صد

$$\varphi(x,t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-ip\cdot x} + a_p^{\dagger} e^{ip\cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_p}$$

علیت

x y

(تصویر هایزنبرگ)

دامنه انتشار از x به y

$$D(x-y) = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle$$

$$\varphi \leftarrow a, \; a^{\dagger}$$

$$\langle 0 | a_p a_q^{\dagger} | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(p-q)$$

$$D(x-y) = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

Lorentz invariant

---

time-like $\quad x^0 - y^0 = t \quad \vec{x} - \vec{y} = 0$

$$D(x-y) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dp \frac{p^2}{2\sqrt{p^2+m^2}} e^{-i\sqrt{p^2+m^2}\, t} =$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_m^{+\infty} dE \sqrt{E^2-m^2}\, e^{-iEt} \underset{t\to\infty}{\sim} e^{-imt}$$

---

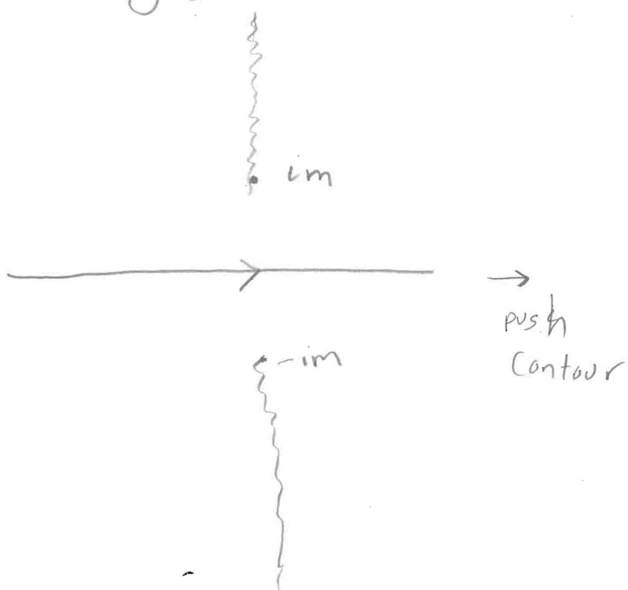
purely spatial $\quad x^0 - y^0 = 0 \quad \vec{x} - \vec{y} = \vec{r}$

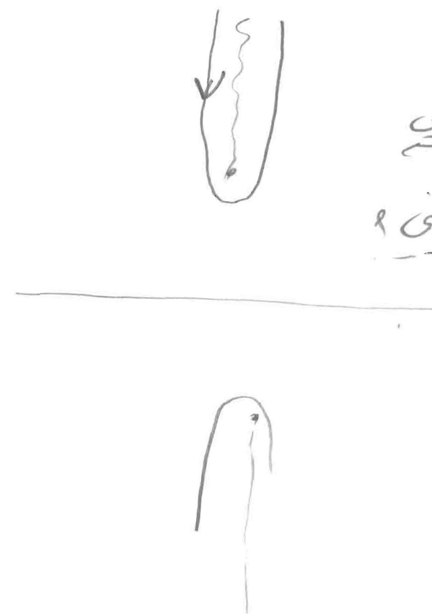
$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} = \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dp \frac{p^2}{2E_p} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr}$$

$$= \frac{-i}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p\, e^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}}$$

branch cut

$\operatorname{Log}\rho$ ← branch cut ?





چرا بالایی
نه پایینی؟

تعریف

$\rho \triangleq -ip$

$$D(x-y) = \frac{1}{4\pi^2 r}\int_m^{+\infty} d\rho\, \frac{\rho\, e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2 - m^2}} \underset{r\to\infty}{\sim} e^{-mr}$$

غیرصفر

شرط علیت

آزمایش x نباید نتایج آزمایش y را تحت تأثیر قرار دهد

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0$$

$\Updownarrow$

$$\langle out|\, O(\varphi(x), \dot\varphi(x)) \sum_n |n\rangle\langle n|\, O'(\varphi(y), \dot\varphi(y))\,|in\rangle =$$
$$\langle out|\, O'(\varphi(y), \dot\varphi(y)) \sum_n |n\rangle\langle n|\, O(\varphi(x), \dot\varphi(x))\,|in\rangle$$

$(x-y)^2 < 0 \qquad [\varphi(x), \varphi(y)] = 0$

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}}$$

$$\times \left[\left(a_p e^{-ip\cdot x} + a_p^\dagger e^{ip\cdot x} \right), \left(a_q e^{-iq\cdot y} + a_q^\dagger e^{iq\cdot y} \right) \right] =$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)} \right) = D(x-y) - D(y-x) \begin{cases} = 0 & \text{space like} \\ \neq 0 & \text{time-like, light-like} \end{cases}$$

$$\overset{\text{real}}{\varphi} \xrightarrow[\text{بار}]{} \overset{\text{complex}}{\varphi}$$

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p e^{ip\cdot x} + a_p^{c\dagger} e^{-ip\cdot x} \right)$$

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = ?$$

$$[\varphi(x), \varphi(y)^\dagger] = ?$$

ص ۲۹

علت → پادذره + ذره

بار خالص ، تکانه جرم

از کجا بفهمیم اعداد کوانتومی حالت ها چند ؟

$[Q, a^\dagger] = q a$

$[Q, a^{c\dagger}] = q a^{c\dagger}$

انتشارگر کلاین گوردن

$[\varphi(x), \varphi(y)]$ ← عدد

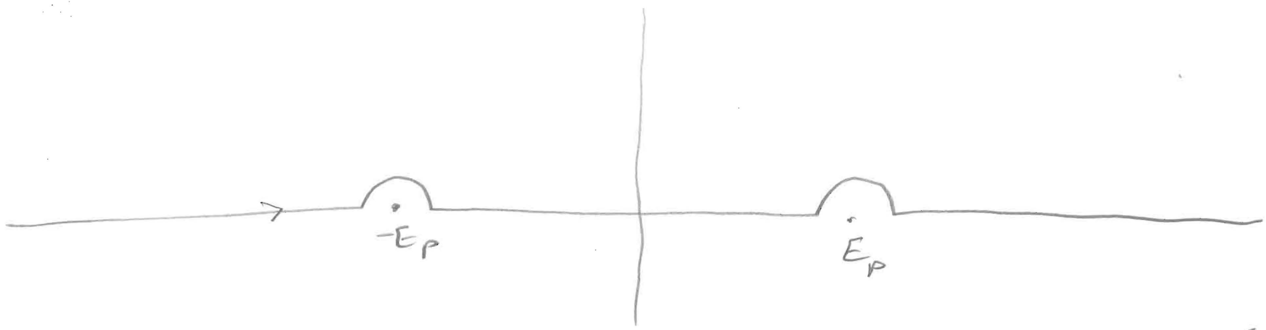
$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle$$

$$x^0 > y^0 \Rightarrow \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)} \right)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} + \frac{1}{-2E_p} e^{-ip\cdot(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p} \right.$$

$$\underset{x^0>y^0}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2-m^2} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

این کانتور



کانتور را از بالا ببندیم یا پایین

$x^0>y^0 \rightarrow$ از پایین

$x^0<y^0$ از بالا

$$D_R(x-y) \triangleq \theta(x^0-y^0)\langle 0|[\varphi(x),\varphi(y)]|0\rangle$$

$$\underbrace{(\partial^2+m^2)}_{\text{Klein-Gordon operator}} D_R(x-y) = \left(\partial^2\,\theta(x^0-y^0)\right)\langle 0|[\varphi(x),\varphi(y)]|0\rangle$$

$$+2\left(\partial_\mu\theta(x^0-y^0)\right)\partial^\mu\langle 0|[\varphi(x),\varphi(y)]|0\rangle + \theta(x^0-y^0)(\partial^2+m^2)\langle 0|[\varphi(x),\varphi(y)]|0\rangle$$

$$= -\delta(x^0-y^0)\langle 0|[\pi(x),\varphi(y)]|0\rangle + 2\delta(x^0-y^0)\langle 0|[\pi(x),\varphi(y)]|0\rangle + 0$$

$$= -i\,\delta^4(x-y)$$

$D_R(x-y) \leftarrow$ تابع گرین

retarded Green's function $\leftarrow$ $x^0<y^0 \quad G(x-y)=0$

روش دیگر برای به دست آوردن $D_R(x-y)$

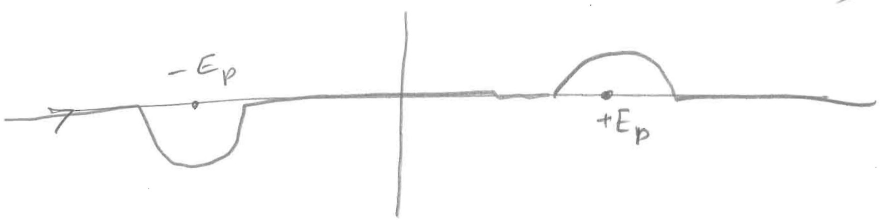
$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)}\,\tilde{D}_R(p)$$

تبدیل فوریه

$$(-p^2+m^2)\,\tilde{D}_R(p) = -i$$

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

چهار جور کانتور



نسخه‌ی فاینمن

Feynman prescription

$$D_F(x-y) \triangleq \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

مهم

$$D_F(x-y) = \begin{cases} D(x-y) & x^0 > y^0 \\ D(y-x) & x^0 < y^0 \end{cases}$$

$$= \theta(x^0-y^0)\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle \triangleq$$

$$\langle 0| T\, \varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$$

ترتیب زمانی

چطور می‌شه ثابت کرد این تابع گرین است؟

Time ordering

دیاگرام فاینمن

۱

منبع کلاسیکی

Th~~ea~~ $(\partial^2 + m^2)\varphi(x) = j(x)$

برای زمان محدود روشن و بعد خاموش

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{m^2\varphi^2}{2} + j(x)\varphi(x)$$

قبل از اینکه روشن شود:

$$\varphi_0(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-ip\cdot x} + a_p^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + i\int d^4y \; D_R(x-y)\, j(y) = \varphi_0(x) + i\int d^4y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}$$

$$\theta(x^0-y^0)\left[e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)}\right] j(y)$$

بعد از خاموشی

$x^0 - y^0$ $\qquad \theta(x^0-y^0)$

$$\tilde{j}(p) = \int d^4y \; e^{ip\cdot y}\, j(y)$$

فرکانس مثبت

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left\{\left(a_p + \frac{i}{\sqrt{2E_p}}\tilde{j}(p)\right)e^{-ip\cdot x} + H.c.\right\}$$

$\Downarrow$ هامیلتونی

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \left(a_p^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2E_p}}\tilde{j}^*(p)\right)\left(a_p + \frac{i}{\sqrt{2E_p}}\tilde{j}(p)\right)$$

$$\langle 0|H|0\rangle = \cdots + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{|\tilde{j}(p)|^2}{2}$$

$\dfrac{|\tilde{j}(p)|^2}{2E_p} \rightarrow$ propubility of creating a particle of momentum $\vec{p}$

= ذرات تولید شده

$$\int dN = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}|\tilde{j}(p)|^2 \leftarrow$$

فقط

$p^2 = m^2$

resinance

مثلاً $\qquad$ bremstrahlung

ص۱

میدان دیراک   معادله دیراک

ناوردایی نسبیتی

~~میدان~~

معادله‌ی دیراک
معادله کلاسیکی نسبیتی

کوانتش

میدان
مجموعه‌ای از میدان‌ها

عملگر دیفرانسیلی

φ D

ناوردای نسبیتی

$D\varphi = 0$

دوران و یا خیز اعمال کنیم و ببینیم باز هم ناورداست.

منفعل

فعال

هم میدان و ذرات را دوران دهیم یا بچرخانیم

فرمالیزم لاگرانژی نظریه‌ی میدان $\longleftrightarrow$ ناوردایی لورنتسی

یادآوری

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

$$U(\Lambda)\psi_{p,\sigma} = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\, \psi_{\Lambda p,\sigma'}$$

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x)$$

حالا ببینیم آیا شکل لاگرانژی کلاین گوردن ناوردای لورنتس است؟

$$\frac{m^2}{2}\varphi^2(x) \to \frac{m^2}{2}\varphi^2(\Lambda^{-1}x)$$

$$\partial_{\mu}\varphi(x) = \partial_{\mu}(\varphi(\Lambda^{-1}x)) = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\, \partial_{\nu}\varphi(\Lambda^{-1}x)$$

$$(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\nu}\, g^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}$$

$$(\partial_\mu \varphi(x))^2 \longrightarrow g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \varphi'(x)\right)\left(\partial_\nu \varphi'(x)\right) = g^{\mu\nu} \left[(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu}\, \partial_\rho \varphi \right] \left[(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\nu}\, \partial_\sigma \varphi \right] \underbrace{(\Lambda^{-1} x)}_{\text{در نقطه حساب کنیم}}$$

$$= g^{\rho\sigma} (\partial_\rho \varphi)(\partial_\sigma \varphi)(\Lambda^{-1} x) = (\partial_\mu \varphi)^2 (\Lambda^{-1} x)$$

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}(\Lambda^{-1} x) \qquad S \rightarrow \text{invariant}$$

مشابهاً می‌توان نشان داد که

$$(\partial^2 + m^2)\, \varphi'(x) = \left[(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\, \partial_\nu (\Lambda^{-1})^{\sigma\mu}\, \partial_\sigma + m^2 \right] \varphi(\Lambda^{-1} x)$$

$$= (g^{\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma + m^2)\, \varphi(\Lambda^{-1} x) = 0$$

$\cancel{\mathcal{L}(x)} \to \varphi$

اسکالر ساده‌ترین بود

$$V^i(x) \xrightarrow{\text{دوران}} R^{ij}\, V^j(R^{-1} x)$$

$$V^\mu(x) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, V^\nu(\Lambda^{-1} x)$$

$\rightarrow$ higher rank tensors $\mu\nu \ldots$

$$\partial^\mu \underbrace{F_{\mu\nu}}_{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} = 0 \qquad \partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0$$

معادلات ماکسول

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \qquad \partial^2 A_\nu - \partial_\mu \partial^\mu A_\nu = 0$$

$\uparrow$

$$\mathcal{L}_{\text{maxwell}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} =$$