

فصل ۷

تصحیحات تابشی:

Radiative Corrections: Some Formal Developments

در فصل قبل دیدیم که فرمول ویگنر-ایسینبرون آردیم و برای اثبات ارجاع دادیم

به فصل ۷:

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}(m_A \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A - \sum p_f) \quad (1)$$

مثلاً $(\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu)$ که به صورت زیر می‌آید

اشکال‌های می‌آید؟

مسئله چیست؟

(۲)

$$i\mathcal{M} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B \rightarrow \sum p_f) = \left(\text{sum of all connected amputated Feynman diagrams} \right)$$

معنای Connected اینجا چیست؟

amputated ~

یا دانستن جهت‌های شکلی می‌آید؟

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(0) = 0$$

۳ انتظار Ward

(۴) کاستن خلو اسامه برای این بردن و آرای ما برای بخش در پارام‌های این

$$\delta F_1(q^2) \rightarrow \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)$$

formal treatment

تکینگی‌های دیالگرام‌های فاینمان به صورت قواعد تطبیقی از تکانه‌های خارجی

بازبینی‌های شدت میدان

$$\langle \Omega | T \varphi(x) \varphi(y) | \Omega \rangle \quad \text{or} \quad \langle \Omega | T \varphi(x) \bar{\varphi}(y) | \Omega \rangle$$

$$\langle 0 | T \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle \quad \text{در دایره‌ای است از آن ۲۲۲}$$

تقریب میدان آزاد

حالاتی برعکس را در نظر می‌گیریم چی می‌شود؟!

کاری به ماهیت برعکس یا بسط در تئوری اختلال نداریم. روی اصول مبتنی و مکانیک کوانتومی تکیه خواهیم کرد.
 به این ترتیب فقط دیاگرامی اسکالر به بی‌نهایت می‌گیریم. بحث در مورد فرمیون را به بعد موکول می‌کنیم.

$$\langle \Omega | T \varphi(x) \varphi(y) | \Omega \rangle$$

$$(1)_{1\text{-particle}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |p\rangle \langle p|$$

$$1 = \sum_n |n\rangle \langle n|$$

Complete set

Eigenstates of H

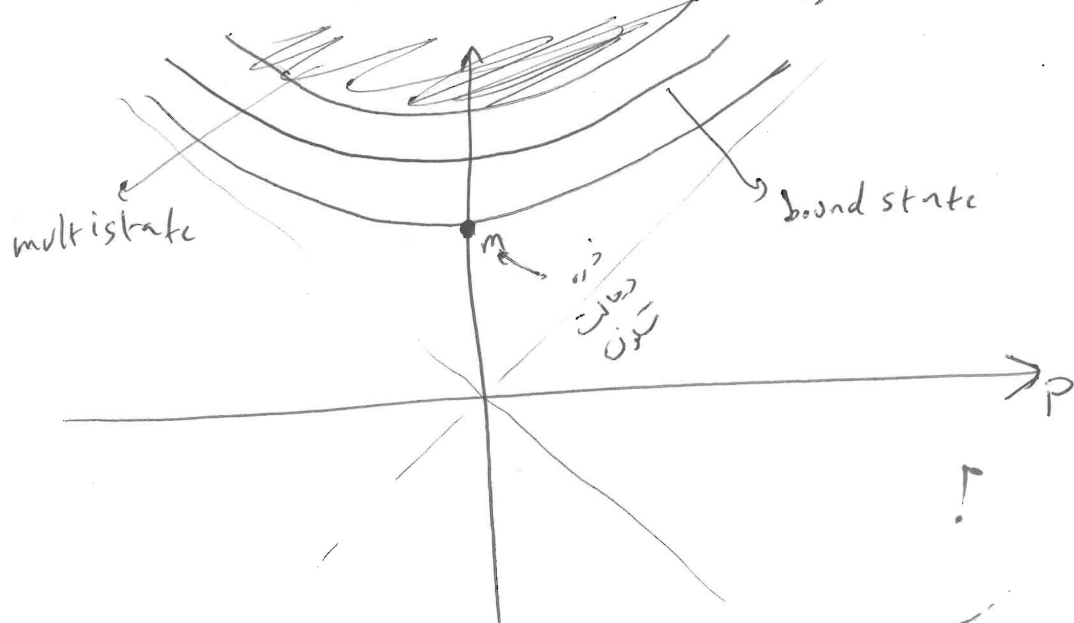
$$[H, P] = 0$$

~ ~ ~ p

$P(\lambda_i) = 0$

$$H|\lambda_0\rangle = h_{\lambda_0}|\lambda_0\rangle$$

$$P(\lambda_n) = 0$$



$$1 = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{|\lambda_p\rangle\langle\lambda_p|}{2E_p}$$

$$E_p(\lambda) = \sqrt{|p|^2 + m_\chi^2}$$

all possible λ_0
Zero momentum

$$\langle \Omega | \varphi(x) \varphi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \langle \Omega | \varphi(x) | \lambda_p \rangle \langle \lambda_p | \varphi(y) | \Omega \rangle$$

We have dropped $\langle \Omega | \varphi(x) | \Omega \rangle \langle \Omega | \varphi(y) | \Omega \rangle$ which vanishes by Symmetry!

$$\begin{aligned}\langle \Omega | \varphi(x) | \lambda_p \rangle &= \langle \Omega | e^{iP \cdot x} \varphi(0) e^{-iP \cdot x} | \lambda_p \rangle = \\ &= \langle \Omega | \varphi(0) | \lambda_p \rangle e^{-iP \cdot x} \Big|_{P^0 = E_p} \\ &= \langle \Omega | \varphi(0) | \lambda_p \rangle e^{-iP \cdot x} \Big|_{P^0 = E_p}\end{aligned}$$

ع

حالت از $\langle \Omega | \varphi(0) | \lambda_p \rangle$ به $\langle \Omega | \varphi(0) | \lambda_0 \rangle$ رسم

$$U | \lambda_p \rangle = | \lambda_0 \rangle \quad \langle \Omega | U^{-1} = \langle \Omega | \quad U \varphi(0) U^{-1} = \varphi(0)$$

$$\langle \Omega | \varphi(0) | \lambda_p \rangle = \langle \Omega | U^{-1} U \varphi(0) U^{-1} U | \lambda_p \rangle =$$

$$\langle \Omega | \varphi(0) | \lambda_0 \rangle$$

آر استارنو و ریزون
بود اچیی سہ ؟

$$\langle \Omega | \varphi(x) \varphi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-i p \cdot (x-y)} | \langle \Omega | \varphi(0) | \lambda_0 \rangle |^2$$

$$\uparrow$$

$$D_F(x-y) \quad m \rightarrow m_{\lambda}$$

تبعین رای توانیم در مورد $\langle y | x \rangle$ نویسیم

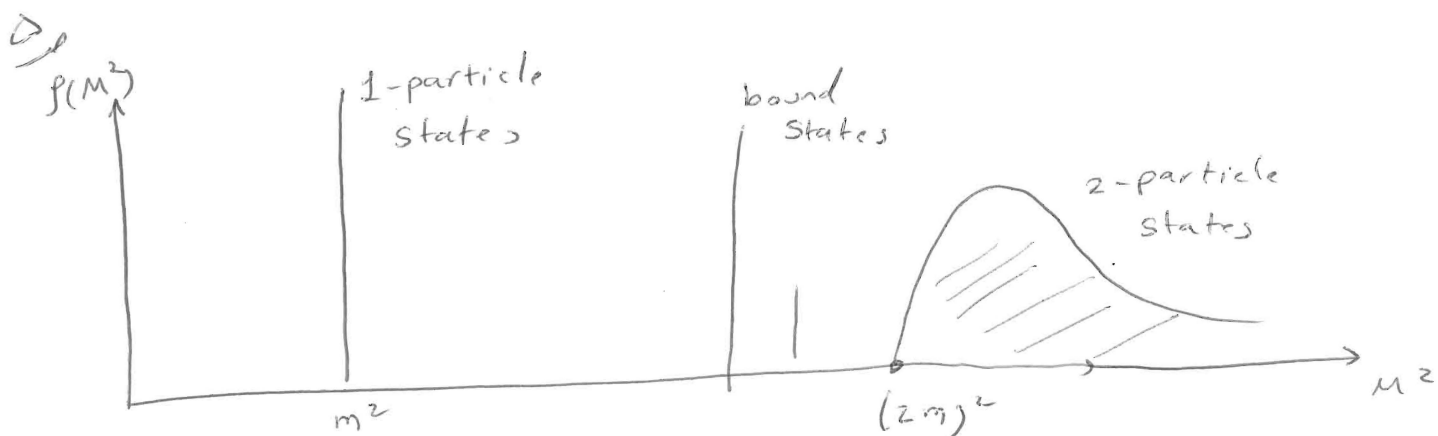
Two-point function

the Källén-Lehmann Spectral representation

$$\langle \Omega | T \varphi(x) \varphi(y) | \Omega \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{dM^2}{(2\pi)} f(M^2) D_F(x-y; M^2)$$

$f(M^2)$ is a positive spectral density function

$$f(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) | \langle \Omega | \varphi(0) | \lambda_0 \rangle |^2$$



$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) |\langle \Omega | \Phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2$$

$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) Z + (\text{nothing else until } M^2 \sim (2m)^2)$$

↑
احداثيات ذريته

↑
مقادير
P ≠ m

$$\langle \Omega | \Phi(0) | \lambda_0 \rangle = Z$$

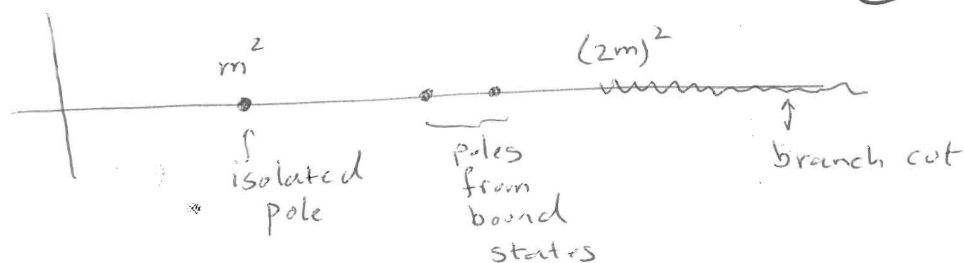
↑
field-strength renormalization

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \Phi(x) \Phi(0) | \Omega \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

$[P^2]$

←
(7-9) (دليل)



9

free scalar field
↓

رابطه (7-10)

$$\int d^4x e^{i p \cdot x} \langle 0 | T \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

برای $x > 0$ دامنه انتشار از 0 تا ∞

7-9 و 7-10

اصطلاح

$$Z = |\langle \lambda_0 | \phi(0) | \Omega \rangle|^2$$

$$\langle p | \phi(0) | 0 \rangle = 1$$

{ pole
cut

چند ذره ϕ است

↑
غیر آزاد

$$\langle 0 | \phi(0) | 0 \rangle = 0$$

↑
آزاد

$$\langle 0 | \phi(0) | \lambda_p \rangle$$

↓

حالا می‌رویم به سراغ اسپین های بالاتر

$$\int d^4x e^{i p \cdot x} \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle = \frac{i Z_2 \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

حالت خفیه ای
اش

مجموعه ترازات

$$= \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

↙
branching cut

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p)$$

An Example: The electron self-energy

در اینجا ما غیراضدادی نگاه داریم. اما در رویکرد اختلالی نیز باید به خاطر تکینگی باشیم.

$$\langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle = \text{diagram 1} + \text{diagram 2}$$

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i(p \cdot (x-y))}$$

این اندازیم و قبیل فریبی کنیم

$$\text{diagram 1} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

$$\text{pole } m^2 \rightarrow m_0^2 + O(\alpha)$$

$$\text{diagram 2} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} \left[-i \sum_2(p) \right] \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2}$$

$$-i \sum_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

که برای دایره‌ای نوسخ که با سطحی μ^2 regularize شده است

Λ

$$\frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2x k \cdot p + x p^2 - x \mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\epsilon]^2}$$

$$-i \Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{-2x \not{p} + 4m_0}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2}$$

$$\Delta = -x(1-x)p^2 + x\mu^2 + (1-x)m_0^2$$

واریابی ساری بنفس

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta]^2} \rightarrow \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty dl_E^2 \left(\frac{l_E^2}{[l_E^2 + \Delta]^2} - \frac{l_E^2}{[l_E^2 + \Delta_\Lambda]^2} \right)$$

$$= \frac{i}{(4\pi)^2} \log\left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right)$$

$$\Delta_\Lambda = -x(1-x)p^2 + x\Lambda^2 + (1-x)m_0^2 \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} x\Lambda^2$$

$$\Sigma_2(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x \not{p}) \log \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2}$$

↑
branch cut starting at

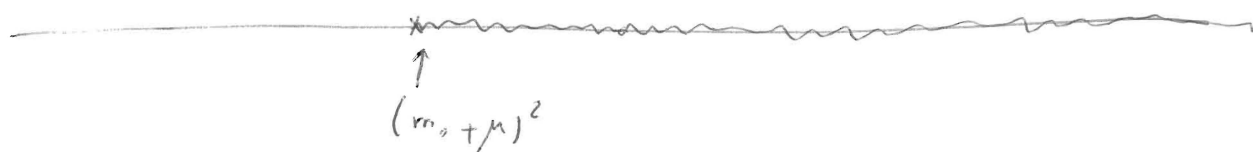
$$(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2 = 0$$

$$n = \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} + \sqrt{\frac{(p^2 + m_0^2 - \mu^2)^2}{4p^4} - \frac{m_0^2}{p^2}} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} + \frac{1}{2p^2} \sqrt{[p^2 - (m_0 + \mu)^2][p^2 - (m_0 - \mu)^2]}$$

$\Sigma_2(p^2)$

$[p^2]$



برای $p^2 > (m_0 + \mu)^2$ معادله ی بالا جوابی برای x بین 0 و 1 دارد



$$\text{total energy} = \sqrt{p^2} = \sqrt{k^2 + m^2} + \sqrt{k^2 + \mu^2}$$

$$k = \frac{1}{2\sqrt{p^2}} \sqrt{[p^2 - (m_0 + \mu)^2][p^2 - (m_0 - \mu)^2]}$$

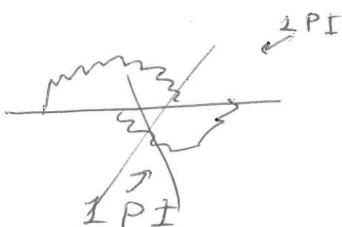
↓
مشتق
در نقطه
معرّف

وقتی $p^2 < (m_0 + \mu)^2$ آستانه ی موجود کردن دودره

→ $\mu \rightarrow 0$
نه با تکیتی نمی شود

حکایت "ایدا کردم اما تو تکیتی؟"

one-particle irreducible $[PI]$



~~1PI~~

$$-i \Sigma(p) = \text{diagram with a circle labeled } 1PI \text{ on a fermion line} \\ = \text{diagram with a self-energy loop on a fermion line} + \text{diagram with a self-energy loop on a fermion line} + \dots$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle e^{ip \cdot x} = \text{diagram with a circle labeled } 1PI \text{ on a fermion line}$$

$$= \text{diagram with a fermion line} + \text{diagram with a circle labeled } 1PI \text{ on a fermion line} + \text{diagram with two circles labeled } 1PI \text{ on a fermion line} + \dots$$

$$= \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} + \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} (-i \Sigma) \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} + \dots$$

$$\Sigma(p) \not{p} = \not{p} \Sigma(p) \quad \text{--- } 1 \text{ ---} \quad \Sigma(p) = \not{p} + \dots$$

$$p^2 = (\not{p})^2 \quad \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} = \frac{i}{\not{p} - m_0}$$

$$\int d^4x \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle e^{ip \cdot x} =$$

$$\frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} \frac{\Sigma(p)}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} \left(\frac{\Sigma(p)}{\not{p} - m_0} \right)^2 + \dots$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)}$$

$$[\not{p} - m_0 - \Sigma(p)] \Big|_{\not{p} = m} = 0$$