۲۰۱۰/۱۰/۰۳
۰۶:۲۰ ب.ظ

معادله ی حرکت

چگالی لاگرانژی $\mathcal{L}(\varphi_i , \partial_\mu \varphi_i)$

معادله حرکت $\int d^4x \; \delta\mathcal{L} = 0$

وردش $\varphi \longrightarrow \varphi + \delta\varphi$

$$\partial_\mu \varphi \longrightarrow \partial_\mu \varphi + \partial_\mu \delta\varphi$$

دقت کنید که ∂_μ و δ شاید باهم جابجا بشوند.

$$\int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \delta\varphi_i + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} \partial_\mu \delta\varphi_i}_{-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} \delta\varphi_i} \right)$$

$$= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} \right) \delta\varphi_i = 0$$

می‌خواهیم به ازای هر وردش دلخواه $\delta\varphi_i$ این شرط برقرار باشد

در حالت کلی $\delta\varphi_i$ می‌تواند بستگی دلخواه فضا ـ زمان داشته باشد:

معادله‌ی حرکت: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} = 0$

ساده‌ترین حالت: میدان اسکالر حقیقی φ با لاگرانژی زیر

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi\, \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2$$

$$(-m^2 + \partial_\mu \partial^\mu)\varphi = 0 \qquad \underbrace{E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2}_{\text{شرط برلاک بودن}}$$

اگر φ مختلط باشه، چی؟

یک روش: $\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}$

یک روش دیگر: φ و $\varphi^\dagger$ را مستقل بگیریم.

در این باره فکر کنید، ظاهراً وردش φ و $\varphi^\dagger$ مستقل نیستند

$$(\delta\varphi^\dagger)^\dagger \neq \delta\varphi$$

به این نکته وقتی معادله حرکت میدان اسپینوری را از معادله‌ی دیراک استخراج می‌کنید نیاز خواهید داشت.

چندین میدان مختلط

$$\mathcal{L} = \sum_i \left[(\partial_\mu \varphi_i)^\dagger \partial^\mu \varphi_i - m_i^2 \varphi_i^\dagger \varphi_i\right] \quad ;$$

دقت کنید که اینجا ضریب $\frac{1}{2}$ را نگذاشتم.

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi_i - m_i^2 \varphi_i = 0$$

تقارن تحت تبدیل پیوسته و جریان نوتر

φ تبدیل بی‌نهایت ...

$$\varphi_i \xrightarrow[\text{کوچک}]{\text{تبدیل بی‌نهایت}} \varphi_i + \alpha\,\delta\varphi_i \qquad T(0)=\mathbb{1} \qquad T(\alpha)$$

$$\varphi_i^{+} \longrightarrow \varphi_i^{+} + \alpha\,(\delta\varphi_i)^{+}$$

$$\int d^4x\; \mathcal{L}$$

ناوردا

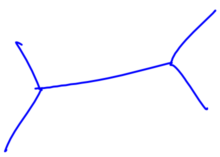
$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \alpha\,\partial_\mu K^\mu$$

$$\mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i) \longrightarrow \mathcal{L} + \alpha\Big(\sum_i \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}\,\delta\varphi_i$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\,\partial_\mu\delta\varphi_i}_{\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\delta\varphi_i\right] - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i}\delta\varphi_i}\Big) = \mathcal{L} + \alpha\,\partial_\mu K^\mu$$

$$\sum_i \delta\varphi_i \Big(\overbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i}}^{\text{معادله ی حرکت} \;=0}\Big) + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i}\,\delta\varphi_i\right]$$

$$= \partial_\mu K^\mu$$



بعد از استفاده از معادله ی حرکت

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \qquad J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_i}\,\delta\varphi_i - K^\mu$$

جریان نوتر

معادله پایستگی $\quad Q = \int J^0\, d^3x$

معادله پیوستگی $\quad Q = \int_V J^0 \, d^3x$

$\vec{J} =$ جریان $\qquad \frac{\partial Q}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$

انتگرال گیری تا بی نهایت

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

$\varphi_1 \dots \varphi_n$

تقارن $U(1)$ برای n ذره

$$\varphi_i \longrightarrow e^{iq_i\alpha}\varphi_i \qquad \begin{cases} \varphi_i \longrightarrow \varphi_i + iq_i\alpha\varphi_i \\ \varphi_i^\dagger \longrightarrow \varphi_i^\dagger - iq_i\alpha\varphi_i^\dagger \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \sum_i (\partial_\mu \varphi_i)^\dagger \partial^\mu \varphi_i - V(\varphi_i)$$

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\text{تحت تبدیل}} \mathcal{L}$$

$$J^\mu = i\sum_i \left[(\partial^\mu \varphi_i^*)\varphi_i - \varphi_i^* \partial^\mu \varphi_i \right] q_i$$

Quantization

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \rightarrow [Q, H] = 0$$

$$\varphi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p e^{ip\cdot x} + \underbrace{a_p^{c\dagger}}_{\text{دقت کنید}} e^{-ip\cdot x} \right)$$

$$\omega_p = \sqrt{|p|^2 + m^2} \qquad a_p \neq a_p^c$$

$$\varphi^+ = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a_p}{\sqrt{\omega_p}} e^{ip\cdot x}$$

$$\varphi^- = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a_p^{c\dagger} e^{-ip\cdot x}}{\sqrt{\omega_p}}$$

$$\varphi = \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{\sqrt{2}}$$

$$A_i = i\int d^3x \left(\dot{\varphi}^+\right)^\dagger \varphi^+ = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a_p^\dagger a_p$$

$$B_i = i\int d^3x \left(\dot{\varphi}^-\right)^\dagger \varphi^- = -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a_p^{c\dagger} a_p^c$$

دقت کنید به علامت

$$q_i A_i \,|\ldots \varphi_i \ldots \bar{\varphi}_j \ldots\rangle = \underbrace{\sum}_{\text{جمع روی ذره}} q_i \,|\ldots \varphi_i \ldots \bar{\varphi}_j \ldots\rangle$$

$$q_i B_i \,|\ldots \varphi_i \ldots \bar{\varphi}_j \ldots\rangle = -\underbrace{\sum}_{\text{جمع روی پاد ذره}} q_j \,|\ldots \varphi_i \ldots \bar{\varphi}_j \ldots\rangle$$

$$j^\mu = i\sum_i \left[(\partial^\mu \varphi_i^*)\varphi_i - \varphi_i^* \partial^\mu \varphi_i \right] q_i$$

نشان دهید ✳

$$Q = \int d^3x\, j^0$$

$$Q\,|\ldots \varphi_i \ldots \bar{\varphi}_j \ldots\rangle = \Big(\underbrace{\sum_i q_i}_{\text{ذره}} - \underbrace{\sum_j q_j}_{\text{پاد ذره}}\Big)\,|\ldots \varphi_i \ldots \bar{\varphi}_j \ldots\rangle$$

$$[Q, H] = 0$$ نشان دهید

$${}_{out}\langle \ldots \varphi'_i \ldots \bar{\varphi}'_j \,|\, \ldots \varphi_i \ldots \bar{\varphi}_j \ldots\rangle_{in} =$$

$$j^\mu = i\sum_i [(\partial^\mu \varphi_i^*)\varphi_i - \varphi_i^* \partial^\mu \varphi_i] q_i$$

نشان دهید *

$$Q = \int d^3x \, j^0$$

$$Q\,|\cdots \varphi_i \cdots \bar{\varphi}_j \cdots\rangle = \Big(\underbrace{\sum_i q_i}_{\text{ذره}} - \underbrace{\sum_j q_j}_{\text{پاد ذره}}\Big)\,|\cdots \varphi_i \cdots \bar{\varphi}_j \cdots\rangle$$

$$[Q, H] = 0$$ نشان دهید

$${}_{out}\langle \cdots \varphi'_i \cdots \bar{\varphi}'_j \,|\, \cdots \varphi_i \cdots \bar{\varphi}_j \cdots \rangle_{in} =$$

$$\langle \;|\; e^{iHt} \;|\; \rangle$$

$$[Q, H] = 0 \longrightarrow$$ بقای بار