ۱۴۰۲

تناظر flat/BMSFT

- مشابه AdS/CFT که تناظری بین فضا-زمان های مجانبا AdS در d+1 بعد با یک نظریه میدان همدیس در d بعد برقرار می کند، می توان یک دوگانی برای فضا-زمانهای مجانبا تخت نیز پیشنهاد کرد.

- این تناظر که به flat/BMSFT یا flat/CCFT معروف است ارتباطی بین فضا-زمان های مجانبا تخت و یک نظریه میدان خاص در یک بعد کمتر که BMSFT نام دارد برقرار می کند. [arXiv:1203.5795]

- همانند تمام نظریه میدان های دیگر، BMSFT ها نیز با تقارن ها شناخته می شوند. در واقع BMSFT ها نظریه میدان هایی هستند که دارای تقارن BMS هستند.

- به عنوان مثال جبر مربوط به تقارن های BMS در دو و سه بعد به صورت زیر است:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}$$
$$[L_m, M_n] = (m-n)M_{m+n}$$
$$[M_m, M_n] = 0 \qquad (1)$$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} \quad , [\tilde{L}_m, \tilde{L}_n] = (m-n)\,\tilde{L}_{m+n} \quad , [\tilde{L}_m, L_n] = 0$$
$$[L_l, T_{m,n}] = \left(\frac{l+1}{2} - m\right) T_{m+l,n},$$
$$[\tilde{L}_l, T_{m,n}] = \left(\frac{l+1}{2} - n\right) T_{m,n+1}, \qquad (2)$$

[gr-qc/0610130], [arXiv:0909.2617]

- همان طور که دیده می شود هر دوی این جبرها بی نهایت بعدی هستند. این بینهایت بودن جبر باعث می شود که بتوان برای نظریه میدان های متناظر ویژگی های جهانشمولی پیدا کرد که از کنش مستقل هستند.

- در واقع ایده معرفی این تناظر به خود AdS/CFT بر می گردد که تقارن های CFT در d بعد با تقارن های مجانبی فضا-زمانهای مجانبا AdS در d+1 بعد معادل می شود.

- تقارن های مجانبی دسته ای از تغییر مختصات هستند که شکل یک دسته متریک را در ناحیه خاص از فضا-زمان که به آن ناحیه مجانبی گوییم ناوردا نگه می دارند.

- در واقع تقارن های مجانبی تعمیم آیزومتری به عنوان تقارن در کل فضا-زمان به بخش خاصی از فضا زمان هستند.

- در این تعریف به دسته ای از متریک ها نیاز داریم که باید با استفاده از شرط مرزی متریک هایی که در این دسته قرار می گیرند را مشخص کنیم.

- در دهه 60 میلادی Bondi, Metzner, Sachs نشان دادند که تقارن های مجانبی برای فضا-زمان های مجانبا تخت چهار بعدی در بی نهایت پوچ (null infinity) یک گروه بزرگ تر از گروه پوانکاره است که گروه BMS نام دارد.

- امروز می دانیم که اگر شرط خوش تعریف بودن در کل فضا زمان را کنار بگذاریم، جبر مربوط به این تقارن با رابطه (2) داده می شود.

- همچنین برای فضا-زمانهای مجانبا تخت در سه بعد نیز جبر تقارن مجانبی با رابطه (1) داده می شود.

- نتیجه اینکه با الهام از AdS/CFT به فضا-زمانهای مجانبا تخت در d+1 که تقارن مجانبی آنها با گروه BMS داده می شود، یک نظریه میدان در یک بعد کمتر که دارای همان تقارن است متناظر میکنیم. این نظریه میدان را BMSFT می نامیم.

شناخت بیشتر BMSFT ها

- در دوگانی گرانش/نظریه میدان های پیمانه ای به دنبال روشی هستیم که به مطالعه غیر مستقیم گرانش کوانتومی با استفاده از نظریه دوگان آن بپردازیم.

- بنابراین واقعی بودن نظریه میدان و چگونگی ظهور آن در طبیعت برای ما مهم نخواهد بود و تنها نتایج و پیش بینی های منتج از تناظر را دنبال خواهیم کرد.

- برای شناخت BMSFT ها دو راه در دسترس خواهد بود. یکی اینکه از خود تقارن ها شروع کنیم و به دنبال کنش هایی بگردیم که دارای این تقارن هستند و یا اینکه از AdS/CFT شروع کنیم و به flat/BMSFT برسیم.

- فضا-زمانهای مجانبا AdS با گرفتن حد تخت که همان حد ثابت کیهان شناسی صفر است به فضا-زمانهای مجانبا تخت تبدیل می شوند.

- به عنوان مثال متریک AdS سه بعدی در مختصات سراسری به صورت زیر، پس از گرفتن حد تخت که همان حد $\ell \to \infty$ است، به متریک مینکوفسکی تبدیل می شود.

$$ds^2 = -\left(1+\frac{r^2}{\ell^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1+\frac{r^2}{\ell^2}\right)} + r^2 d\phi^2$$

- بنابراین با شروع از AdS/CFT و گرفتن حد تخت در سمت گرانش از AdS به flat می رسیم. پس سوال وارد این است که معادل حد تخت گرانشی در سمت نظریه میدان چیست؟

- پیشنهاد این بوده است که حد تخت معادل با حد فرانسیتی در سمت نظریه میدان است. یعنی BMSFT ها با شرط $c \to 0$ که c سرعت نور است از CFT به دست می آید. نتیجه اینکه BMSFT ها نظریه میدان های همدیس فرانسبیتی هستند! [arXiv:1203.5795]

- این نتیجه و اینکه تقارنهای BMS بی نهایت بعدی هستند باعث می شود که چندین ویژگی یونیورسال برای BMSFT ها به دست آید.

- به عنوان مثال همانند CFT ها می توان با پیدا کردن نمایشی برای فضای هیلبرت نظریه، به دسته بندی حالتها پرداخت و فرمولی مشابه فرمول کاردی در CFT دوبعدی برای آنتروپی حالتها به دست آورد: [arXiv:1208.4372]

$$S = 2\pi\left(h_l\sqrt{\frac{C_M}{2h_M}} + C_L\sqrt{\frac{h_M}{2C_M}}\right)$$

- مشابه تمام نظریه میدان های دیگر، در BMSFT نیز می توان برای یک زیر سیستم آنتروپی درهمتنیدگی تعریف کرد. برای یک زیر سیستم مکان گونه در نظریه ی دو بعدی که با رابطه $-\frac{l_\phi}{2} < \phi < \frac{l_\phi}{2}$ و $-\frac{l_u}{2} < u < \frac{l_u}{2}$ مشخص می شود، آنتروپی درهمتنیدگی با فرمول زیر داده می شود: [arXiv:1410.4089]

$$S_{EE} = \frac{C_L}{6}\log\frac{l_\phi}{\varepsilon_\phi} + \frac{C_M}{6}\log\left(\frac{l_u}{l_\phi} - \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_\phi}\right)$$

- می توان توابع چند نقطه ای میدان ها را در BMSFT ها نیز به دست آورد که دارای شکل یونیورسال زیر هستند:[arXiv:1507.05620]

$$\langle M^1 N^2\rangle = \frac{C_M}{2s_{12}^4}, \qquad \langle N^1 N^2\rangle = \frac{C_L - 2C_M\tau_{12}}{2s_{12}^4}$$

$$\langle M^1 N^2 N^3\rangle = \frac{C_M}{s_{12}^2 s_{13}^2 s_{23}^2},$$

$$\langle N^1 N^2 N^3\rangle = \frac{C_L - C_M\tau_{123}}{s_{12}^2 s_{13}^2 s_{23}^2},$$

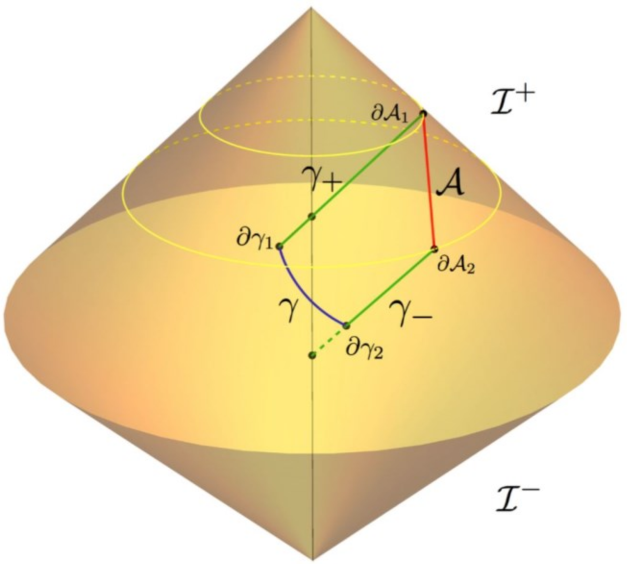
- تمام کمیت های قابل محاسبه در BMSFT ها باید طبق تناظر flat/BMSFT به یک محاسبه گرانشی در فضا-زمان مجانبا تخت مربوط شوند.

- برای آنتروپی گرمایی در مقاله [arXiv:1208.4372]، برای آنتروپی درهمتنیدگی در مقاله [arXiv:1706.07552] و برای توابع چند نقطه ای در مقاله [arXiv:1701.00063] می توان محاسبات گرانشی متناظر را پیدا کرد.

- تمرکز ما روی دوگان هولوگرافیک برای آنتروپی درهمتنیدگی است. همانند پیشنهاد ریو-تاکایاناگی در چارچوب AdS/CFT [hep-th/0603001] که مساحت سطح های فرینه در توده به آنتروپی درهمتنیدگی زیر سیستم ها منجر می شود، در flat/BMSFT نیز می توان به دنبال چنین سطوح فرینه گشت.

دوگان هولوگرافیک برای آنتروپی درهمتنیدگی BMSFT

- منحنی ای که مساحت آن در فضا زمان های تخت سه بعدی به آنتروپی درهمتنیدگی BMSFT دوبعدی منجر می شود به صورت زیر است: [arXiv:1706.07552]



- این منحنی دارای سه بخش است و از یک ژئودزی مکان گونه در وسط γ و دو ژئودزی پوچ $\gamma_\pm$ تشکیل شده است.

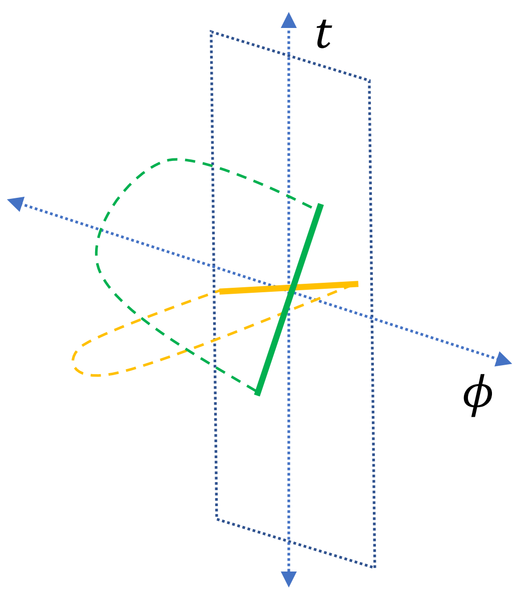
رابطه بین منحنی های فرینه در AdS/CFT و flat/BMSFT

- آیا می شود سطح های فرینه در فضا زمان تخت را با حدگیری از سطوح فرینه در فضا-زمان AdS به دست آورد؟

- حدگیری مستقیم از سطوح ریو-تاکایاناگی به سطح های مطلوب در فضا-زمان های تخت منجر نمی شود و باید به دنبال سطوح جدیدی باشیم.

- منحنی اصلی (زرد) و منحنی که حد تخت خوش تعریف دارد (سبز) در شکل زیر مشخص شده اند:

[arXiv:2006.16122]



- این منحنی جدید در نقاطی مرز را قطع می کند که دو سر یک بازه زمانگونه در مرز است.

- طول کلی این منحنی برابر با آنتروپی درهمتنیدگی بازه مکان گونه است ولی اگر با دو منحنی پوچ آن را قطع کنیم طول قسمت وسط بعد از حدگیری دقیقا برابر با آنتروپی درهمتنیدگی BMSFT خواهد بود.

- بنابراین منحنی ای که آنتروپی درهمتنیدگی برای یک بازه مکانگونه در BMSFT را به دست می دهد، از حد یک منحنی به دست می آید که دو سر یک بازه زمانگونه را در CFT به همدیگر وصل می کند.

- بنابراین می توان به یک دستورالعمل برای پیدا کردن منحنی های فرینه در flat/BMSFT با استفاده از سطوح فرینه در AdS/CFT رسید.

روش به دست آوردن منحنی فرینه در flat/BMSFT

- برای اینکه بگوییم این منحنی جدید چگونه به دست می آید نیاز به این داریم که ببینیم منحنی فرینه برای flat/BMSFT چگونه به دست آمد.

- روش کار استفاده از تبدیل ریندلر است که آنتروپی درهمتنیدگی را به یک آنتروپی دمایی تبدیل می کند و مستقل از هولوگرافی در نظریه میدان تعریف می شود.[arXiv:1102.0440]

- اگر ρ_A ماتریس چگالی برای یک زیر سیستم A و $\rho_{\tilde{B}}$ ماتریس چگالی برای زیر سیستم $\tilde{B}$ باشد به طوریکه با یک تبدیل یکانی به همدیگر تبدیل شوند یعنی

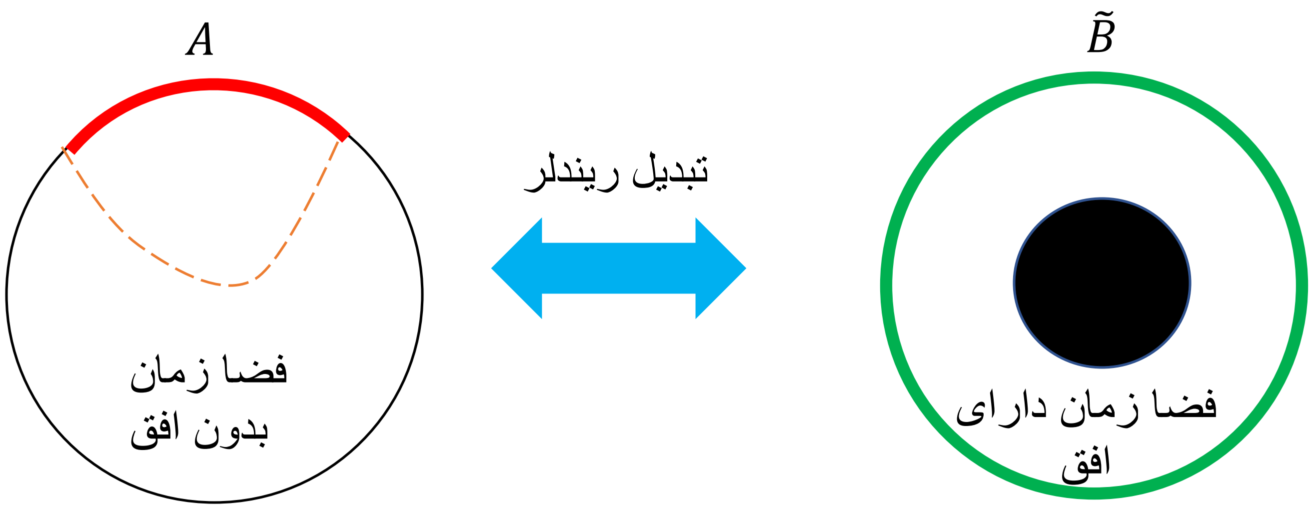
$$\rho_A = U_R \rho_{\tilde{B}} U_R^{-1}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$S_A = S_{\tilde{B}}$$

- اگر $\tilde{B}$ یک زیر سیستم دمادار باشد دوگان هولوگرافیک آنتروپی آن با مساحت افق در یک متریک افق دار با رفتار مجانبی مشخص شده، داده خواهد شد.

- پس با شروع از سطح این افق و اعمال تبدیل ریندلر معکوس می توانیم به سطحی در متریک اولیه برسیم که همان سطح فرینه ای است که آنتروپی درهمتنیدگی را به دست می دهد.



- فضا-زمان افق دار که در هولوگرافی فضا-زمان های تخت سه بعدی بسیار استفاده می شود، فضا زمان تخت کیهان شناختی یا FSC است:[hep-th:0203031]

$$ds^2 = \tilde{M}d\tilde{u}^2 - 2d\tilde{u}d\tilde{r} + \tilde{J}d\tilde{u}d\tilde{\phi} + \tilde{r}^2 d\tilde{\phi}^2$$

که $\tilde{M}$ و $\tilde{J}$ جرم و اندازه حرکت زاویه ای هستند.

- FSC از حد تخت متریک BTZ به دست می آید و دارای یک افق کیهان شناختی است:

$$r_C = \frac{\tilde{J}}{2\sqrt{\tilde{M}}}$$

- نتیجه اینکه منحنی های فرینه در هولوگرافی تخت از تبدیل ریندلر معکوس که روی $\tilde{r} = \tilde{r}_C$ اعمال می شود به دست می آید.

روش به دست آوردن منحنی فرینه با حد تخت خوش تعریف

- برای هر منحنی فرینه می توان یک بردار کیلینگ ζ^{μ} در توده پیدا کرد که روی این سطح صفر باشد. به این بردار شار ماجولار توده می گوییم که مقدار آن در روی مرز همان شار هندسی است که از هامیلتونی ماجولار به دست می آید.

- بعد از تبدیل ریندلر این بردار به یک بردار کیلینگ در متریک افق دار تبدیل می شود که بر افق خارجی عمود است:

$$\tilde{\zeta} = \frac{2\pi}{\tilde{\kappa}_+}\left(\partial_{\tilde{u}} - \widetilde{\Omega}_+ \partial_{\tilde{\phi}}\right)$$

که $\tilde{\kappa}_+$ و $\widetilde{\Omega}_+$ به ترتیب گرانش سطحی و سرعت زاویه ای در افق خارجی است.

- اگر از متریک BTZ که یک سیاهچاله سه بعدی مجانبا AdS است شروع کنیم و $\tilde{\zeta}$ را به دست آوریم خواهیم دید که در حد تخت خوش تعریف نیست.

- نکته جالب اینکه بردارکیلینگی مثل $\tilde{\lambda}$ که بر افق داخلی عمود است و به صورت زیر داده می شود دارای حد تخت خوش تعریف است: [arXiv:2006.16122]

$$\tilde{\lambda} = \frac{2\pi}{\tilde{\kappa}_-}\left(\partial_{\tilde{u}} - \tilde{\Omega}_- \partial_{\tilde{\phi}}\right)$$

که $\tilde{\kappa}_-$ و $\tilde{\Omega}_-$ به ترتیب گرانش سطحی و سرعت زاویه ای در افق داخلی هستند.

- حدس ما این بود که سطح فرینه با حد تخت خوش تعریف، سطحی است که بعد از تبدیل ریندلر بردار شار ماجولار توده آن $\tilde{\lambda}$ است.

- این سطح جدید دقیقا سطح فرینه ای است که به بازه زمان گونه در مرز AdS متصل می شود.

ضمیمه: شار ماجولار و شار ماجولار توده

- چون ρ_A هرمیتی است می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\rho_A = \frac{e^{-H_A}}{Tr(e^{-H_A})}$$

که به H_A هامیلتونی ماجولار گفته می شود.

- هامیلتونی ماجولار بار پایستار مربوط به یک شار هندسی ، K_t است که به آن شار ماجولار گفته می شود.

- وقتی حرف از دوگانی بین گرانش و نظریه میدان ها می زنیم شار ماجولاربه عنوان یک بردار در مرز فضا زمان مطرح می شود که یک خاصیت ویژه دارد یعنی در مرزهای بازه که سطح RT در مرز فضا زمان به آن میچسبد، صفر است.

- شار ماجولار در مرز از یک بردار کیلینگ کلی در فضا زمان مثل ζ^{μ} به دست می آید. یعنی

$$\zeta^{\mu}|_{\text{مرز فضا زمان}} = K_t$$

- به ζ^{μ} شار ماجولار توده گوییم و برای آن داریم

$$\zeta^{\mu}|_{RT\ \text{سطح}} = K_t$$

خلاصه

- همانند AdS/CFT می توان هولوگرافی برای فضا زمانهای به طور مجانبی تخت هم معرفی کرد که یکی از کاندیدا ها flat/BMSFT نام دارد.

- BMSFT یک نظریه میدان همدیس است که از حد فرانسبیتی CFT به دست می آید.

- تقارن های BMSFT در سه و چهار بعد بی نهایت بعدی است پس می توان ویژگیهای یونیورسال برای آنها پیدا کرد.

- آنتروپی در همتنیدگی برای BMSFT های دو بعدی هم شکل یونیورسال دارد.

- می توان مشابه پیشنهاد RT در AdS/CFT برای آنتروپی درهمتنیدگی BMSFT نیز سطوح فرینه در توده پیدا کرد.

- این سطوح فرینه تماما مکان گونه نیستند و دو سر آنها با دو ژئودزی نال به بینهایت پوچ وصل می شوند.

- منحنی هایی که از روش RT برای زیر سیستم های مکان گونه به دست می آیند دارای حد تخت خوش تعریف نیستند.

- سطح فرینه که حد خوش تعریف دارد به دو سر یک بازه زمانگونه وصل می شود.

- این سطح جدید دارای یک بردار شار ماجولار است که بعد از تبدیل ریندلر به افق داخلی BTZ عمود می شود.

با تشکر از توجه شما