به نام خدا

AdS/CFT
Gauge/Gravity duality

محمد رضا محمدی مظفر

90/7/24

فهرست

تبدیلات گروه همدیس:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x)$$

تبدیل تانسور متریک:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x)$$

تبدیل متریک به ازای تغییرات کوچک: $(x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}, \quad \varepsilon << 1)$

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}\varepsilon_{\nu} + \nabla_{\nu}\varepsilon_{\mu}$$

خواص:

- ناوردایی زوایای بین بردارها
- ناوردایی نسبت اندازه بردارها

معادله تبدیل متریک تخت:

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \left[\Omega(x) - 1\right]\eta_{\mu\nu}(x)$$

$$\left[\partial^2 \eta_{\mu\nu} + (d-2)\partial_\mu \partial_\nu\right]\partial_\sigma \varepsilon^\sigma = 0 \qquad \begin{cases} I) & d = 2 \\ II) & d > 2 \end{cases}$$

$$d > 2 \;\; \rightarrow \;\; \partial^2(\partial_\sigma \varepsilon^\sigma) = 0$$

بسط جواب تا مرتبه ۲:

$$\varepsilon_\mu = a_\mu + \omega_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

$$\omega_{\mu\nu} = \left(\omega_{\mu\nu}\right)_{asym.} + \left(\omega_{\mu\nu}\right)_{sym.} = \tilde{\omega}_{\mu\nu} + \lambda \eta_{\mu\nu}$$

$$c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$$

زیر گروه پوانکاره (انتقال + چرخش):

انتقال $\varepsilon_\mu = a_\mu$

$$x' = x + a$$

چرخش $\varepsilon_\mu = \tilde{\omega}_{\mu\nu} x^\nu$

$$x'^\mu = \tilde{\omega}^\mu_\nu x^\nu$$

تقارن های اضافی:

مقیاس $\varepsilon_\mu = \lambda \eta_{\mu\nu} x^\nu$ $\quad x' = \Lambda\ x$

خاص $\varepsilon_\mu = c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$ $\quad x' = \dfrac{x - bx^2}{1 - 2\vec{b}.\ \vec{x} + b^2 x^2}$

تبدیل	مولد	تعداد مولفه ها در بُعد d	ژاکوبی تبدیل $\left\lvert\frac{\partial x'}{\partial x}\right\rvert = \Omega^{-\frac{d}{2}}$
انتقال	$P_\mu = -i\partial_\mu$	d	1
مقیاس	$D = -ix^\mu \partial_\mu$	1	λ^d
چرخش	$M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu + x_\nu \partial_\mu)$	$\frac{d(d-1)}{2}$	1
خاص	$K_\mu = i(2x_\mu \vec{x}.\vec{\partial} + x^2 \partial_\mu)$	d	$(1 - 2\vec{b}.\vec{x} + b^2 x^2)^{-d}$

جبر همدیس

$$\left[D, P_{\mu}\right] = iP_{\mu}$$
$$\left[D, K_{\mu}\right] = -iK_{\mu}$$
$$\left[P_{\mu}, K_{\nu}\right] = 2i(\eta_{\mu\nu} D + M_{\mu\nu})$$
$$\left[M_{\mu\nu}, P_{\rho}\right] = i(\eta_{\nu\rho} P_{\mu} - \eta_{\mu\rho} P_{\nu})$$
$$\left[M_{\mu\nu}, K_{\rho}\right] = i(\eta_{\nu\rho} K_{\mu} - \eta_{\mu\rho} K_{\nu})$$
$$\left[M_{\mu\nu}, M_{\rho\tau}\right] = i(\eta_{\mu\tau} M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} M_{\mu\tau} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\tau} - \eta_{\nu\tau} M_{\mu\rho})$$

گروه تقارن $SO(1, d+1)$

میدان های شبه اولیه:

$$\varphi_j(x) \to \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{\frac{\Delta_j}{d}} \varphi_j(x')$$

شرط ناوردایی نظریه:

$$\langle \phi_1(x_1)\ldots\phi_n(x_n)\rangle = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|_{x=x_1}^{\frac{\Delta_1}{d}} \cdots \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|_{x=x_n}^{\frac{\Delta_n}{d}} \langle \phi_1(x_1')\ldots\phi_n(x_n')\rangle$$

✓ قید تقارن منجر به ثابت شدن شکل موجودات فیزیکی خواهد شد.

تابع ۲ نقطه ای:

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = \begin{cases} \dfrac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}} & if \quad \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta \\ 0 & if \quad \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases}$$

تابع ۳ نقطه ای:

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}\, x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}\, x_{13}^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}}$$

معادله اینشتین:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}; \qquad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

معادله اینشتین با ثابت کیهان شناسی:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}}$$

در غیاب ماده $\left(T_{\mu\nu} = 0\right)$:

$$R_{\mu\nu} = \frac{2\Lambda}{d-2} g_{\mu\nu}$$

جواب ۱ (فضای دوسیته):

$$\Lambda > 0, \quad a^2 = \frac{3}{\Lambda} \quad \rightarrow \quad ds^2 = (1 - \frac{r^2}{a^2})dt^2 - (1 - \frac{r^2}{a^2})^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (dS)$$

جواب ۲ (فضای پاددوسیته):

$$\Lambda < 0, \quad a^2 = -\frac{3}{\Lambda} \;\; \rightarrow \;\; ds^2 = (1+\frac{r^2}{a^2})dt^2 - (1+\frac{r^2}{a^2})^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (AdS)$$

شکل اقلیدسی متریک:

$$ds^2 = \left(\frac{L}{z}\right)^2 \left(dz^2 + dx^i dx^i\right) \qquad \begin{cases} z \rightarrow 0 & \textit{boundary} \\ z \rightarrow \infty & \textit{center} \end{cases}$$

خواص فضای AdS:

- بیشینه تقارن فضا زمانی (۱۰ بردار کیلینگ).
- نداشتن تکینگی
- وجود مرز

معرفی ساختارهای همدیس

$$conformal \quad \ldots \quad space = \Lambda(x)(\quad \ldots \quad space)$$

✓ مزیت: بررسی ساختار علّی فضا-زمان بدون مواجهه با بینهایت ها.

ساختار همدیس AdS :

$$ds^2_{boundary} \propto -d\tau^2 + d\Omega^2_{d-1} \qquad (S^1 \times S^{d-1})$$

$$-\infty \leq \tau \leq +\infty \quad \rightarrow \quad boundary \quad symmetry: \ (R \times S^{d-1})$$

✓ تقارن مرزی AdS_{d+1} زیرگروه $SO(2,d)$ است.

حدس اولیه

نظریه میدان کوانتومی هم ارز با نظریه گرانشی است.
در حد خاصی گرانش کلاسیک و لذا قابل حل خواهد بود.
جواب گرانشی اطلاعات در مورد مشاهده پذیرهای نظریه میدان می دهد.

اثبات؟!

سرنخ های تلطیف کننده

1. قضیه Weinberg-Witten
2. اصل هولوگرافی
3. نقش بعد اضافه

J. McGreevy, [arXiv:0909.0518v3].

قضیه Weinberg-Witten

نظریه میدان دارای تانسور انرژی تکانه و تقارن پوانکاره نمی تواند ذره با اسپین بیش از ۱ و حامل تکانه داشته باشد.

$$P^{\mu} = \int d^{D}x\, T^{0\mu}$$

آیا نسبیت عام در شرایط قضیه صادق است؟

معادلات اینشتین خطی شده منجر به موجود بدون جرم با اسپین ۲ می شود. (graviton)

نسبیت عام در شرایط قضیه WW صدق نمی کند:

$$T^{\mu\nu} \propto \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$$

درجه آزادی گراویتون لزوما در همان فضا زمان شامل QFT زندگی نخواهد کرد!

اصل هولوگرافی

الف) آنتروپی سیاهچاله متناسب با مساحت افق آن است.

$$S_{BH} = \frac{A}{4G_N}$$

ب) ماده بسیار چگال می تواند به سیاهچاله تبدیل شود.

بیشینه آنتروپی نظریه گرانشی در یک ناحیه از فضا برابر با مساحت مرز آن فضاست.

$$S_{Max} \propto A \qquad GR$$

بیشینه آنتروپی نظریه میدان در یک ناحیه از فضا متناسب با حجم آن فضاست.

$$S_{Max} \propto V \qquad QFT$$

تعداد درجات آزادی GR در بعد d تعداد درجات آزادی QFT در بعد d-1

نقش بعد اضافه

معادله RG برحسب مقیاس انرژی موضعی است :

$$M\frac{\partial g}{\partial M}=\beta\big(g(M)\big)$$

موضعی بودن فضا-زمان!

$$ds^2_{AdS}=\left(\frac{L}{z}\right)^2\left(dz^2+dx^i dx^i\right)$$

$$\begin{cases} z\to 0 & boundary \\ z\to\infty & center \end{cases}$$

رابطه طول ها:

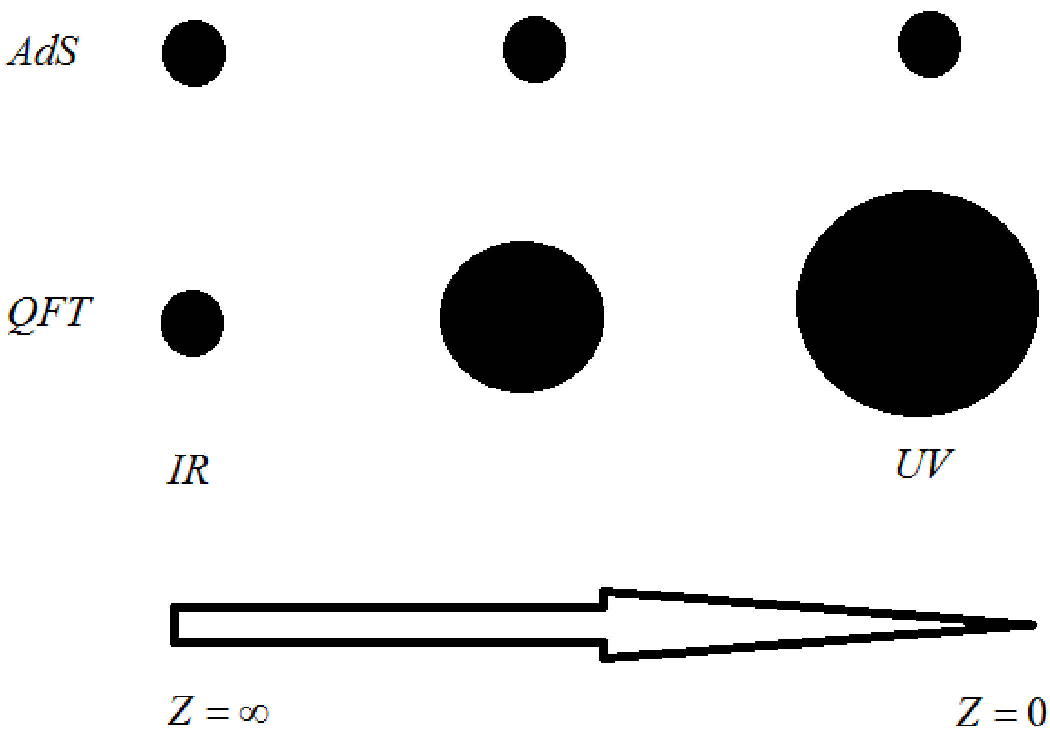
$$z=const.\to dS^2_{AdS}=\frac{1}{z^2}dS^2_{QFT}$$

رابطه انرژی ها:

$$E_{QFT}=\frac{1}{z}E_{AdS}$$

مختصه شعاعی AdS مثل مقیاس انرژِی QFT است!

$$\begin{cases} z \to 0 & boundary \Leftrightarrow UV \quad in \quad QFT \\ z \to \infty & center \Leftrightarrow IR \quad in \quad QFT \end{cases}$$



AdS/CFT

✓ حدس مالداسنا:

$$\text{"Classical gravity" on asymptotically } AdS_{d+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{"Strongly coupled" } CFT_d \text{ which lives on the boundary of } AdS_{d+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Kinematic} \\ \textit{Dynamic} \end{array}\right\}$$ وجوه دوگانگی

Gravity	CFT
Kinematic duality	
Symmetries, Charges, Gauge Symmetry	Symmetries, Charges, Global Symmetry
↳ Same group structure ↲	
Fields(scalar, tensor,...)	Operators(scalar, tensor,...)

AdS/CFT

محاسبه تابع چند نقطه ای در رهیافت انتگرال مسیر:

تابعی مولد:

$$Z[J] \equiv \int [DO]\, \exp\left(i\int (L + J(x)O(x))d^d x\right)$$

$$\underbrace{\langle OOO\ldots\rangle}_{n} = \int [DO]\, \underbrace{OOO\ldots}_{n} \exp\left(i\int L\, d^d x\right) = (-i)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J^n}\bigg|_{J=0}$$

✓ وجه دینامیکی تناظر شامل هم ارزی موجودات (مشاهده پذیرهای) فیزیکی است.

$$AdS_{d+1} \quad \left\{\begin{matrix} \phi \to O \\ \phi_0 \to J \end{matrix}\right\} \quad CFT_d$$

$$Z[J] = \exp\left(S\left[\phi, \phi\big|_{z=0} = \phi_0\right]\right)$$

- مراحل محاسبه:
  - نوشتن کنش داخل گرانش برای میدان مورد نظر: $S=\int L\left(\phi,\partial\phi,\ldots\right)d^{d+1}x$
  - به دست آوردن معادله حرکت و حل آن تحت شرط مرزی:

$$\frac{\delta S}{\delta\phi}=0 \qquad \& \qquad \phi\left(z=0,x\right)=\phi_0(x)$$

  - قرار دادن جواب در داخل کنش و خواندن تابعی مولد بر حسب مقدار مرزی میدان:

$$Z\left[\phi_0\right]=\exp\left(S_{on\ shell}\right)$$

  - محاسبه تابع چند نقطه ای:

$$\underbrace{\langle OOO\ldots\rangle}_{n}=\left(-i\right)^n\left.\frac{\delta^n Z\left[\phi_0\right]}{\delta\phi_0{}^n}\right|_{\phi_0=0}$$

مثال میدان اسکالر

کنش:

$$S=\frac{1}{2}\int d^dx \;\; dz \;\; \sqrt{g}\left[\partial_\mu\phi \;\; \partial^\mu\phi+m^2\phi^2\right]$$

معادله حرکت:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left[\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right]-m^2\phi=0$$

جواب در حد $z\to 0$:

$$\phi(z,X)=z^{\alpha_-}\phi_0(X)+z^{\alpha_+}\phi_1(X); \qquad \alpha_\pm=\frac{d}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+m^2}$$

چون همواره $\alpha_+>0$ و $\alpha_-<0$ است می توان $\phi_0(X)$ را تعبیر به چشمه نمود.

$$\Delta=d-\alpha_-=\alpha_+$$

مثال میدان اسکالر

خواندن بعد جرمی عملگر دوگان از روی کنش مرزی:

$$S = \int d^d x\, \phi_0\left(X\right) O\left(X\right) \;\; \Rightarrow \;\; [O] = \Delta$$

صورت کلی رفتار مرزی جواب:

$$\begin{cases} 1) \quad z^{d-\Delta} \quad \text{non-normalizable} \quad \text{mode} \\ 2) \quad z^{\Delta} \quad\quad \text{normalizable} \quad \text{mode} \end{cases}$$

جواب معادله از روی تابع گرین:

$$\phi\left(z, X\right) = \int d\, X' \;\; K_\Delta\left(z, X, X'\right) \;\; \phi_0\left(X'\right); \qquad\qquad K_\Delta\left(z, X, X'\right) \propto \left(\frac{z}{z^2 + (X - X')^2}\right)^{\Delta}$$

کنش به ازای جواب:

$$S_{on\ shell} \propto \int d^d X\; d^d X' \frac{\phi_0(X)\phi_0(X')}{\left|X - X'\right|^{2\Delta}}$$

مثال میدان اسکالر

تابعی مولد ازای جواب:

$$Z[\phi_0] \propto \exp\left(\int d^d X \; d^d X' \frac{\phi_0(X)\phi_0(X')}{|X - X'|^{2\Delta}} \right)$$

تابع دو نقطه ای:

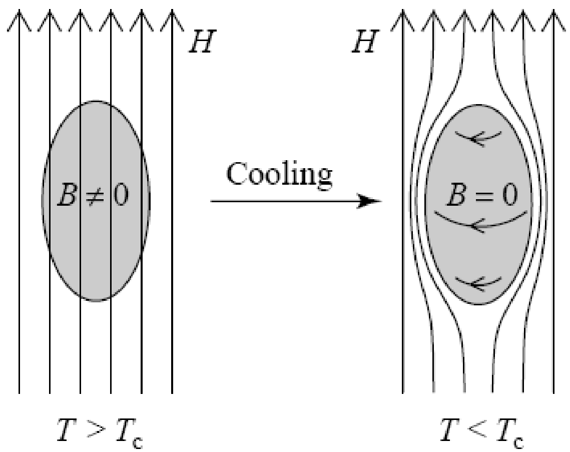
$$\langle OO \rangle = \left. \frac{\delta^2 Z}{\delta\phi_0 \delta\phi_0} \right|_{\phi_0 = 0} = c \frac{1}{|X - X'|^{2\Delta}}$$

محاسبات مشابه برای A_μ و ψ .

به عنوان ابزار محاسبه در:

ماده چگال، سیالات،کیهانشناسی، QCD، RHIC.

ویژگی های اولیه

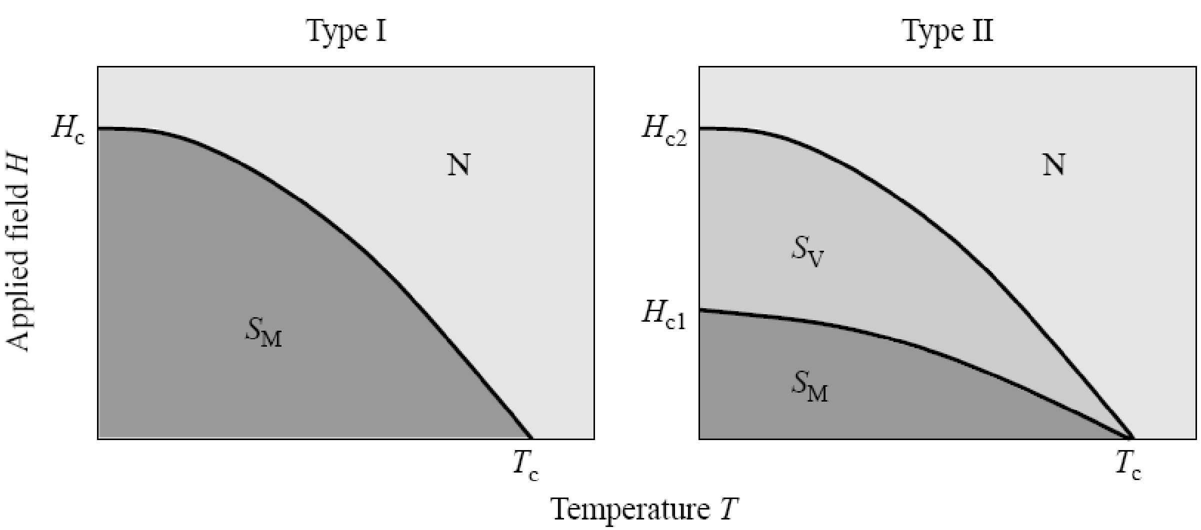


✓ رسانندگی DC بینهایت

(طول عمر جریان از مرتبه 10^5 سال)

✓ طرد شار مغناطیسی

(دیامغناطیس کامل $\chi_m = -1$)



ابررسانای نوع I و نوع II :

✓ نظریه لاندن

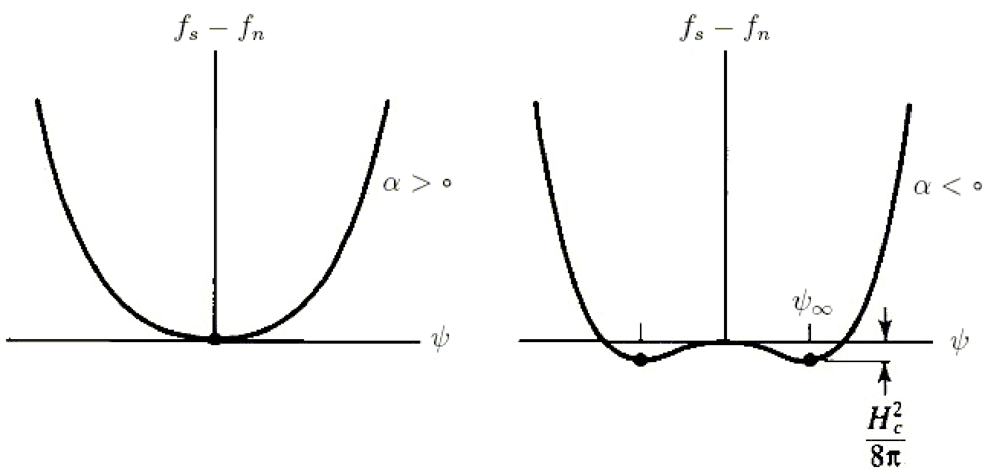
معادلات لاندن

$$\vec{J}_s = -\left(\mu_\circ \lambda^2\right)^{-1} \vec{A} \rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \mu_\circ \lambda^2 \dfrac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} \\ \vec{B} = -\mu_\circ \lambda^2 \nabla \times \vec{J}_s \end{cases}$$

میدان مغناطیسی داخل ابررسانا

$$B_{in}(z) = B_\circ e^{-\frac{z}{\lambda}}$$

✓ نظریه لاندائو – گینزبورگ



$$n_s(r) = |\psi|^2 \propto (T_c - T) \quad Local \;\; density \;\; of \;\; S.C. \;\; electrons$$

نظریه BCS

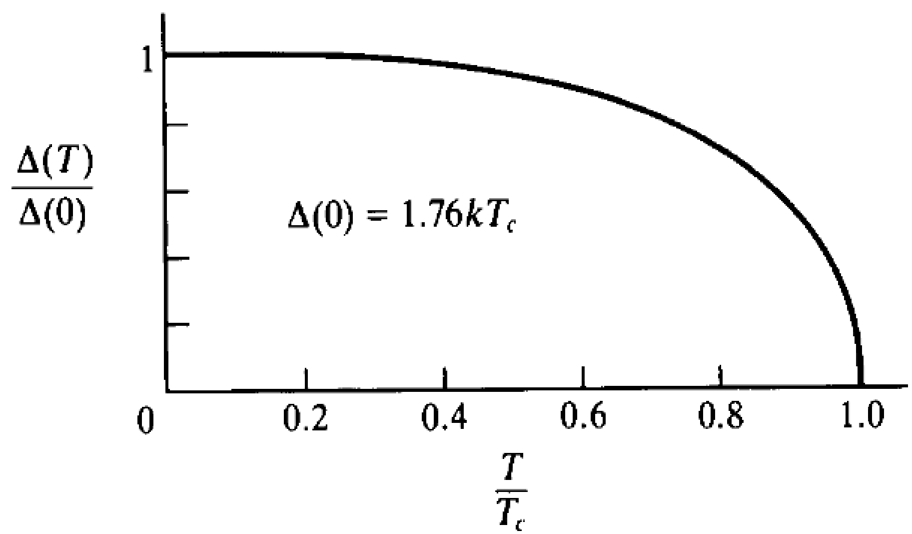
✓فرض کوپر:

$$V_{kk'} = \begin{cases} -V & \varepsilon_k = E_F \pm \hbar\omega_c \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

انرژی زوج

$$E \approx 2E_F - 2\hbar\omega_c e^{-\frac{2}{N(0)V}}$$

گاف انرژی به عنوان پارامتر نظم:



$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \approx 1.74\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad T \approx T_c$$

دما

- دما به عنوان دوره تناوب

$$\langle O \rangle_T = \int D\varphi \langle \varphi(x),t \,|\, O e^{-H/T} \,|\, \varphi(x),t \rangle = \int D\varphi \langle \varphi(x),t \,|\, O \,|\, \varphi(x),t+i/T \rangle.$$

- پیدایش دما در گرانش $\longleftarrow$ سیاهچاله

- متریک پاددوسیته $\longleftarrow$ سیاهچاله شوارتزشیلد-پاددوسیته

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2}\left(-f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + dx^i dx^i\right), \qquad f(r) = 1 - \left(\frac{r}{r_+}\right)^d$$

$$T = \frac{d}{4\pi r_+}$$

ناوردایی مقیاس $\longleftarrow$ دما صفر یا غیر صفر

دمای مرجع نداریم $\longleftarrow$ محتوی گرانشی کافی نیست

پتانسیل شیمیایی

✓ متریک پاددوسیته ← سیاهچاله رایسنر-نورستروم-پاددوسیته

$$\left.\begin{aligned} H &\propto \int dx \quad \mu \quad J^t \\ H &\propto \int dx \quad A_t \quad J^t \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad A_t \propto \mu$$

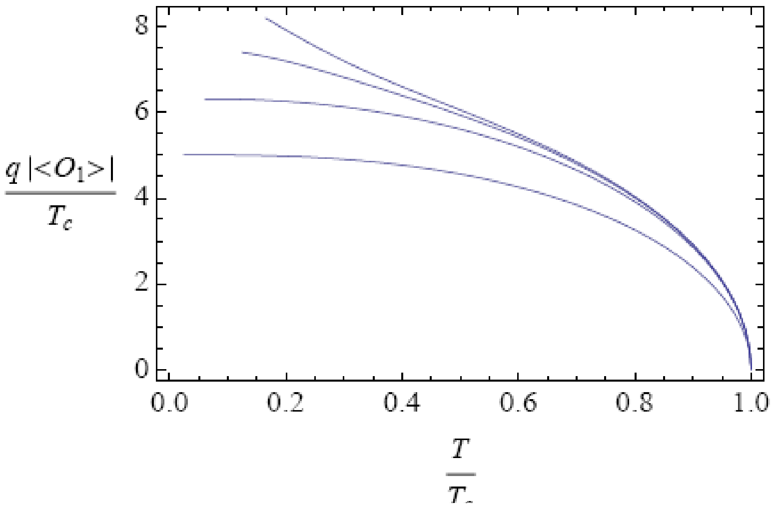
$$f(r) = 1 - \left(1 + \frac{r_+^2 \mu^2}{\gamma^2}\right)\left(\frac{r}{r_+}\right)^d + \frac{r_+^2 \mu^2}{\gamma^2}\left(\frac{r}{r_+}\right)^{2(d-1)} , \quad \gamma^2 = \frac{(d-1)L^2 g_{EM}^2}{(d-2)k^2}$$

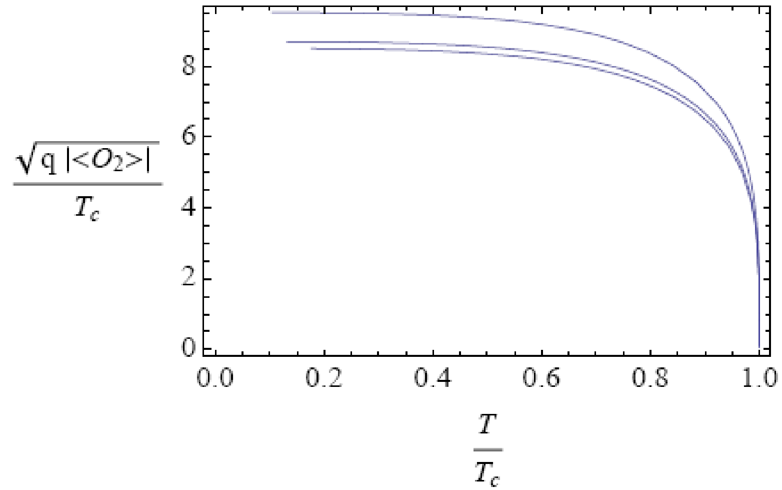
✓ دمای پیوسته ← گذار فاز

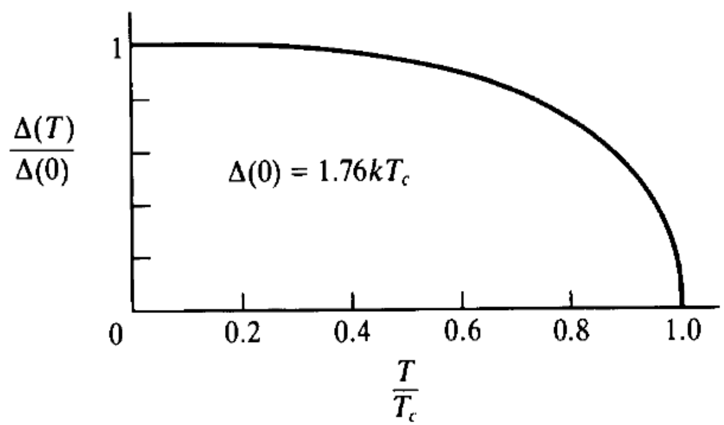
$$T = \frac{1}{4\pi r_+}\left(d - \frac{(d-2) r_+^2 \mu^2}{\gamma^2}\right)$$

S. A. Hartnoll, arXiv:0903.3246.

چگالش

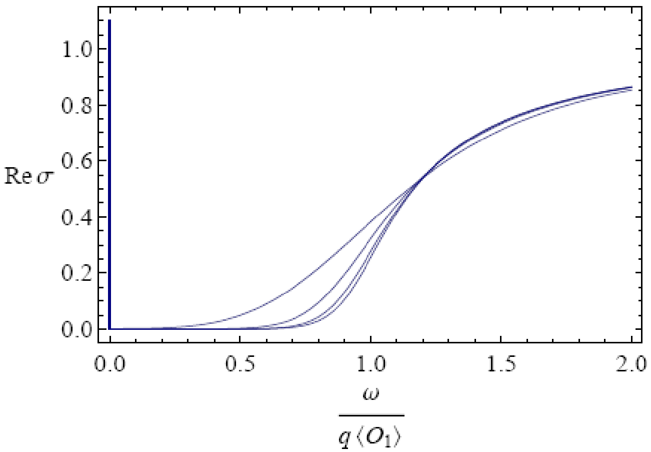


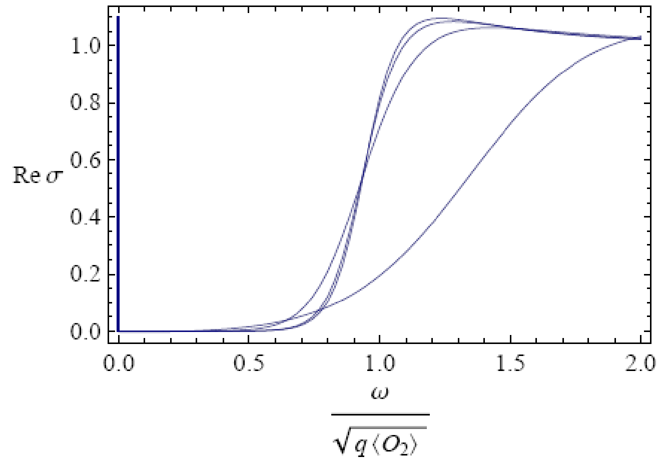




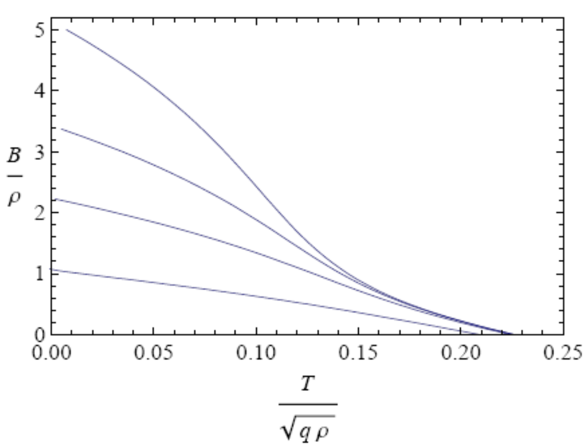
S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, P. R. L. (2008) [arXiv:0803295].

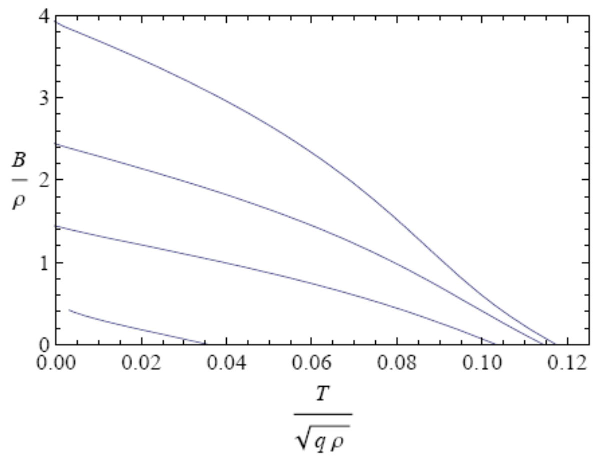
- رفتار رسانندگی





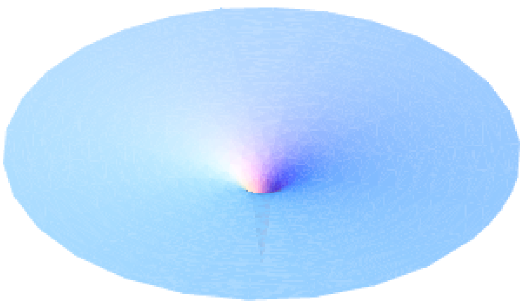
- رفتار در حضور میدان مغناطیسی

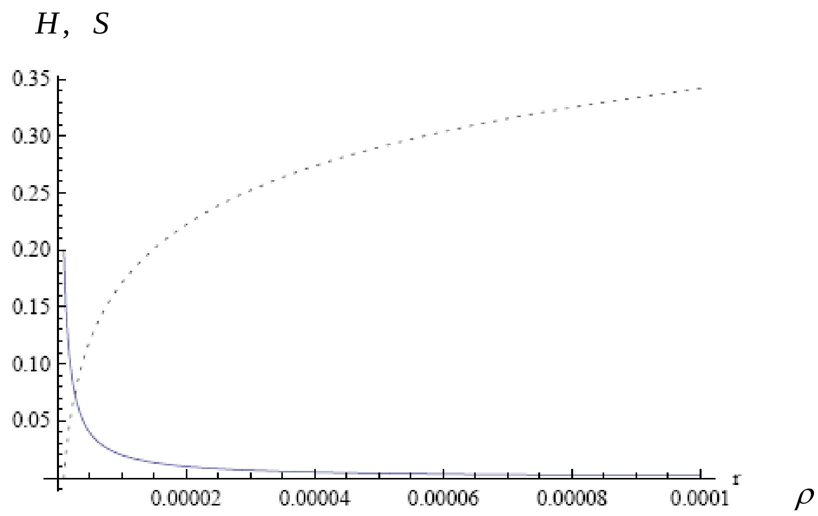




S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, JHEP (2008) [arXiv:0810.1563]

ابررساناى نوع II





W. Wen, [arXiv:0805.1550v1].

دستاوردهای اخیر:

محاسبه طول همدوسی

محاسبه ظرفیت های گرمایی

مطالعه ابررساناهای ناهمسانگرد با جفت شدگی قوی

محاسبه سایر رسانندگی ها مانند رسانندگی ترموالکتریک

پایان