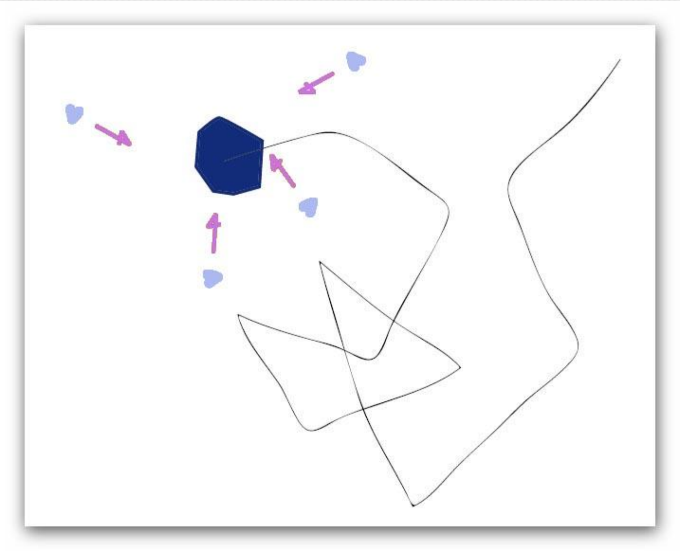
ولگشت زمان پیوسته

Continuous Time Random Walk

توضیح: این اسلایدها براساس بخش هایی از پروژه ی کارشناسی ارشد ارائه دهنده، در دانشگاه الزهرا به راهنمایی دکتر امیر آقامحمدی تنظیم شده است.

زهرا عیدی

Brownian Motion حرکت براونی



$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \mathcal{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)$$

$$f(x,0) = \lim_{t\to 0} f(x,t) = \delta(x)$$

قضیه حد مرکزی
(CLT)

$$\begin{cases} (i) \quad f(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right) \\ (ii) \quad < x^2(t) > = 2Dt \end{cases}$$

$Anomalous\ Diffusion$ پخش ناهنجار

$$< x^2(t) > \propto \ t^{\gamma} \begin{cases} (i) & 0 < \gamma < 1 \\ (ii) & \gamma = 1 \\ (iii) & \gamma > 1 \end{cases}$$

زیر پخش

پخش براونی

ابر پخش

$$< x^2(t) > \to \ \infty$$

پرواز لوی

طرح کلی

- مفاهیم پایه
- توزیع لوی
- ولگشت زمان پیوسته
- فهرست منابع

مفاهیم پایه

X متغیر تصادفی ، $f(x)$ تابع چگالی احتمال

$$(i) \quad f(x) \geq 0$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$Characteristic\ function$ تابع مشخصه

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx}\, dx$$

$Momentum$ گشتاور

$$< x^n > = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n f(x)$$

$$\hat{f}(k) = < e^{ikx} > = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} < x^n >$$

پیچش $Convolution$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

- قضیه پیچش

$$\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k)\ \hat{g}(k)$$

مجموع متغیرهای تصادفی

X_2, X_1 متغیرهای تصادفی مستقل و $Y = X_1 + X_2$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y-x)\,dx$$

$$\hat{f}(k) = \hat{f}_1(k)\,\hat{f}_2(k)$$

متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_i\}_{i=1}^{n}$

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$f(y) = f_n * f_{n-1} * \cdots * f_1$$

$$\hat{f}(k) = \prod_{i=1}^{n} \hat{f}_i(k)$$

$\{X_i\}_{i=1}^{n}$
مستقل و هم توزیع

$$\hat{f}(k) = (\hat{f}_1(k))^n$$

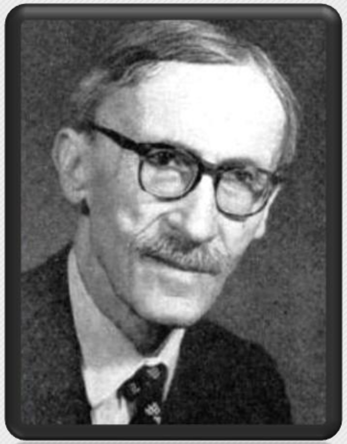
قضیه حد مرکزی (CLT)

$\{X_i\}_{i=1}^{n}$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع و متقارن با وردایی σ^2

$$Y_N = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{\sqrt{N}}$$

$$\lim_{N\to\infty} f_Y(y,N) = f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

توزیع لوی
Lévy Distribution



Paul Lévy
(1886 -1971)

خانواده توزیع های پایا

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \overset{d}{=} C_n X$$

$$C_n = n^{1/\alpha} \qquad 0 < \alpha \leq 2$$

جواب بدیهی : توزیع گاوسی

$$\alpha = 2 \quad \rightarrow C_n = \sqrt{n}$$

$$\hat{f}_{\alpha,\beta}(k) = exp\{-|k|^{\alpha}[1 + \beta sgn(k)\omega(k,\alpha)]\}$$

$$\omega(k,\alpha) = \begin{cases} \tan\frac{\pi}{2}\alpha \quad 0 < \alpha < 2 \quad , \quad \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\ln|k| \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

$0 < \alpha \leq 2$ شاخص لوی (شاخص پایایی)

$-1 \leq \beta \leq 1$ شاخص چولگی (عدم تقارن)

$f_{\alpha,\beta}(x)$ در فضای مختصات

(i) توزیع نرمال (گاوسی)

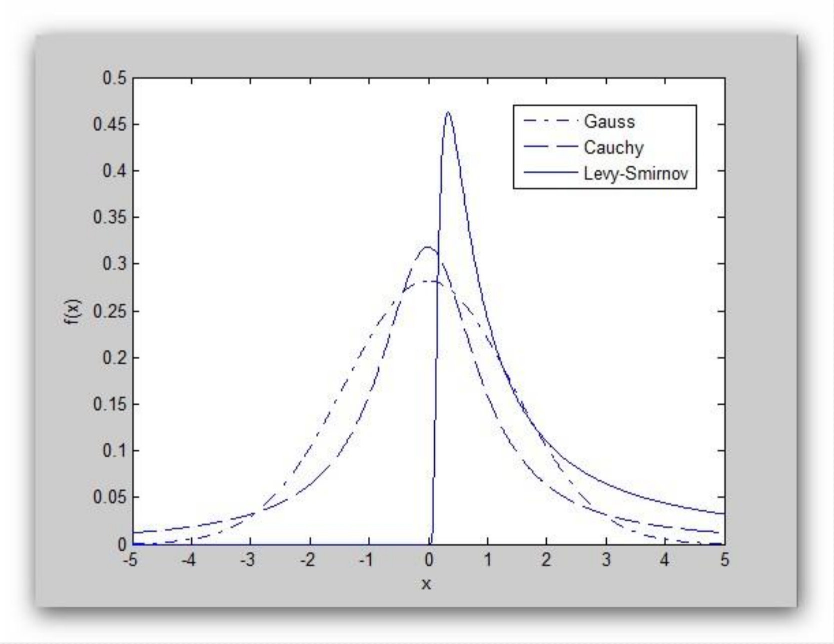
$$f_{2,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp(-\frac{x^2}{4})$$

(ii) توزیع کوشی (لرنز)

$$f_{1,0}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

(iii) توزیع لوی – سمیرنف

$$f_{1/2,1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{2x}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



چند ویژگی

- $\hat{f}(k) = e^{-|k|^{\alpha}}$ $\qquad \beta = 0$

- $\tilde{f}_{\alpha,1}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f_{\alpha,1}(x) dx$
  $= e^{-s^{\alpha}}$
  $\qquad \beta = 1, 0 < \alpha < 1$

- $x \to \infty : \ f_{\alpha}(x) \propto \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$

- $< x^2 > \to \infty$

قضیه حد مرکزی تعمیم یافته $(GCLT)$

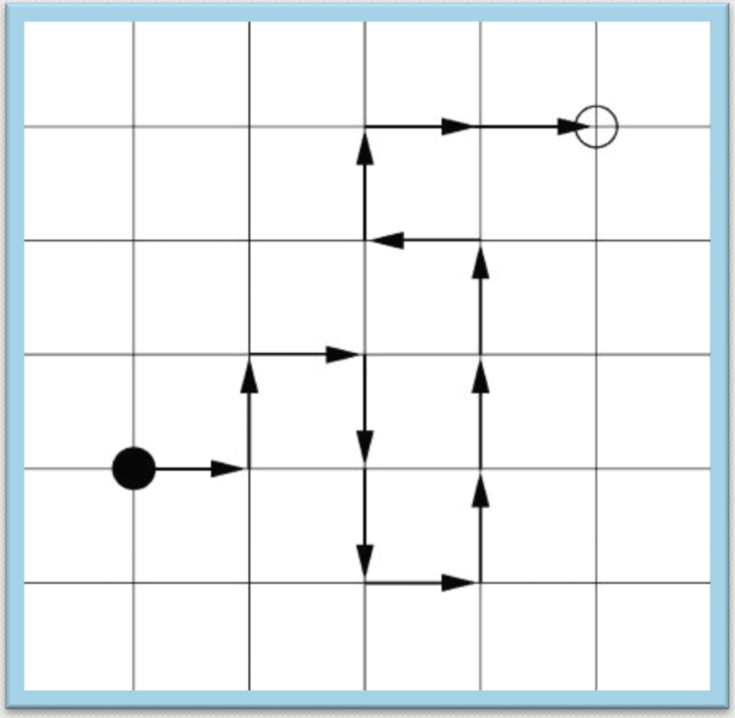
مجموع مقیاس شده متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع به توزیع پایا همگراست .

حالت خاص : قضیه حد مرکزی

ولگشت زمان پیوسته

Continuous Time Random Walk

ولگشت زمان گسسته



$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

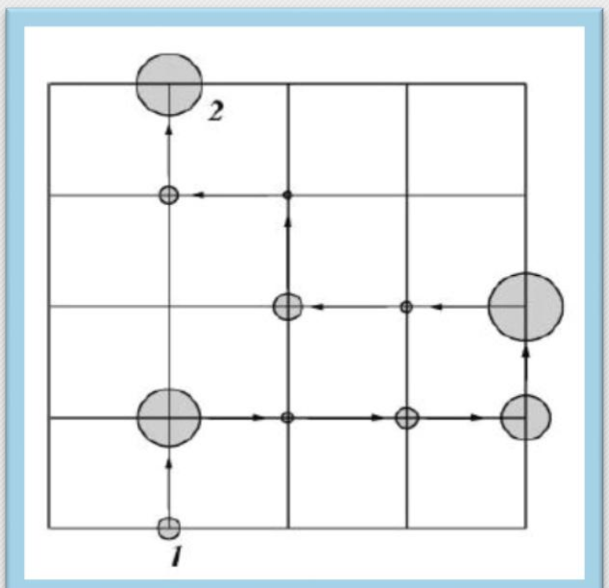
شمارنده ی گام ⟸ $t = N\tau$

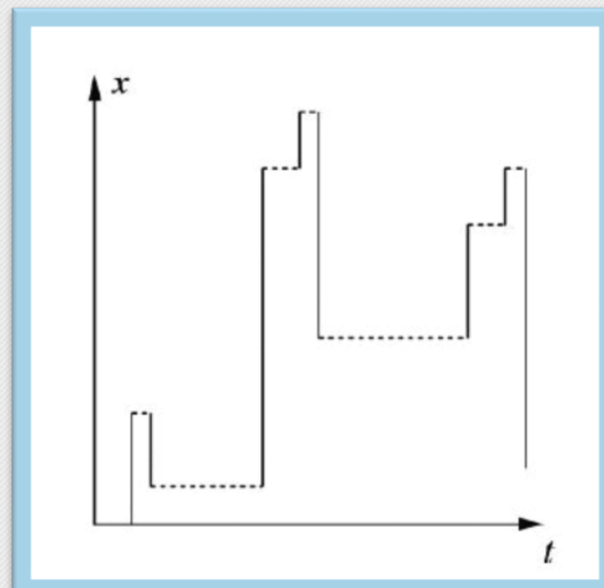
τ : فاصله زمانی ای که گام ها مستقل اند

$\{(X_i, T_i)\}_{i=1}^{n}$ متغیرهای تصادفی مستقل و $T_i \in \mathbb{R}_+ , X_i \in \mathbb{R}$

چگالی توزیع هر زوج : $\boldsymbol{\varphi(x,t)}$

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} f(x)\psi(t) & \text{مستقل } T_i, X_i \\ f(x)\rho(x|t) & \text{وابسته } T_i, X_i \end{cases}$$





R. Metzler, J. Klafter; THE RANDOM WALK GUIDE TO ANOMALOUS DIFFUSION:
A FRACTIONAL DYNAMICS APPROACH, Physics Reports 339– 2000

تعداد گام ها $N_t = \max\{ n \mid \sum_{i=1}^{n} T_i \leq t \}$

$$\boldsymbol{X(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}}$$

فرآیند $\{X(t)\}_{t\geq 0}$: ولگشت زمان پیوسته

$$\boldsymbol{f(x) = \int_0^\infty dt\ \varphi(x,t)}$$ چگالی طول گام

$$\boldsymbol{\psi(t) = \int_{-\infty}^\infty dx\ \varphi(x,t)}$$ چگالی زمان انتظار

هدف : پیدا کردن چگالی احتمال $X(t)$: $f(x,t)$

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N,t)\, f_n(x)$$

$P(N,t)$ چگالی احتمال تعداد گامهای برداشته شده در بازه $(0,t)$

$f_n(x)$ مکان ذره در ولگشت زمان گسسته

$\mathcal{F}$ $\mathcal{L}$

منترل - ویس $\boldsymbol{Montrol - Weiss}$

$$\hat{\tilde{f}}(k,s) = \frac{1-\tilde{\psi}(s)}{s} \frac{1}{1-\tilde{\psi}(s)\hat{f}(k)}$$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{st-iks}\hat{\tilde{f}}(k,s)$$

$< {X_i}^2 >, < T_i > < \infty$ پخش براونی

$$\psi(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \rightarrow \quad \tilde{\psi}(s) = \frac{1}{s\tau + 1}$$

$$s \rightarrow 0 : \qquad \tilde{\psi}(s) = 1 - s\tau + O(\tau^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \quad \rightarrow \quad \hat{f}(k) = e^{-\sigma^2 k^2}$$

$$k \rightarrow 0 : \qquad \hat{f}(k) = 1 - \sigma^2 k^2 + O(k^4)$$

$$\hat{\hat{f}}(k, s) = \frac{1}{s + \frac{\sigma^2}{\tau} k^2}$$

$$s\hat{\hat{f}}(k,s) - 1 = -Dk^2\hat{\hat{f}}(k,s) \quad , \qquad D := \frac{\sigma^2}{\tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)$$

معادله پخش کلاسیک

یادآوری :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d\psi}{dt}\right] = s\mathcal{L}[\psi] - \psi(0)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2}{dx^2} f(x)\right] = (-ik)^2 f(x)$$

چند نکته

(i) $\quad < X_i{}^2 >, < T_i > < \infty$ ⟸ پخش براونی

(ii) $$< N(t) > = \frac{t}{\tau}$$

(iii) $$< X^2(t) > = 2Dt$$

استراحت های طولانی ، زیرپخش $< {X_i}^2 > < \infty \ , < T_i > \rightarrow \ \infty$

گاوسی $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$ $\Longrightarrow$ $\hat{f}(k) = 1 - \ \sigma^2 k^2$

دم پهن $\psi(t) \propto \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{1+\beta}$ $\quad 0 < \beta < 1$

$$\tilde{\psi}(s) = 1 - (\tau_0 s)^\beta$$

$$D_\beta := \frac{\sigma^2}{{\tau_0}^\beta} , \qquad \hat{\tilde{f}}(k,s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + D_\beta S^{-\beta} k^2}$$

$$\hat{f}(k,t) = E_\beta(-D_\beta k^2 t^\beta)$$

$Mittage - Leffler$ تابع : E_β

$$E_\beta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+\beta n)}$$

(i) $$\hat{f}(k,t) = \exp\left(-D_\beta k^2 t\right) \quad , \qquad \beta \to 1$$

(ii) $$< X^2(t) > = \frac{2D_\beta t^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \quad , \qquad 0 < \beta < 1$$

گام های بلند ، پرواز لوی $< X_i{}^2 > \to \infty \ , < T_i > < \infty$

توزیع پواسون $\psi(t) \Longrightarrow \tilde{\psi}(s) = 1 - s\tau$

توزیع لوی $f(x) \Longrightarrow \hat{f}(k) = 1 - \sigma^{\alpha}|k|^{\alpha}$

$$\hat{\tilde{f}}(k,s) = \frac{1}{s + D^{\alpha}|k|^{\alpha}}$$

$$D^{\alpha} := \frac{\sigma^{\alpha}}{\tau}$$

$$s\hat{\hat{f}}(k,s) - 1 = -D^{\alpha}|k|^{\alpha}\hat{\hat{f}}(k,s)$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{f}(k,t) = -D^{\alpha}|k|^{\alpha}\hat{f}(k,t)$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}^{-1}$$

?

$$\mathcal{F}(?\,f) = -|k|^{\alpha}\hat{f}(k)$$

چند نکته

- $\alpha \to 2 \quad \hat{f}(k,t) = \exp(-D^{\alpha} k^2 t)$

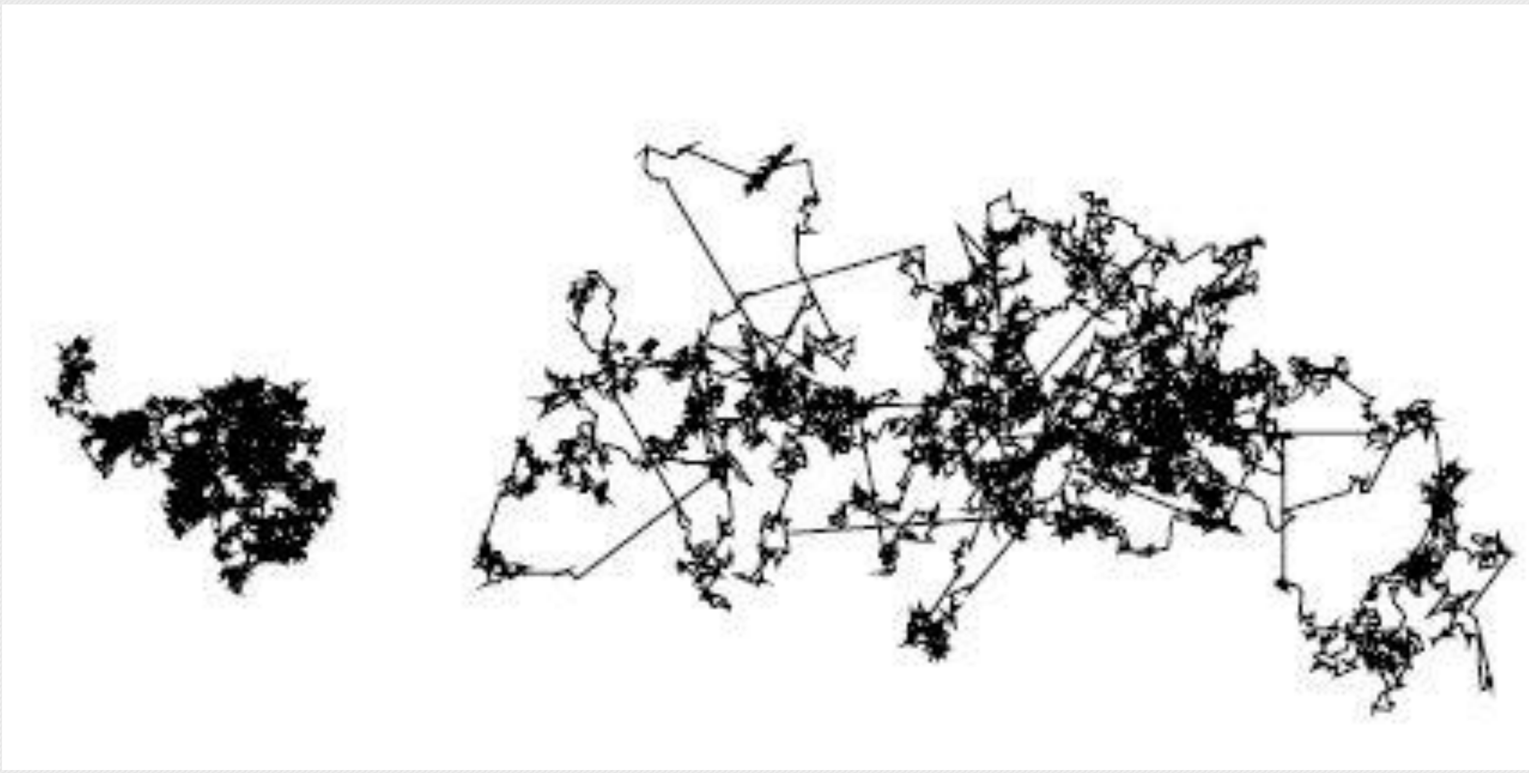
- $x \to \infty \quad f(x,t) \sim \dfrac{D^{\alpha} t}{|x|^{\alpha+1}}$

- $< X^2(t) > \to \infty$

گشت لوی : مدل مناسب برای ابر پخش ذره ی جرم دار

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2}\delta(|x| - vt)\psi(t)$$

$$|x| > vt \qquad f(x,t) = 0 \;\longrightarrow\; < X^2(t) > \; < \infty$$



R. Metzler, J. Klafter; THE RANDOM WALK GUIDE TO ANOMALOUS DIFFUSION:
A FRACTIONAL DYNAMICS APPROACH, Physics Reports 339– 2000

$< {X_i}^2 >, < T_i > \ \rightarrow \infty$ رقابت میان گام های بزرگ و استراحت های طولانی

$$\hat{\hat{f}}(k,s) = \frac{1}{s^{\beta} + D_{\alpha}^{\beta}\ |k|^{\alpha}}$$

$$D_{\alpha}^{\beta} := \frac{\sigma^{\alpha}}{\tau^{\beta}}$$

$$\hat{f}(k,t) = E_{\alpha}\left(-D_{\alpha}^{\beta}|k|^{\alpha}t^{\beta}\right)$$

$$< X^2(t) > \ \rightarrow \infty$$

$(X_i\ , T_i)$ مستقل

مدل مناسبی برای

ابر پخش نیست .

References

- Klags,R. Radons,G. and Sokolov,I. M.(2008); Anomalous Transport, WILEY- VCH
- Metzler,R.Klafter, J.(2000) ; THE RANDOM WALK GUIDE TO ANOMALOUS DIFFUSION: A FRACTIONAL DYNAMICS APPROACH, Physics Reports 339
- Shlesinger,M. F. Zaslavsky,G. M. Frisch,G. M.(Eds.)(1994), Levy Flights and Related topics in Physics, Springer
- Vlahos,L. Isliker, H. Kominis,Y. and Hizanidis,K.(2008). Normal and Anomalous Diffusion: A Tutorial:[E -print arXiv/0805.0419v1]
- Zolotarev, V. M.(1986) One-Dimensional Stable Distributions, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986